عددهای صحیح و گویا

یادآوری اعداد صحیح : اعداد صحیح از سه دسته تشکیل شده است : (اعداد مثبت و عدد صفر و اعداد منفی)

نکته : اعداد صحیح را با حرف انگلیسی Z نمایش می دهند :　$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

جمع و تفریق اعداد صحیح : ابتدا اعداد را مختصر کرده سپس اگر هم علامت باشند دو عدد را جمع و اگر مختلف العلامت باشند دو عدد را کم می کنیم و برای جواب علامت عدد بزرگتر را می گذاریم.

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$10 - 83 + (+6) - \big(-(-9)\big) = 10 - 83 + 6 - 9 = -76$$

$$[(-18) + (+12)] - (-7) = -18 + 12 + 7 = 1$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح : ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس اعداد را با توجه به علامت بین آن ها ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$(-8) \times [12 \div (+4)] = (-8) \times (+3) = (-24)$$

$$[(-6) \times (+4)] \div (-3) = (-24) \div (-3) = 8$$

اولویت های ریاضی : ۱) داخل مجموعه یا کروشه یا پرانتز　　۲) توان و جذر

۳) ضرب و تقسیم (از چپ به راست)　　۴) جمع و تفریق

مثال : حاصل عبارت زیر با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید؟

$$4 - 4 \times 3^2 \div 6 - (9 \div 3^2) = 4 - 4 \times 9 \div 6 - 1 = 4 - 36 \div 6 - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$$

نکته : برای جمع اعداد یک سری منظم از رابطه های زیر استفاده می کنیم :

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{2} \times \text{تعداد اعداد}$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{عدد آخر} - \text{عدد اول}}{\text{فاصله اعداد}} + 1$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{204 + 3}{2} \times 68 = 207 \times 34 = 7038$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{204 - 3}{3} + 1 = 67 + 1 = 68$$

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 204 = 7038$$

نکته : برای جمع اعداد یک سری منظم که یک در میان مثبت و منفی باشند ابتدا دو به دو اعداد جواب می دهیم.

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\underbrace{10 - 12}_{-2} + \underbrace{14 - 16}_{-2} + \cdots + \underbrace{102 - 104}_{-2} = 24 \times -2 = -48$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{104 - 10}{2} + 1 = 47 + 1 = 48 \qquad 48 \div 2 = 24$$

عددهای صحیح و گویا

اعداد گویا : هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته : اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند : $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a , b \in Z, b \neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد گویا (اعداد کسری) : ابتدا اعداد را مختصر کرده سپس مخرج مشترک می گیریم. که بهترین مخرج همان (ک.م.م) مخرج ها می باشد.

مثال : حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید؟

$$-\frac{۴}{۵} + \frac{۱}{۱۲} - \frac{۳}{۱۰} = \frac{-۴۸ + ۵ - ۱۸}{۶۰} = -\frac{۶۱}{۶۰} = -۱\frac{۱}{۶۰}$$

$$\left(+\frac{۳}{۴}\right) - \left(+\frac{۵}{۱۲}\right) = \frac{۳}{۴} - \frac{۵}{۱۲} = \frac{۹ - ۵}{۱۲} = \frac{۴}{۱۲} = \frac{۱}{۳}$$

ضرب اعداد گویا : ابتدا در ضرب اعداد را ساده کرده سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می کنیم.

مثال : حاصل ضرب های زیر را به دست آورید؟

$$\frac{\cancel{۷}^{\,۱}}{\cancel{۸}_{\,۴}} \times \frac{\cancel{۲}^{\,۱}}{\cancel{۷}_{\,۱}} \times \left(-\frac{۲}{۳}\right) = \frac{۱}{\cancel{۴}_{\,۲}} \times \left(-\frac{\cancel{۲}^{\,۱}}{۳}\right) = \left(-\frac{۱}{۶}\right)$$

$$\left(+\frac{\cancel{۳}^{\,۱}}{۵}\right) \times \left(+\frac{۲}{\cancel{۲۱}_{\,۷}}\right) = \frac{۲}{۳۵}$$

تقسیم اعداد گویا : تقسیم به ضرب تبدیل می شود یعنی کسر اولی را در معکوس کسر دوم ضرب کرده و حاصل را به دست می آوریم.

مثال : حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\frac{\frac{۳}{۷}}{-\frac{۴}{۵}} = -\frac{۱۵}{۲۸}$$

$$\left(-\frac{۷}{۸}\right) \div \left(-\frac{۱۴}{۱۵}\right) = \left(-\frac{\cancel{۷}^{\,۱}}{۸}\right) \times \left(-\frac{۱۵}{\cancel{۱۴}_{\,۲}}\right) = \frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید؟

$$\left(-\frac{۲}{۵}\right) \div \left[\left(+\frac{۳}{۴}\right) + \left(-\frac{۷}{۱۰}\right)\right] = \left(-\frac{۲}{۵}\right) \div \left(\frac{۱۵ - ۱۴}{۲۰}\right) = \left(-\frac{۲}{\cancel{۵}_{\,۱}}\right) \times \left(+\cancel{۲۰}^{\,۴}\right) = (-۸)$$

نکته : نوشتن عددی گویا بین هر دو عدد گویا به چند روش است که دو روش کاربردی آن :

۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۱۵}{۲۰} \text{ و } \frac{۱۶}{۲۰} \Rightarrow \frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰} \Rightarrow \frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۶}{۶۰} < \frac{۴۷}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰}$$

روش دوم

$$\frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۱۱}{۱۴} < \frac{۴}{۵}$$

روش اول

عددهای اول

شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد : به اعدادی که عدد داده شده برآن ها بخش پذیر باشد. شمارنده های آن عدد می گویند.

مانند : شمارنده های عدد ۱۲ = {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲}

عدد اول : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که فقط دو شمارنده (یک و خودش) داشته باشد. عدد اول نام دارد.

مانند : ۱۱ عدد اول = {۱ , ۱۱}　　　۲ عدد اول = {۱ , ۲}

نکته : اعداد اول به ترتیب عبارتند از :　اعداد اول = {۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ , ... }

عدد مرکب : هر عدد طبیعی که بیش از دو شمارنده داشته باشد. عدد مرکب نام دارد.

مانند : ۱۵ عدد مرکب = {۱ , ۳ , ۵ , ۱۵}　　　۴ عدد مرکب = {۱ , ۲ , ۴}

نکته : هر عدد مرکب را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت :　۱۵ عدد مرکب = ۳ × ۵

نکته : عدد یک نه اول است و نه مرکب است. (چون فقط یک شمارنده دارد)

مضارب طبیعی یک عدد : اگر یک عدد را در اعداد طبیعی به ترتیب ضرب کنیم. مضارب طبیعی آن عدد حاصل می شود.

مثال : الف) مضارب طبیعی عدد ۸ را بنویسید؟　　۸ مضارب طبیعی = {۸ , ۱۶ , ۲۴ , ۳۲ , ... }

ب) هشتمین مضرب ۱۳ چند است؟　　۱۰۴ = ۸ × ۱۳

نکته : اعداد طبیعی به سه دسته (اعداد اول – اعداد مرکب–عدد یک) تقسیم بندی می شوند.

دو عدد متباین (نسبت به هم اول) : اگر (ب.م.م) (بزرگترین شمارنده ی مشترک) دو عدد یک شود آن دو عدد متباین هستند.

مانند : ۱ = (۱۸ , ۲۵)　　　۱ = (۱۴ , ۱۵)

نکته : اعداد طبیعی زیر همواره نسبت به هم اول هستند :

الف) دو عدد پشت سر هم :　۱ = (۲۱ , ۲۲)　　ب) هر عدد با عدد یک :　۱ = (۱۴ , ۱)

ج) دو عدد اول متفاوت :　۱ = (۵ , ۱۳)

نکته : اگر عددی اول باشد تمام مضارب آن غیر از خودش مرکب هستند :

اول　مرکب

۱۱ مضارب طبیعی = {۱۱ , ۲۲ , ۳۳ , ...}

نکته : اگر عددی مرکب باشد تمام مضارب آن مرکب هستند :

مرکب

۶ مضارب طبیعی = {۶ , ۱۲ , ۱۸ , ...}

عددهای اول

تعیین عددهای اول (روش غربال) : در این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) عدد یک را خط می زنیم. (چون عدد یک نه اول است و نه مرکب)

۲) تمام مضارب عدد ۲ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۳) تمام مضارب عدد ۳ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۴) تمام مضارب عدد ۵ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۵) تمام مضارب عدد ۷ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۶) به همین ترتیب مضارب اعداد اول را تا جایی خط می زنیم که مربع (توان دوم) آن عدد اول از بزرگترین عدد داده شده بزرگتر باشد.

مثال : روش غربال از ۱ تا ۳۰ را به کار ببرید؟ آخرین عدد اولی که مضارب آن خط می خورد عدد ۵ است. چون مربع عدد ۷ عدد ۴۹ می شود که از عدد ۳۰ بزرگتر است.

~~۱~~ , ۲ , ۳ , ~~۴~~ , ۵ , ~~۶~~ , ۷ , ~~۸~~ , ~~۹~~ , ~~۱۰~~ , ۱۱ , ~~۱۲~~ , ۱۳ , ~~۱۴~~ , ~~۱۵~~ , ~~۱۶~~ , ۱۷ , ~~۱۸~~ , ۱۹ , ~~۲۰~~ , ~~۲۱~~ , ~~۲۲~~ , ۲۳ , ~~۲۴~~ , ~~۲۵~~ , ~~۲۶~~ , ~~۲۷~~ , ~~۲۸~~ , ۲۹ , ~~۳۰~~

نکته : در خط زدن مضارب مرکب اعداد اول اولین مضربی که خط می خورد مربع آن عدد اول است.

مثال : اولین مضرب عدد ۷ در روش غربال خط می خورد چند است؟ $۷^{۲} = ۴۹$

نکته : برای این که بدانیم در روش غربال عددی چند بار خط می خورد باید آن عدد را تجزیه کرد عوامل اول آن عدد تعداد را نشان می دهد.

مثال : در روش غربال ۱ تا ۲۰۰ اعداد ۲۷ و ۳۵ و ۴۲ چند بار خط می خورند؟

(سه بار خط می خورد) $۴۲ = ۲ \times ۳ \times ۷$ (دو بار خط می خورد) $۳۵ = ۵ \times ۷$ (یک بار خط می خورد) $۲۷ = ۳^{۳}$

شناخت اعداد اول و مرکب : برای تشخیص اول بودن یا مرکب بودن یک عدد آن عدد را براعداد اول کوچکتر از جذرش تقسیم می کنیم. اگر بر هیچ کدام بخش پذیر نبود اول در غیر این صورت مرکب است.

مثال : آیا عدد ۱۱۹ اول است؟ یا مرکب؟ ابتدا جذر تقریبی عدد ۱۱۹ را می گیریم : $\sqrt{۱۱۹} \simeq ۱۰/۹$

پس عدد ۱۱۹ را بر اعداد اول کمتر از ۱۰ (۲ و ۳ و ۵ و۷) تقسیم می کنیم. چون بر عدد ۷ بخش پذیر است. پس عدد ۱۰۳ مرکب است.

مثال : با چند بار تقسیم می توان فهمید عدد ۱۵۱ اول است یا مرکب؟ $\sqrt{۱۵۱} \simeq ۱۲/۲$

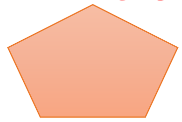
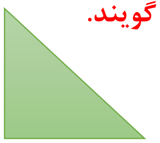
باید بخش پذیر را بر اعداد اول کمتر از ۱۲ (۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱) بررسی کنیم. چون بر هیچ یک بخش پذیر نیست پس با ۵ بار تقسیم می توان فهمید عدد ۱۵۱ اول است.

درسنامه و نکات کلیدی **(فصل سوم)** **سال هشتم**

چند ضلعی ها

چند ضلعی : به هر خط شکسته بسته ای به شرطی که اضلاع آن همدیگر را قطع نکند چند ضلعی می گویند.

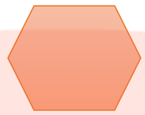
مانند :

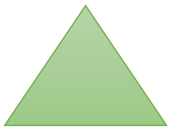
چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که تمام اضلاع و تمام زاویه های آن با هم مساوی باشند.

مانند :

چهار ضلعی منتظم



شش ضلعی منتظم



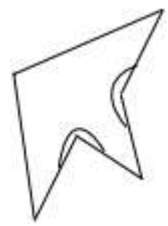
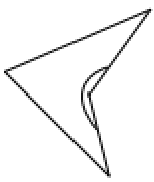
سه ضلعی منتظم

چند ضلعی محدب : چند ضلعی که تمام زاویه های آن از ۱۸۰ درجه کمتر باشد.

مانند :

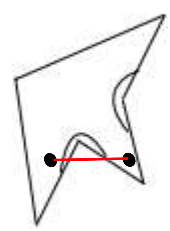

چند ضلعی مقعر : چند ضلعی که حداقل یکی از زاویه های آن از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد.

مانند :

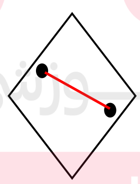



نکته : اگر در یک چند ضلعی دو نقطه دلخواه انتخاب کنیم و آن دو نقطه را با یک خط راست به هم وصل کنیم اگر قسمتی از خط بیرون از چند ضلعی قرار گرفت آن چند ضلعی مقعر است. اگر تمام خط داخل چند ضلعی قرار گرفت چند ضلعی محدب است.

مانند :



چند ضلعی مقعر



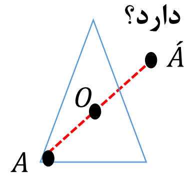
چند ضلعی محدب

مرکز تقارن : اگر دوران ۱۸۰ درجه شکلی حول یک نقطه از شکل روی خود شکل قرار گیرد آن شکل مرکز تقارن دارد.

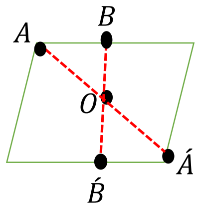
نکته : برای این که بدانیم شکلی مرکز تقارن دارد یا نه . نقطه ای در وسط شکل به عنوان مرکز تقارن در نظر گرفته سپس از شکل نقاطی به دلخواه انتخاب کرده به مرکز تقارن وصل و به همان اندازه ادامه می دهیم اگر نقطه حاصل روی شکل قرار گرفت آن شکل مرکز تقارن دارد. در غیر این صورت آن شکل مرکز تقارن ندارد.

چند ضلعی ها

مثال : کدام یک از چند ضلعی های زیر مرکز تقارن دارد؟



مرکز تقارن ندارد



مرکز تقارن دارد

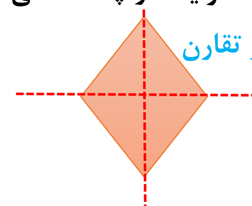
نکته : در چند ضلعی منظم اگر تعداد اضلاع زوج باشد مرکز تقارن دارد و اگر فرد باشد مرکز تقارن ندارد.

به طور مثال : ۸ ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد ولی ۷ ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

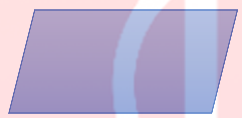
محور تقارن (خط تقارن) : خطی است که اگر کاغذ را تا کنیم همه نقاط شکل روی هم قرار می گیرند.

نکته : خط تقارن خطی است که چند ضلعی را به دو قسمت مساوی تقسیم کند.

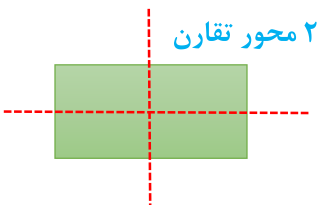
مثال : هر یک از چند ضلعی های زیر چند محور تقارن دارد؟



۲ محور تقارن



محور تقارن ندارد



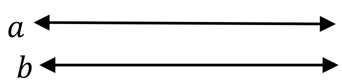
۲ محور تقارن

نکته : چند ضلعی های منتظم به تعداد اضلاع محور تقارن دارند.

به طور مثال : ۶ ضلعی منتظم ۶ محور تقارن و مثلث متساوی الاضلاع (۳ ضلعی منتظم) ۳ محور تقارن دارد.

دو خط موازی : دو خطی که هر چه آن ها را امتداد دهیم همدیگر را قطع نکنند و فاصله بین دو خط تغییر نکند دو خط موازی می گویند.

مانند :



$a \parallel b$ علامت موازی بودن

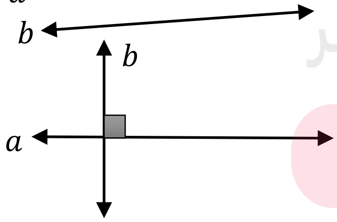
دو خط متقاطع : دو خطی که موازی نباشند یعنی دو خطی که همدیگر را در نقطه ای قطع کنند دو خط متقاطع می گویند.

مانند :

$a \nparallel b$ علامت متقاطع بودن

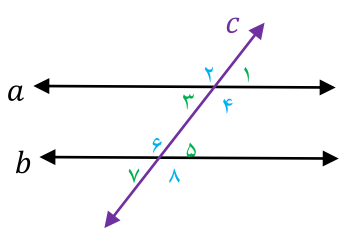
دو خط عمود بر هم : دو خط متقاطعی که زاویه بین دو خط ۹۰ درجه باشد.

مانند :



$a \perp b$ علامت عمود بودن

نکته : اگر دو خط موازی را خطی قطع کند (مورب باشد) ۸ زاویه حاصل می شود. ۴ زاویه تند مساوی و ۴ زاویه باز مساوی.



$(a \parallel b\ ,$ مورب $c) \Longrightarrow \begin{cases} \hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷} & \text{۴ زاویه تند} \\ \hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸} & \text{۴ زاویه باز} \end{cases}$

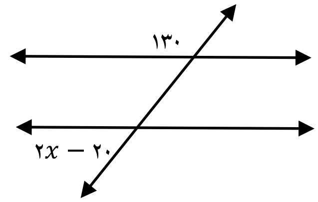
دو زاویه تند و باز مکمل اند : $\hat{۱} + \hat{۲} = ۱۸۰$ درجه

چند ضلعی ها

مثال : در هر شکل مقدار x را به دست آورید؟

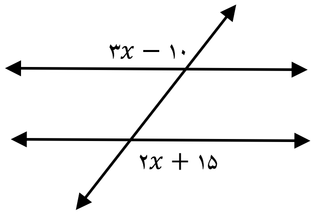
زاویه تند با باز مکمل است :

$$۲x - ۲۰ + ۱۳۰ = ۱۸۰$$
$$۲x + ۱۱۰ = ۱۸۰$$
$$۲x = ۷۰$$
$$x = ۳۵$$



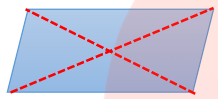
زاویه های باز با هم برابرند :

$$۳x - ۱۰ = ۲x + ۱۵$$
$$۳x - ۲x = ۱۵ + ۱۰$$
$$x = ۲۵$$



انواع چهار ضلعی ها : ۱) متوازی الاضلاع ۲) مستطیل ۳) مربع ۴) لوزی ۵) ذوزنقه

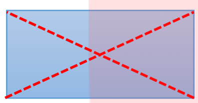
متوازی الاضلاع : چهار ضلعی است که اضلاع روبه رو موازی و مساویند.



خواص متوازی الاضلاع : ۱) اضلاع روبه رو موازی و مساویند ۲) زاویه های روبه رو مساویند

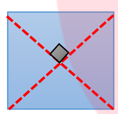
۳) قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند ۳) زاویه های مجاور (کنارهم) مکمل اند

مستطیل : متوازی الاضلاعی است که زاویه قائمه داشته باشد.



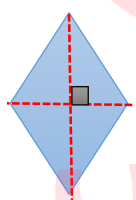
خواص مستطیل : ۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد ۲) دو قطر مستطیل برابرند

مربع : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابر و زاویه قائمه داشته باشد.



خواص مربع : ۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد ۲) دو قطر مربع برابرند

۳) قطرهای مربع عمود منصف یکدیگرند

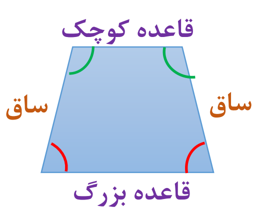


لوزی : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابر است.

خواص لوزی : ۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد ۲) قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند

ذوزنقه : چهار ضلعی است که فقط دو ضلع موازی دارد.

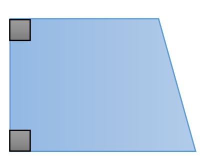
انواع ذوزنقه : ۱) ذوزنقه متساوی الساقین ۲) ذوزنقه قائم الزاویه



خواص ذوزنقه متساوی الساقین : ۱) دو ساق آن برابرند ۲) دو زاویه مجاور قاعده برابرند

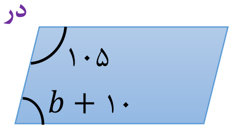
۳) دو زاویه مجاور ساق مکمل اند

خواص ذوزنقه قائم الزاویه : ۱) دارای زاویه قائمه است



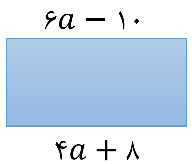
چند ضلعی ها

مثال : در هر شکل مقادیر مجهول را به دست آورید؟



در متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل اند :

$b+10+105=180 \Rightarrow b+115=180 \Rightarrow b=65$



در مستطیل اضلاع روبه رو برابرند :

$6a-10=4a+8$

$6a-4a=10+8$

$2a=18 \Rightarrow a=9$

نکته : مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

نکته : مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی از رابطه ی $(n-2)\times 180$ حاصل می شود.

نکته : اندازه ی یک زاویه ی چند ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{(n-2)\times 180}{n}$ حاصل می شود.

مثال : الف) مجموع زاویه های داخلی ۱۰ ضلعی منتظم را به دست آورید؟

$(10-2)\times 180 = 8\times 180 = 1440$

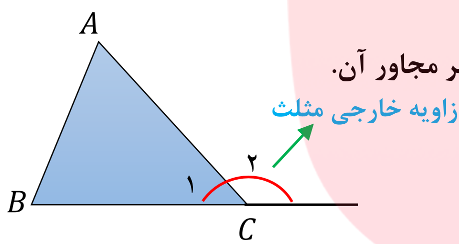
ب) اندازه ی یک زاویه ی داخلی ۱۵ ضلعی منتظم را به دست آورید؟

$\frac{(15-2)\times \cancel{180}^{\,12}}{\cancel{15}_{\,1}} = 13\times 12 = 156$

زاویه خارجی : اگر یکی از اضلاع چند ضلعی محدب را در همان راستا امتداد دهیم در بیرون از چند ضلعی زاویه ای تشکیل می شود که به آن زاویه خارجی چند ضلعی می گویند.

نکته : در هر مثلث اندازه ی زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن.

به طور مثال :



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1+\hat{C}_2 = 180 \text{ درجه} \\ \hat{C}_2 = \hat{A}+\hat{B} \end{cases}$$

نکته : مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی ۳۶۰ درجه است.

نکته : اندازه ی یک زاویه خارجی چند ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{360}{n}$ حاصل می شود.

مثال : اندازه ی یک زاویه داخلی و خارجی ۱۲ ضلعی منتظم را به دست آورید؟ (اندازه زاویه داخلی و خارجی مکمل اند)

اندازه زاویه داخلی $180-30=150$ اندازه زاویه خارجی $\frac{360}{12}=30$

نکته : چند ضلعی منتظمی برای کاشی کاری مناسب است که عدد ۳۶۰ بر اندازه ی یک زاویه داخلی آن چند ضلعی بخش پذیر باشد.

مثال : کدام یک از چند ضلعی های زیر برای کاشی کاری مناسب است؟

الف) ۸ ضلعی منتظم   مناسب نیست $360 \div 135 \simeq 2/6$

یک زاویه ی داخلی ۸ ضلعی منتظم

ب) ۶ ضلعی منتظم   مناسب است $360 \div 120 = 3$

یک زاویه ی داخلی ۶ ضلعی منتظم

نکته : برای به دست آوردن تعداد قطرهای چند ضلعی از رابطه ی $\frac{n(n-3)}{2}$ استفاده می کنیم.

مثال : ۷ ضلعی دارای چند قطر است؟

$\frac{7(7-3)}{2} = \frac{7\times 4}{2} = 14$

جبر و معادله

یک جمله ای جبری : عبارت جبری که از دو قسمت عدد (ضریب) و متغیر تشکیل شده باشد.

مانند : $۵xy$ $\qquad$ $\frac{a}{۳}$

چند جمله ای جبری : اگر بین عبارت های جبری علامت جمع و تفریق باشد تشکیل چند جمله ای می دهد.

مانند : $a - b + ۷$ (دارای سه جمله) $\qquad$ $x + ۲y$ (دارای دو جمله)

عبارت جبری متشابه : عبارتی که متغیر های آن (حروف انگلیسی) و توان متغیرها کاملا مثل هم باشند.

مانند : $(۵xy \,, -۴yx) \;,\; \left(۳a^۳b^۲ \,, \frac{۲}{۳}a^۳b^۲\right)$

عبارت جبری نا متشابه : عبارتی که متغیرهای آن یا توان متغیرها شبیه هم نباشند.

مانند : $(۳bc \,, ۲b) \;,\; (-۴x^۲y \,, ۵xy^۲)$

ساده کردن عبارت های جبری : جملات متشابه را جدا کرده سپس مانند جمع و تفریق اعداد صحیح آن ها را جواب داده با این تفاوت که حروف کنار اعداد نوشته می شود.

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$\underline{a^۲b} - ۴\underline{ab} + ۵\underline{ab} + ۲\underline{a^۲b} - ۴\underline{ab} = ۳a^۲b - ۳ab$$

$$-۴\underline{x} + ۲y + ۱۰\underline{x} = ۶x + ۲y$$

ضرب دو جمله ای : در ضرب دو جمله ای ضریب ها در هم و متغیرها در هم ضرب می شوند.

مانند : $۶ab\left(\frac{۲}{۳}c\right) = ۴abc$ $\qquad$ $۵x(-۲x) = -۱۰x^۲$

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای : یک جمله ای در تمام جملات چند جمله ای ضرب می شود.

مانند : $-۶a(۳a + b) = -۱۸a^۲ - ۶ab$

ضرب چند جمله ای در چند جمله ای : جملات پرانتز اول در تمام جملات پرانتز دوم ضرب می شود. سپس عبارت را ساده می کنیم.

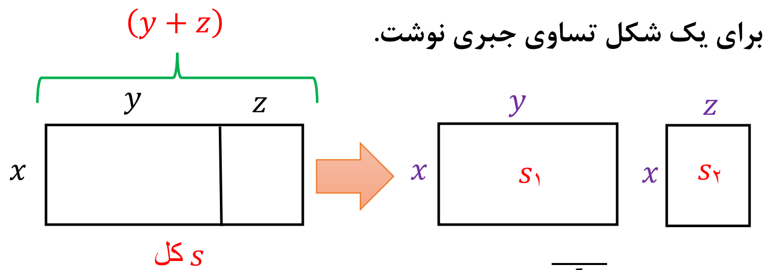
مانند : $(۲x - y)(x + ۳y) = ۲x^۲ + ۶xy - xy - ۳y^۲ = ۲x^۲ + ۵xy - ۳y^۲$

نکته : اگر یک چند جمله ای داخل پرانتز و به توان ۲ باشد آن عبارت را به صورت ضرب دو پرانتز می نویسیم.

مانند : $(a + b)^۲ = (a + b)(a + b) = a^۲ + ab + ab + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$

جبر و معادله

نکته : با توجه به مساوی بودن مساحت در دو شکل می توان برای یک شکل تساوی جبری نوشت.



مثال : با توجه به شکل یک تساوی جبری بنویسید.

s کل $= s_1 + s_2 \Rightarrow x(y+z) = xy + xz$

نکته : یک عدد دو رقمی را به صورت $\overline{ab}$ و یک عدد سه رقمی را به صورت $\overline{abc}$ نشان می دهیم.

نکته : مقلوب عدد $\overline{ab}$ را به صورت $\overline{ba}$ نشان می دهیم. مثلا مقلوب عدد ۳۷ برابر با ۷۳ می شود.

نکته : مجموع هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۱۱ می باشد :

$$\overline{ab} + \overline{ba} = ۱۰a + b + ۱۰b + a = ۱۱a + ۱۱b = ۱۱(a+b)$$

نکته : اختلاف هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۹ می باشد :

$$\overline{ab} - \overline{ba} = ۱۰a + b - ۱۰b - a = ۹a - ۹b = ۹(a-b)$$

مقدار عددی عبارت جبری : به جای متغیرها اعداد داده شده را قرار می دهیم سپس با توجه به ترتیب انجام عملیات (اولویت) عبارت را جواب می دهیم.

مثال : مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $۵x - ۲xy + ۷ \quad (x = ۱ \ , \ y = -۲)$
$۵(۱) - ۲(۱)(-۲) + ۷ = ۵ + ۴ + ۷ = ۱۶$

ب) $a^۲ + b^۲ - ۴ab \quad (a = -۲ \ , \ y = ۲)$
$(-۲)^۲ + ۲^۲ - ۴(-۲)(۲) = ۴ + ۴ + ۱۶ = ۲۴$

تجزیه عبارت جبری : (تبدیل به ضرب یا فاکتورگیری) مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱- ابتدا (ب.م.م) ضرایب را به دست می آوریم.

۲- حروف مشترک با توان کمتر را کنار (ب.م.م) ضرایب می نویسیم.

۳- تمام جملات عبارت را بر جمله ی مشترک تقسیم کرده و داخل پرانتز می نویسیم.

مثال : عبارت های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

(ب.م.م) ضرایب
$۱۰ab + ۱۵a = ۵a(۲b + ۳)$

عامل مشترک
$xyz - xz = xz(y - ۱)$

$$\frac{x^۲y + xy^۲}{x^۳y^۲ + x^۲y^۳} = \frac{\cancel{xy}\cancel{(x+y)}}{\cancel{x^۲y^۲}\cancel{(x+y)}} = \frac{۱}{xy}$$
xy

جبر و معادله

معادله : معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از اعداد به یک تساوی درست تبدیل می شود.

نکته : برای حل معادله مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) مجهول ها را به طرف چپ و عددهای معلوم را به طرف راست انتقال می دهیم. (عددی که انتقال داده شود علامت آن عوض می شود)

۲) عددهای مجهول با هم و عددهای معلوم را با هم جواب می دهیم.

۳) حاصل عددهای معلوم را بر حاصل عددهای مجهول تقسیم می کنیم.

مثال : معادله های زیر را جواب دهید.

$$۴(x-۲)=۲x$$
$$۴x-۸=۲x$$
$$\cancel{۴x}-\overset{۲x}{\cancel{۲x}}=۸$$
$$x=\frac{۸}{۲}=۴ \Rightarrow x=۴$$

$$-۶+x=۲x+۵$$
$$\overset{-x}{\cancel{x-۲x}}=\overset{۱۱}{\cancel{۵+۶}}$$
$$x=\frac{۱۱}{-۱}=-۱۱$$
$$x=-۱۱$$

$$۲x+۳=-۷$$
$$۲x=\overset{-۱۰}{\cancel{-۷-۳}}$$
$$x=\frac{-۱۰}{۲}=-۵$$
$$x=-۵$$

نکته : در معادلات کسری دو طرف معادله را در (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرده تا تبدیل به معادله معمولی شود.

$$-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{۶} \Rightarrow ۱۲\times\left(-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۴}\right)=\left(\frac{۵}{۶}\right)\times ۱۲ \Rightarrow -۶x+۹=۱۰ \Rightarrow -۶x=۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۶}$$

(ک.م.م) مخرج ها $[۲,۴,۶]=۱۲$

نکته : سه عدد متوالی را به صورت $(x, x+۱, x+۲)$ و سه عدد فرد یا زوج متوالی را به صورت $(x, x+۲, x+۴)$ نمایش می دهیم.

مثال : مجموع سه عدد زوج متوالی ۶۰ شده است. عدد بزرگتر چند است؟

$$x+(x+۲)+(x+۴)=۶۰ \Rightarrow ۳x+۶=۶۰ \Rightarrow ۳x=۵۴ \Rightarrow x=۱۸ \Rightarrow \{۱۸, ۲۰, ۲۲\}$$

مثال : به پنج برابر عددی هشت واحد اضافه کرده ایم حاصل از قرینه دو برابرآن عدد شش واحد کمتر است آن عدد چند است؟

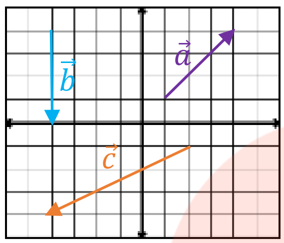
$$۵x+۸=-۲x-۶ \Rightarrow ۵x+۲x=-۶-۸ \Rightarrow ۷x=-۱۴ \Rightarrow \boxed{x=-۲}$$ آن عدد

بردار و مختصات

بردار : خط راست جهت داری است. برای نام گذاری بردار از دو حرف بزرگ انگلیسی یا یک حرف کوچک انگلیسی استفاده می شود.

مختصات بردار : برای به دست آوردن مختصات یک بردار از ابتدا طول (جهت افقی) سپس عرض (جهت عمودی) را به‌دست می آوریم.

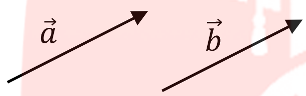
مثال : مختصات بردارهای زیر را بنویسید.



$\vec{c} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۳ \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$

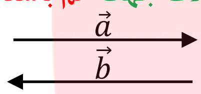
دو بردار مساوی (هم سنگ) : دو بردار در صورتی مساویند که : هم جهت و هم اندازه و موازی باشند.

مانند : $\vec{a} = \vec{b}$



دو بردار قرینه : دو بردار در صورتی قرینه هم هستند که : هم اندازه و موازی ولی خلاف جهت هم باشند.

مانند :

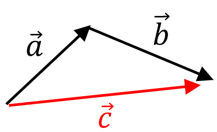


نکته : حاصل جمع هر بردار با قرینه اش برابر با بردار صفر است : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$

جمع بردارها (برآیند بردارها) : برای جمع دو بردار از دو روش استفاده می شود :

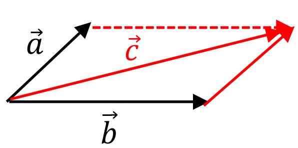
۱) روش مثلثی : اگر دو بردار پشت سر هم باشند از این روش استفاده می شود و در این روش برای برآیند بردارها از ابتدا بردار اولی به انتها بردار دومی رسم می شود.

مانند : تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



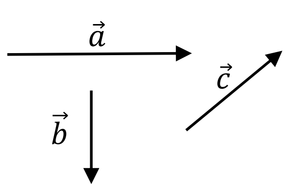
۲) روش متوازی الاضلاع : اگر دو بردار پشت سر هم نباشند از انتهای یکی از دو بردار مساوی بردار بعدی رسم کرده تا دو بردار پشت سرهم شوند و در آخر از ابتدا دو بردار به انتهای بردار جدید رسم می کنیم.

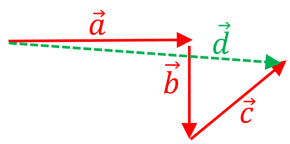
مانند : تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

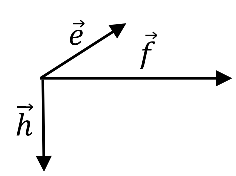


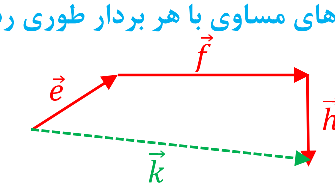
مثال : حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

(بردارهای مساوی با هر بردار طوری رسم می کنیم که بردارها پشت سرهم باشند) :







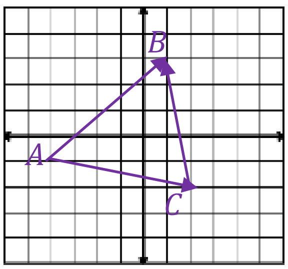


تساوی جبری : $\vec{e} + \vec{f} + \vec{h} = \vec{k}$

تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

بردار و مختصات

مثال : برای شکل زیر یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



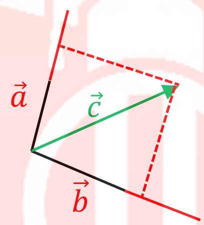
(در شکل دو بردار را طوری مشخص می کنیم که پشت سر هم باشند)

جمع برداری : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

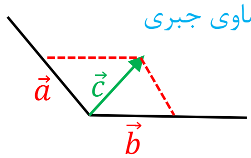
جمع مختصاتی : $\begin{bmatrix}۶\\-۱\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۱\\۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$

تجزیه بردارها : اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم از انتها آن بردار به موازات دو محور رسم کرده هر جا محور یا امتداد محور را قطع کرد انتهای دو بردار به دست می آید.

مثال : بردار $\vec{C}$ را در امتداد های رسم شده تجزیه کنید.



تساوی جبری : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$



تساوی جبری : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$

ضرب عدد در بردار : در ضرب عدد در بردار آن عدد هم در طول و هم در عرض ضرب می شود : $k\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$

مثال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۲\begin{bmatrix}۴\\-۱\end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix}۱\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸\\-۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-۳\\۱۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۱۰\end{bmatrix}$$

$$-۵\begin{bmatrix}۳\\۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱۵\\-۱۰\end{bmatrix}$$

مثال : اگر $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c}=۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

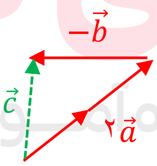
$$\vec{c}=۳\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\۹\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱\\-۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷\\۵\end{bmatrix}$$

مثال : بردار خواسته شده را رسم کنید.

$۲\vec{a}$ در همان جهت $\vec{a}$(۲ برابر بردار

$-\vec{b}$ درخلاف جهت $\vec{b}$(۱ برابر بردار

$\vec{c}=۲\vec{a}-\vec{b}$



معادله مختصاتی : برای حل معادلات مختصاتی همانند معادلات معمولی عمل می کنیم :

۱) مجهول ها در سمت چپ و مختصات ها را به سمت راست منتقل می کنیم.

۲) حاصل مجهول ها و مختصات ها را به دست می آوریم.

۳) طول و عرض مختصات را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

نکته : در حل معادله مختصاتی عدد های معلوم یا مجهول از یک طرف تساوی به طرف دیگر منتقل شود علامت آن ها قرینه می شود.

بردار و مختصات

مثال : معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix} - ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow -۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} ۸ \div -۲ \\ ۴ \div -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$۵\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \div ۵ \\ ۱۰ \div ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + ۲x \Rightarrow \cancelto{\vec{x}}{۳\vec{x} - ۲\vec{x}} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

بردارهای واحد مختصات : به دو بردار $\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (واحد طول) و $\vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ (واحد عرض) بردارهای واحد مختصات می گویند.

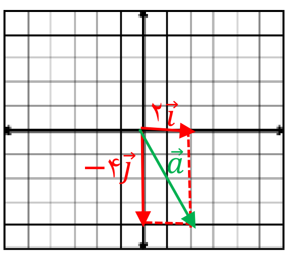
نکته : برای تبدیل یک بردار به برادر واحد مختصات کافی است عدد طول مختصات را ضریب $\vec{i}$ و عدد عرض مختصات را ضریب $\vec{j}$ قرار دهیم.

مثال : بردارهای زیر را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۴\vec{i} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix} = -۵\vec{j} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = -۳\vec{i} + ۲\vec{j}$$

مثال : مختصات بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j}$ را نوشته سپس بردار $\vec{a}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\vec{a} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix}$$



مثال : اگر $\vec{a} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c} = \vec{a} - ۳\vec{b}$ را بنویسید.

$$\vec{a} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - ۳\vec{b} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۸ \end{bmatrix}$$

مثال : معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$۲\vec{x} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۳\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} ۱ \div ۲ \\ ۲ \div ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

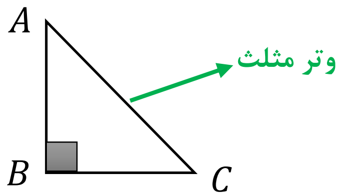
$$\vec{x} + ۳\vec{i} = ۲\vec{x} - ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \cancelto{-\vec{x}}{\vec{x} - ۲\vec{x}} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۶ \div -۱ \\ ۶ \div -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

درسنامه و نکات کلیدی **(فصل ششم)** **سال هشتم**

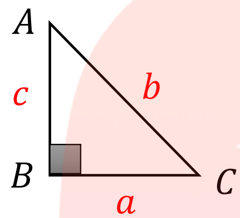
مثلث

مثلث قائم الزاویه : مثلثی است که دو ضلع آن بر هم عمود باشند. ضلع روبه رو به زاویه ۹۰ درجه وتر نام دارد.

نکته : وتر مثلث قائم الزاویه بزرگترین ضلع مثلث است.



رابطه فیثاغورس : این رابطه فقط در مثلث قائم الزاویه نوشته می شود :

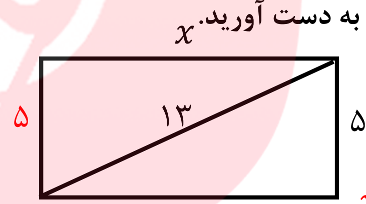


کلامی : $\left(\text{ضلع دیگر}\right)^{۲} + \left(\text{یک ضلع}\right)^{۲} = \left(\text{وتر}\right)^{۲}$

جبری : $b^{۲} = a^{۲} + c^{۲}$

نکته : اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد. آن مثلث قائم الزاویه است. (عکس رابطه فیثاغورس)

مثال : در هر شکل مقدار x را به دست آورید.

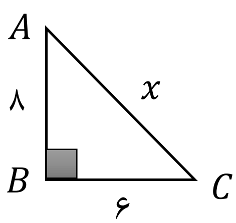


$۱۳^{۲} = x^{۲} + ۵^{۲}$

$۱۶۹ = x^{۲} + ۲۵$

$x^{۲} = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴$

$x = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$



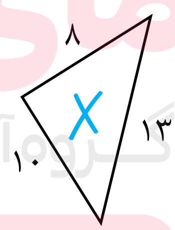
$b^{۲} = a^{۲} + c^{۲}$

$x^{۲} = ۶^{۲} + ۸^{۲}$

$x^{۲} = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$

$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

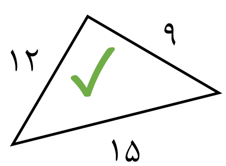
مثال : کدام یک از مثلث های زیر قائم الزاویه است؟ چرا؟



$۱۳^{۲} = ۱۰^{۲} + ۸^{۲}$

$۱۶۹ = ۱۰۰ + ۶۴$

$۱۶۹ \neq ۱۶۴$



$۱۵^{۲} = ۱۲^{۲} + ۹^{۲}$

$۲۲۵ = ۱۴۴ + ۸۱$

$۲۲۵ = ۲۲۵$

اعداد فیثاغورسی : اعدادی هستند که مربع ضلع بزرگتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشند.

نکته : بعضی از اعداد فیثاغورسی پرکاربرد عبارتند از :

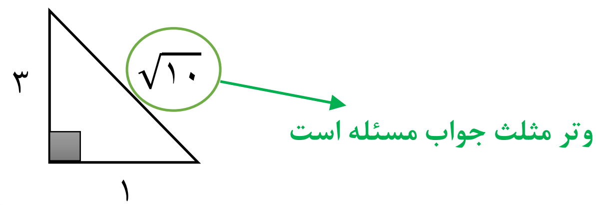
(۳ , ۴ , ۵) , (۶ , ۸ , ۱۰) , (۵ , ۱۲ , ۱۳) , (۹ , ۱۲ , ۱۵) , (۱۵ , ۲۰ , ۲۵)

رسم پاره خط به طول $\sqrt{a}$: ابتدا دو عدد مشخص کرده که مجموع مربعات آن دو عدد زیر رادیکال شود. سپس مثلث قائم الزاویه با این اضلاع رسم کرده وتر مثلث به اندازه ی همان عدد خواسته شده است.

مثلث

مثال : پاره خطی به طول $\sqrt{۱۰}$ رسم کنید. ابتدا دو عدد پیدا کرده که مجموع مربعات آن دو عدد ۱۰ شود :

$$3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

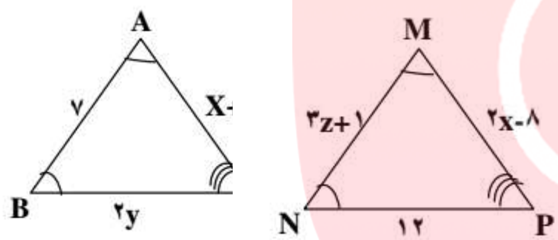


شکل های همنهشت : اگر دو شکل را با یک یا چند تبدیل (انتقال و تقارن و دوران) بر یکدیگر منطبق کنیم. به طوری که کاملا یکدیگر بپوشانند آن دو شکل همنهشت هستند.

نکته : در دو شکل همنهشت اجزای متناظر دو مثلث (ظلع ها و زاویه ها) برابرند.

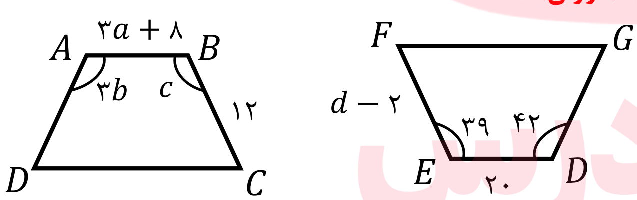
مثال : دو مثلث زیر همنهشت هستند. نوع تبدیل و مقدار x و y و z را به دست آورید. نوع تبدیل : انتقال

$\overline{AB} = \overline{MN}$	$\overline{AC} = \overline{MP}$	$\overline{BC} = \overline{NP}$
$3z + 1 = 7$	$x + 1 = 2x - 8$	$2y = 12$
$z = 2$	$x = 9$	$y = 6$



مثال : دو شکل زیر همنهشت هستند. الف) نوع تبدیل را بنویسید. (دوران)

ب) مقادیر مجهول را به دست آورید.



$\hat{B} = \hat{E}$	$\hat{A} = \hat{D}$	$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\overline{AB} = \overline{ED}$
$C = 39$	$3b = 42$	$d - 2 = 12$	$3a + 8 = 20$
	$b = 14$	$d = 14$	$a = 4$

حالت های همنهشتی دو مثلث : دو مثلث دلخواه در سه حالت با یکدیگر همنهشت هستند :

۱) دو ضلع و زاویه بین برابر (ض زض) ۲) دو زاویه و ضلع بین برابر (زض ز) ۳) سه ضلع برابر (ض ض ض)

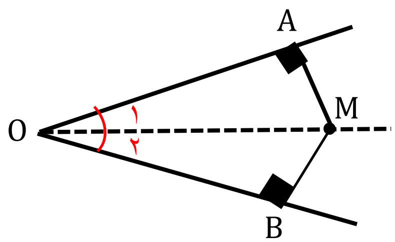
حالت های همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه : دو مثلث قائم الزاویه در دو حالت با یکدیگر همنهشت هستند :

۱) وتر و یک ضلع (وض) ۲) وتر و یک زاویه تند (وز)

نکته : دو مثلث با سه زاویه برابر (ززز) همنهشت نیستند.

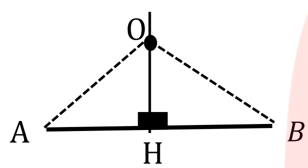
مثلث

نکته : هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \ (\text{نیمساز } OM) \\ \hat{A} = \hat{B} = 90 \ \text{درجه} \\ OM = OM = \text{ضلع مشترک}\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{وز})}{\triangle OAM \cong \triangle OBM} \Rightarrow \underset{(\text{اجزای متناظر})}{MA = MB}$$

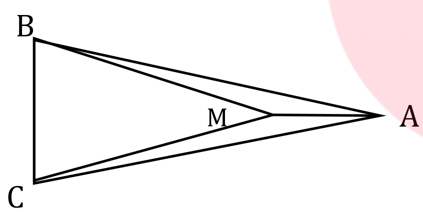
نکته : هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک اندازه است.



$$\left.\begin{array}{l}AH = HB \ (\text{عمود منصف } OH) \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \ \text{درجه} \\ OH = OH = \text{ضلع مشترک}\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ز ض})}{\triangle AHO \cong \triangle BHO} \Rightarrow \underset{(\text{اجزای متناظر})}{OA = OB}$$

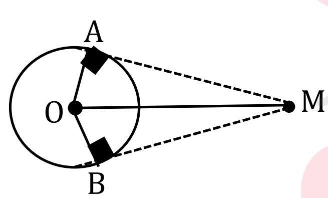
مثال : در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMC و AMB را بنویسید.

(جاهای خالی را کامل کنید)



$$\left.\begin{array}{l}AB = AC \\ MB = MC \\ AM = AM\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{ض ض ض})}{\triangle AMB \cong \triangle AMC}$$

مثال : نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.



$$\left.\begin{array}{l}OA = OB \ \text{شعاع دایره} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90 \ \text{درجه} \\ OM = OM = \text{ضلع مشترک}\end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{و ض})}{\triangle MAO \cong \triangle MBO} \Rightarrow \underset{(\text{اجزای متناظر})}{MA = MB}$$

توان و جذر

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^{۷} \times ۴^{۳} = ۴^{۱۰}$ $\qquad$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^{۷} \times ۳^{۷} = ۳۶^{۷}$ $\qquad$ $a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند : $\frac{۹^{۵}}{۹^{۳}} = ۹^{۲}$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند : $۲۰^{۸} \div ۴^{۸} = ۵^{۸}$ $\qquad$ $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند : $۹^{۲} \div ۲۷ = \overset{۳^{۴}}{\cancel{(۳^{۲})^{۲}}} \div ۳^{۳} = ۳$ تجزیه $\qquad$ $۴^{۸} \times ۲^{۳} = \overset{۲^{۱۶}}{\cancel{(۲^{۲})^{۸}}} \times ۲^{۳} = ۲^{۱۹}$ تجزیه

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند : $۹^{۵} + ۹^{۵} + ۹^{۵} = ۳ \times ۹^{۵} = ۳ \times \overset{۳^{۱۰}}{\cancel{(۳^{۲})^{۵}}} = ۳^{۱۱}$ تجزیه $\qquad$ $۲^{۶} + ۲^{۶} = ۲ \times ۲^{۶} = ۲^{۷}$

نکته : عدد منفی داخل پرانتز باشد علامت منفی به تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد منفی به تعداد توان ضرب نمی شود.

مانند : $-۴^{۲} = -(۴ \times ۴) = -۱۶$ $\qquad$ $(-۴)^{۲} = -۴ \times -۴ = ۱۶$

نکته : عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی می شود.

مانند : $(-۳)^{۳} = -۲۷$ توان فرد $\qquad$ $(-۳)^{۴} = ۸۱$ توان زوج

نکته : اگر عدد توان دار داخل پرانتز باشد و توان دیگر داشته باشد پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می شود.

مانند : $((۲^{۲})^{۳})^{۴} = ۲^{۲۴}$ $\qquad$ $(۳^{۲})^{۲} = ۳^{۴}$

نکته : اگر عدد توان دار بدون پرانتز نباشد و توان دیگر داشته باشد پایه را نوشته و عبارت بالا را جواب می دهیم.

مانند : $۲^{۳^{۲}} = ۲^{۹}$ $\qquad$ $۳^{۲} = ۹$

توان و جذر

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$3^4 \times 3^2 \div \underset{\text{تجزیه}}{27} = 3^6 \div 3^3 = 3^3$$

$$4^7 \times 2^3 \times (0/5)^7 = 2^7 \times 2^3 = 2^{10}$$

$$\frac{4^7 \times 3^8}{3^3 \times 4^2} = \frac{4^7}{4^2} \times \frac{3^8}{3^3} = 4^5 \times 3^5 = 12^5$$

$$\frac{20^6}{5^2 \times 4^6} = \frac{5^6}{5^2} = 5^4$$

مثال : اگر $3^a = 5$ باشد حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$27^a = (3^3)^a = (3^a)^3 = 5^3 = 125$$

$$3^{a+2} = 3^a \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$$

$$9^{2a} = (3^2)^{2a} = (3^a)^4 = 5^4 = 625$$

$$3^{a-3} = 3^a \div 3^3 = 5 \div 27 = \frac{5}{27}$$

نکته : برای مقایسه اعداد توان باید پایه یا توان اعداد را برابر کنیم.

مثال : اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$4 , 2^{3^2} , 2^3 , 8^4 , (2^3)^2 \Longrightarrow 2^2 , 2^9 , 2^3 , 2^{12} , 2^6 \Longrightarrow 2^2 < 2^3 < 2^6 < 2^9 < 2^{12}$$

جذر یا ریشه دوم اعداد : در تساوی $\left[3^2 = 9 \;,\; (-3)^2 = 9\right]$ عدد ۹ را مجذور اعداد ۳ و ۳- می گویند. و اعداد ۳ و ۳- ریشه های دوم ۹ می گویند.

نکته : هر عدد دارای دو ریشه دوم است که یکی قرینه ی دیگری است.

مانند : ریشه های دوم عدد ۳۶ برابر است با : ۶ و ۶-

نکته : در جذر گیری فقط عدد مثبت آن در نظر گرفته می شود و جذر را با رادیکال $(\sqrt{\;\;})$ نشان می دهند.

نکته : اعداد منفی جذر ندارند. چون مجذور هیچ عددی ؛ منفی نمی شود.

نکته : جذر اعداد صفر و یک برابر با خود آن اعداد است.

مثال : جذر اعداد زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{\frac{49 \times 25}{100}} = \frac{7 \times 5}{10} = \frac{7}{2}$$

$$\sqrt{0/25} = 0/5$$

$$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

توان و جذر

جذر تقریبی اعداد : برای به دست آوردن جذر تقریبی اعداد مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) ابتدا مشخص می کنیم عدد داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

۲) سپس عدد وسط دو عدد را مشخص کرده و مجذور آن را می نویسیم.

۳) سپس اگر مجذور عدد وسطی از عدد داده شده بیشتر بود ۴ عدد کمتر از عدد وسطی و اگر از عدد داده شده کمتر بود ۴ عدد بزرگتر از عدد وسطی را می نویسیم.

۴) داخل یک جدول مجذورهای ۴ عدد را نوشته سپس مجذور عددی که به عدد داده شده نزدیکتر بود همان جذر تقریبی عدد است.

نکته : برای این که بدانیم عدد داده شده بین کدام دو صحیح متوالی قرار دارد مجذور دو عددی را مشخص می کنیم که به عدد داده شده نزدیک باشد.

مثال : مشخص عدد $\sqrt{۳۲}$ و $\sqrt{۸۳}$ بین کدام دو عدد قرار دارد و به کدام عدد نزدیکتر است.

$\overset{۹}{\cancel{\sqrt{۸۱}}} < \sqrt{۸۳} < \overset{۱۰}{\cancel{\sqrt{۱۰۰}}}$ (بین ۹ و ۱۰ که به ۹ نزدیکتر است)

$\overset{۵}{\cancel{\sqrt{۲۵}}} < \sqrt{۳۲} < \overset{۶}{\cancel{\sqrt{۳۶}}}$ (بین ۵ و ۶ که به ۶ نزدیکتر است)

مثال : جذر تقریبی عدد ۴۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$۶ \rightarrow ۶/۵ \leftarrow ۷$

$\cancel{\sqrt{۳۶}} < \sqrt{۴۷} < \cancel{\sqrt{۴۹}}$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$(۶/۵)^۲ = ۴۲/۲۵$

مرحله ۳

$۴۲/۲۵ < ۴۷$

چون مجذور عدد وسط کمتر از عدد شده مجذور ۴ عدد بزرگتر از عدد وسط را می نویسیم

مرحله ۴

عدد	۶/۶	۶/۷	۶/۸	۶/۹
مجذور عدد	۴۳/۵۶	۴۴/۸۹	۴۶/۲۴	۴۷/۶۱

$\sqrt{۴۷} \simeq ۶/۸$

مثال : جذر تقریب عدد ۱۲۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$۱۱ \rightarrow ۱۱/۵ \leftarrow ۱۲$

$\cancel{\sqrt{۱۲۱}} < \sqrt{۱۲۷} < \cancel{\sqrt{۱۴۴}}$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$(۱۱/۵)^۲ = ۱۳۲/۲۵$

مرحله ۳

$۱۳۲/۲۵ > ۱۲۷$

چون مجذور عدد وسط بیشتر از عدد شده مجذور ۴ عدد کوچکتر از عدد وسط را می نویسیم

مرحله ۴

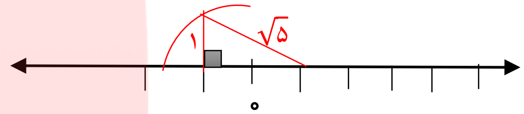
عدد	۱۱/۱	۱۱/۲	۱۱/۳	۱۱/۴
مجذور عدد	۱۲۳/۲۱	۱۲۵/۴۴	۱۲۷/۶۹	۱۲۹/۹۶

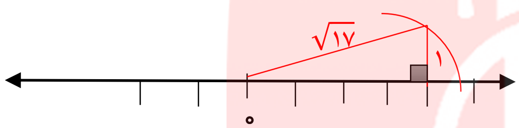
$$\sqrt{۱۲۷} \simeq ۱۱/۲$$

نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد : برای نمایش این اعداد چهار مورد زیر را باید مشخص کنیم :

۱) مبدا حرکت ۲) تعداد حرکت ۳) جهت حرکت تعداد مثلث

مثال : اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵}-۱$ را روی محور اعداد نمایش دهید.





خواص ضرب و تقسیم رادیکال ها : در ضرب و تقسیم رادیکال ها می توان رادیکال را جدا از هم نوشت.

مثال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}} = \frac{\sqrt{۲۵}}{\sqrt{۳۶}} = \frac{۵}{۶}$$

$$\sqrt{۹۰۰} = \sqrt{۹ \times ۱۰۰} = \overset{۳}{\cancel{\sqrt{۹}}} \times \overset{۱۰}{\cancel{\sqrt{۱۰۰}}} = ۳۰$$

نکته : در جمع و تفریق رادیکال ها نمی توان رادیکال را جدا از هم نوشت و جواب داد :

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} \qquad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

نکته : برای ساده کردن عدد زیر رادیکال می توان برای بعضی از اعداد یک ضرب نوشت به شرطی که یکی از دو عدد جذر دقیق داشته باشد.

مثال : اعداد زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در رادیکال بنویسید.

$$۳\sqrt{۴۸} = ۳\sqrt{۱۶ \times ۳} = ۱۲\sqrt{۳}$$

جذر ۴

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جذر ۲

آمار و احتمال

علم آمار : جمع آوری اطلاعات (داده ها) و بررسی آن ها را آمار می گویند.

داده آماری : اطلاعات عددی را داده آماری می گویند.

انواع نمودار :

۱) نمودار ستونی : برای مقایسه تعداد و مشخص کردن کمترین و بیشترین داده آماری استفاده می شود.

۲) نمودار خط شکسته : برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص کاربرد دارد.

۳) نمودار تصویری : برای مقایسه داده های تقریبی کاربرد دارد.

۴) نمودار دایره ای : برای نشان دادن نسبت داده ها به کل و سهم هر بخش کاربرد دارد.

دامنه تغییرات : اختلاف بیشترین و کمترین داده آماری را دامنه تغییرات می گویند.

مثال : دامنه تغییرات داده های زیر را مشخص کنید :

بیشترین کمترین

۱۰ , −۶ , ۲۷ , ۱۲ , −۱۱ , ۸ $\Rightarrow$ ۲۷ − (−۱۱) = ۲۷ + ۱۱ = ۳۸

میانگین داده : از تقسیم مجموع داده ها بر تعداد داده ها میانگین حاصل می شود.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} \Rightarrow \bar{X} = \frac{s}{n}$$

مثال : میانگین داده های زیر را به دست آورید :

$$-۴ , ۱۰ , ۱۳ , -۱۸ , ۸ , ۱۵ \quad \Rightarrow \bar{X} = \frac{s}{n} = \frac{-۴+۱۰+۱۳-۱۸+۸+۱۵}{۶} = \frac{۲۴}{۶} = ۴$$

مثال : الف) میانگین ۵ درس ۱۷/۵ شده است مجموع نرات چند است.

$$\bar{X} = \frac{s}{n} \Rightarrow ۱۷/۵ = \frac{s}{۵} \Rightarrow s = ۱۷/۵ \times ۵ = ۸۷/۵$$

ب) میانگین ۱۴ و مجموع نمرات ۱۶۸ شده است. تعداد درس ها چند است.

$$\bar{X} = \frac{s}{n} \Rightarrow ۱۴ = \frac{۱۶۸}{n} \Rightarrow n = \frac{۱۶۸}{۱۴} = ۱۲$$

آمار و احتمال

نکته : میانگین جدول فراوانی از رابطه ی زیر حاصل می شود :

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع ستون}\left(\text{مرکز} \times \text{فراوانی}\right)}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$$

جدول فراوانی : اگر تعداد داده های آماری زیاد باشد از جدول آماری استفاده می شود که شامل قسمت های زیر است :

۱) حدود دسته : از کمترین داده تا بیشترین داده تقسیم بندی می شود.

۲) فراوانی : به تعداد داده های هر دسته فراوانی می گویند.

۳) خط نشان : به تعداد فراوانی هر دسته خط می کشیم. (در دسته های ۵ تایی)

۴) مرکز (متوسط) دسته : دو عدد دسته جمع و حاصل را بر عدد ۲ تقسیم می کنیم.

۵) مرکز × فراوانی : اعداد مرکز و فراوانی هر دسته را در هم ضرب می کنیم.

مثال : نمرات ریاضی تعدادی از دانش آموزان به صورت زیر است :

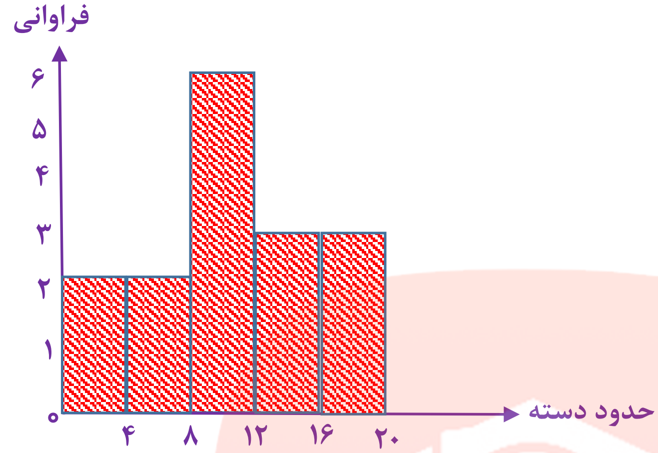
۹ , ۸ , ۶/۵ , ۱۳/۵ , ۱۷/۲۵ , ۱۹ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۰ , ۲/۷۵ , ۱۴/۲۵ , ۱۸/۵ , ۳/۵ , ۷/۲۵ , ۸ , ۱۴/۵

الف) جدول فراوانی داده شده را کامل کنید. و میانگین نمرات را با استفاده از جدول به دست آورید.

حدود دسته	فراوانی	خط نشان	مرکز دسته	فراوانی × مرکز
$۰ \leq x < ۴$	۲	//	$\frac{۰+۴}{۲} = ۲$	$۲ \times ۲ = ۴$
$۴ \leq x < ۸$	۲	//	$\frac{۴+۸}{۲} = ۶$	$۲ \times ۶ = ۱۲$
$۸ \leq x < ۱۲$	۶	~~////~~ /	$\frac{۸+۱۲}{۲} = ۱۰$	$۶ \times ۱۰ = ۶۰$
$۱۲ \leq x < ۱۶$	۳	///	$\frac{۱۲+۱۶}{۲} = ۱۴$	$۳ \times ۱۴ = ۴۲$
$۱۶ \leq x \leq ۲۰$	۳	///	$\frac{۱۶+۲۰}{۲} = ۱۸$	$۳ \times ۱۸ = ۵۴$
جمع	۱۶	ـــــ	ـــــ	۱۷۲

$$\text{میانگین} = \frac{۱۷۲}{۱۶} \simeq ۱۰/۷۵$$

ب) نمودار ستونی نمرات ریاضی را رسم کنید.



احتمال یا اندازه گیری شانس : احتمال رخ دادن هر اتفاق از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت ها}}$$

نکته : احتمالی که رخ دادن آن غیر ممکن باشد با عدد صفر نشان می دهند.

نکته : احتمال ممکن را با عدد کسری بین صفر تا یک نشان می دهند.

نکته : احتمال حتمی را با عدد یک نشان می دهند.

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید.
اعداد تاس = {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶} ⟸ کل حالت ها = ۶

الف) احتمال آمدن عدد زوج مضرب ۳ :
اعداد زوج مضرب ۳ = {۶} ⟸ حالت مطلوب = ۱ ⟸ احتمال = $\frac{۱}{۶}$

ب) احتمال آمدن اعداد کوچکتر مساوی ۴ :
اعداد کوچکتر مساوی ۴ = {۱ , ۲ , ۳ , ۴} ⟸ حالت مطلوب = ۴ ⟸ احتمال = $\frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

ج) احتمال آمدن اعداد اول :
اعداد اول = {۲ , ۳ , ۵} ⟸ حالت مطلوب = ۳ ⟸ احتمال = $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

مثال : در یک کیسه ۴ مهره قرمز ، ۲ مهره زرد و ۳ مهره سفید است. یک مهره را تصادفاً بیرون می آوریم :
کل حالت ها = ۴ + ۲ + ۳ = ۹

الف) احتمال بیرون آمدن مهره قرمز :
حالت مطلوب = ۴ ⟸ احتمال = $\frac{۴}{۹}$

ب) احتمال بیرون نیامدن مهره سفید :
حالت مطلوب = ۴ + ۲ = ۶ ⟸ احتمال = $\frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$

آمار و احتمال

نکته : مجموع احتمال ها در یک مسئله همواره عدد یک است. ۱ = احتمال رخ ندادن + احتمال رخ دادن

مثال : احتمال آمدن رنگ سبز در یک چرخنده $\frac{۳}{۱۰}$ است. احتمال نیامدن رنگ سبز چند است.

احتمال رخ ندادن = ۱ − احتمال رخ دادن ⟹ احتمال رخ ندادن = $۱ - \frac{۳}{۱۰} = \frac{۷}{۱۰}$

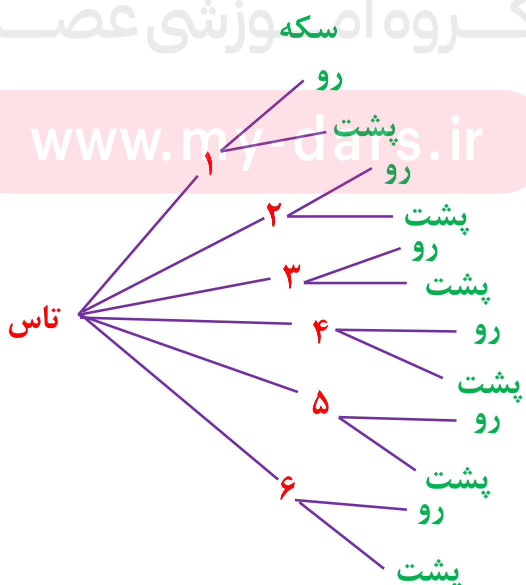
حالت های ممکن در یک پیشامد : برای به دست آوردن کل حالت ها می توان از جدول نظام دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال : یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. تمام حالت های ممکن را به روش جدول نظام دار و نمودار درختی به دست آورید.

(جدول نظام دار)

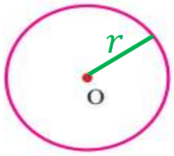
تاس / سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
رو	۱ – رو	۲ – رو	۳ – رو	۴ – رو	۵ – رو	۶– رو
پشت	۱ – پشت	۲ – پشت	۳ – پشت	۴ – پشت	۵ – پشت	۶ – پشت

(نمودار درختی)



دایره

دایره : به مجموعه نقاطی که از یک نقطه مشخص (مرکزدایره) ، به یک اندازه باشند.



نکته : دایره را اختصار به صورت $c(o\ ,r)$ نشان می دهند.

شعاع
دایره
مرکز

اجزای دایره :

۱) شعاع دایره : فاصله ی مرکز دایره تا محیط دایره را شعاع و با حرف $\left(R \text{ یا } r\right)$ نشان می دهند.

۲) کمان دایره : فاصله ی ایجاد شده روی محیط دایره را کمان و با دو حرف و سه حرف نشان می دهند.

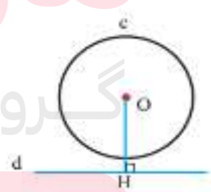
۳) وتر دایره : پاره خطی که دو نقطه ی روی محیط دایره را به هم وصل کند وتر و با دو حرف نشان می دهند.

۴) قطر دایره : پاره خطی است که دو نقطه ی روی محیط دایره را به هم وصل می کند و از مرکز دایره می گذرد. قطر را با دو حرف نشان می دهند.

نکته : بزرگترین وتر دایره ، قطر نام دارد. و قطر ۲ برابر شعاع است.

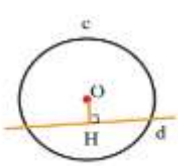
وضعیت خط و دایره : خط و دایره دارای سه وضعیت هستند :

۱) خط ممکن است بیرون از دایره باشد. در این حالت خط و دایره نقطه مشترک(برخورد) ندارند.



$r < \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

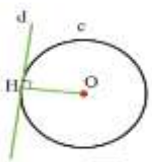
۲) خط ممکن است داخل دایره باشد. در این حالت خط و دایره دو مشترک(برخورد) دارند.



$r > \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

دایره

۳) خط ممکن است مماس (چسبیده) بر دایره باشد. در این حالت خط و دایره یک مشترک(برخورد) دارند.



$r = \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

نکته : شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است.

مثال : الف) شعاع دایره ۳ سانتی متر و فاصله ی مرکز تا خط ۵ سانتی متر است. خط و دایره چند نقطه ی مشترک دارند.

چون فاصله ی مرکز تا خط از شعاع دایره بیشتر است پس خط بیرون دایره قرار دارد و نقطه مشترکی ندارند.

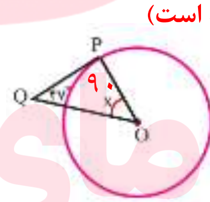
ب) قطر دایره ۶ سانتی متر و فاصله ی مرکز تا خط ۳ سانتی متر است. خط و دایره چند نقطه ی مشترک دارند.

قطر دو برابر شعاع دایره است پس شعاع دایره برابر با ۳ سانتی متر است. چون شعاع با فاصله ی مرکز تا خط برابر است پس خط و دایره یک نقطه ی مشترک دارند.

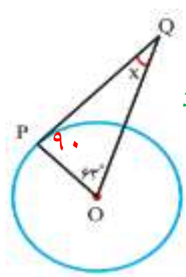
مثال : با توجه به هر شکل زاویه ی خواسته شده چند درجه است.

شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود یعنی زاویه ی ۹۰ درجه تشکیل می دهد)

مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است)

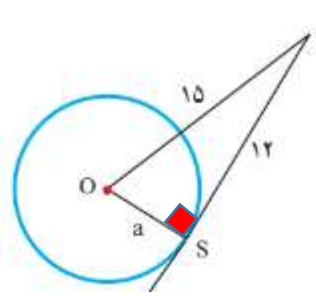


$\hat{x} = ۴۳^\circ$



$\hat{x} = ۲۷^\circ$

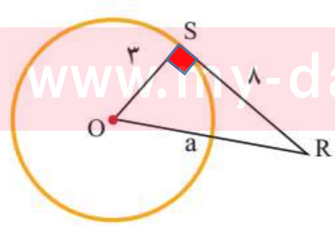
مثال : با توجه به هر شکل مقدار a را به دست آورید. (در مثلث قائم الزاویه برای اندازه ی ضلع مجهول از رابطه ی فیثاغورس استفاده می شود)



$a^۲ = ۱۵^۲ - ۱۲^۲$

$a^۲ = ۲۲۵ - ۱۴۴ = ۸۱$

$a = \sqrt{۸۱} = ۹$



$a^۲ = ۸^۲ + ۳^۲$

$a^۲ = ۶۴ + ۹ = ۷۳$

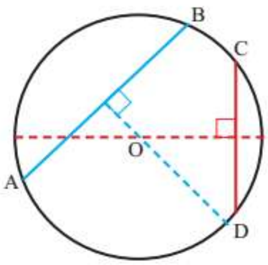
$a = \sqrt{۷۳}$

پیدا کردن مرکز دایره : ابتدا دو وتر غیر موازی رسم می کنیم. سپس عمودمنصف های آن دو وتر را رسم کرده که محل برخورد آن دو عمودمنصف مرکز دایره نام دارد.

دایره

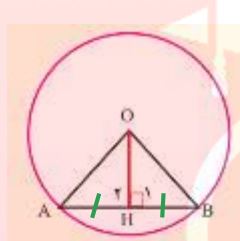
مثال : در یک دایره دلخواه مرکز دایره را با رسم دو وتر نشان دهید.

ابتدا دو وتر غیر موازی AB و CD را رسم می کنیم.

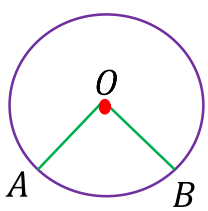


سپس عمود منصف آن دو را که با نقطه چین مشخص شده رسم می کنیم که محل برخورد دو عمودمنصف همان مرکز دایره است.

نکته : خطی که از مرکز بر وتر عمود باشد آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. و بر عکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره بگذرد ، بر وتر عمود است.



$AH = BH$



زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.

$\hat{O} = \widehat{AB}$

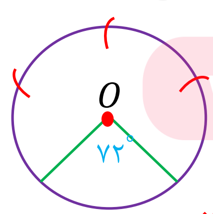
اندازه ی زاویه مرکزی : زاویه ی مرکزی برابر است با اندازه ی کمان روبه رو آن.

نکته : محیط دایره بر حسب درجه ۳۶۰ درجه است. و بر حسب سانتی متر ($2\pi r$ یا ۳/۱۴ × قطر) می باشد.

نکته : اگر دو کمان مساوی باشند وترهای نظیر آن دو کمان نیز برابرند و برعکس.

تقسیم دایره به کمان های مساوی : ابتدا یک شعاع دایره رسم می کنیم سپس محیط دایره (۳۶۰ درجه) را بر تعداد کمان های خواسته شده تقسیم کرده ، نقاله را منطبق بر شعاع گذاشته و زاویه مورد نظر را مشخص می کنیم و در آخر دهانه ی پرگار را به اندازه ی وتر ایجاد شده باز کرده روی یکی از نقاط ایجاد شده روی محیط دایره گذاشته و متوالیاً کمان می زنیم.

مثال : یک دایره رسم کنید و آن را به ۵ کمان مساوی تقسیم کنید.



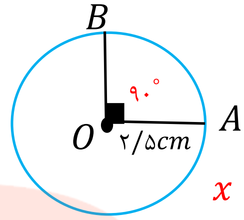
محاسبه طول یک کمان از دایره : برای محاسبه طول کمان از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه ی کمان}}{۳۶۰}$$

دایره

مثال : در هر شکل طول کمان AB چند سانتی متر است.

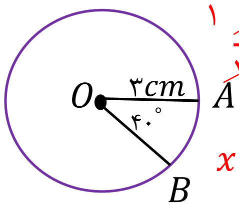
$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times ۳/۱۴ = ۵ \times ۳/۱۴ = ۱۵/۷$$



$$\frac{\cancel{۹۰}^{\,۱}}{\cancel{۳۶۰}_{\,۴}} = \frac{x}{۱۵/۷}$$

$$x = ۱۵/۷ \div ۴ \simeq ۴cm$$

$$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times ۳/۱۴ = ۶ \times ۳/۱۴ = ۱۸/۸۴$$



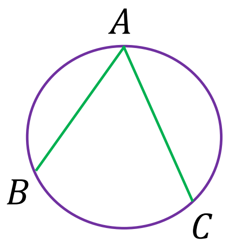
$$\frac{\cancel{۴۰}^{\,۱}}{\cancel{۳۶۰}_{\,۹}} = \frac{x}{۱۸/۸۴}$$

$$x = ۱۸/۸۴ \div ۹ \simeq ۲/۱۰cm$$

زاویه محاطی : زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن وتر دایره باشد.

اندازه ی زاویه محاطی : زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه ی کمان روبه رو آن.

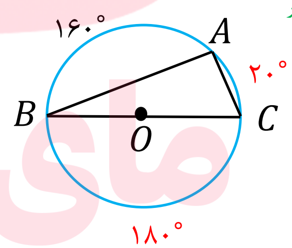
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



نکته : زاویه های محاطی روبه رو به یک کمان برابرند.

نکته : اندازه ی زاویه ی محاطی روبه رو به قطر دایره ، ۹۰ درجه است.

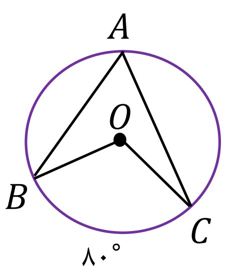
مثال : اندازه ی کمان و زاویه های خواسته شده را بنویسید.



زاویه محاطی روبه رو قطر

$\hat{A} = ۹۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{B} = ۱۰^\circ$

$\overset{\frown}{AC} = ۲۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{C} = ۸۰^\circ$



زاویه محاطی نصف کمان روبه رو

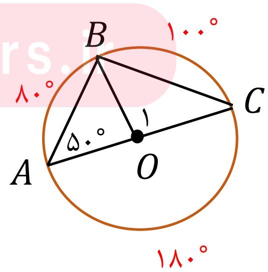
$$\hat{A} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

زاویه مرکزی برابر کمان روبه رو

$$\overset{\frown}{BOC} = ۸۰^\circ$$

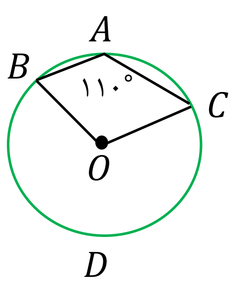
$$\overset{\frown}{BAC} = ۳۶۰^\circ - ۸۰^\circ = ۲۸۰^\circ$$

محیط دایره



$\overset{\frown}{BC} = ۱۰۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{C} = ۴۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB} = ۸۰^\circ$ $\qquad$ $\hat{O_۱} = ۱۰۰^\circ$



$$\overset{\frown}{BDC} = ۲۲۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{BAC} = ۳۶۰^\circ - ۲۲۰^\circ = ۱۴۰^\circ$$

$$\hat{O} = ۱۴۰^\circ$$