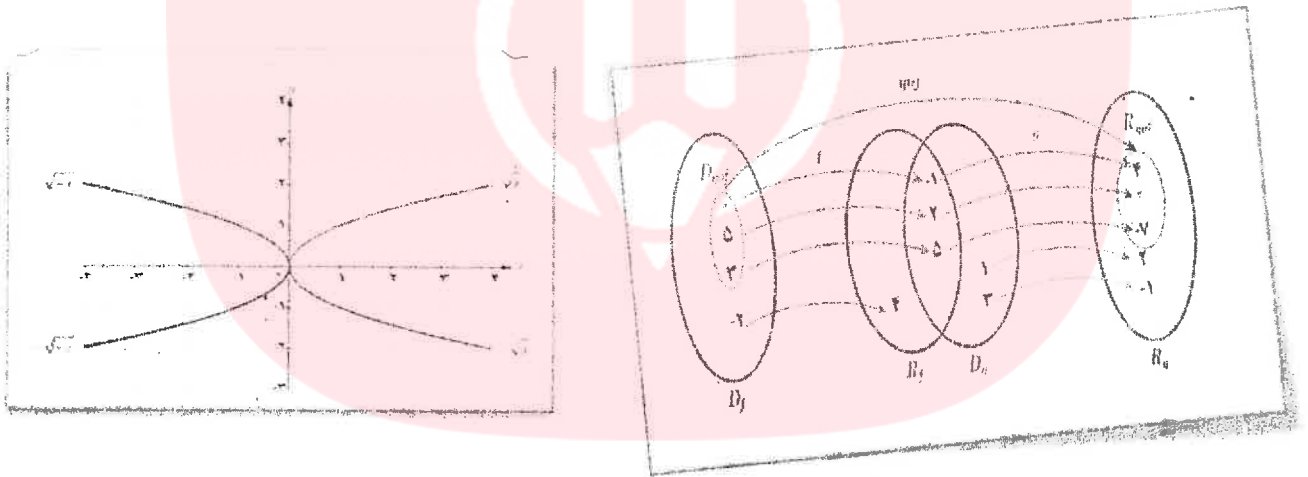


• فصل اول

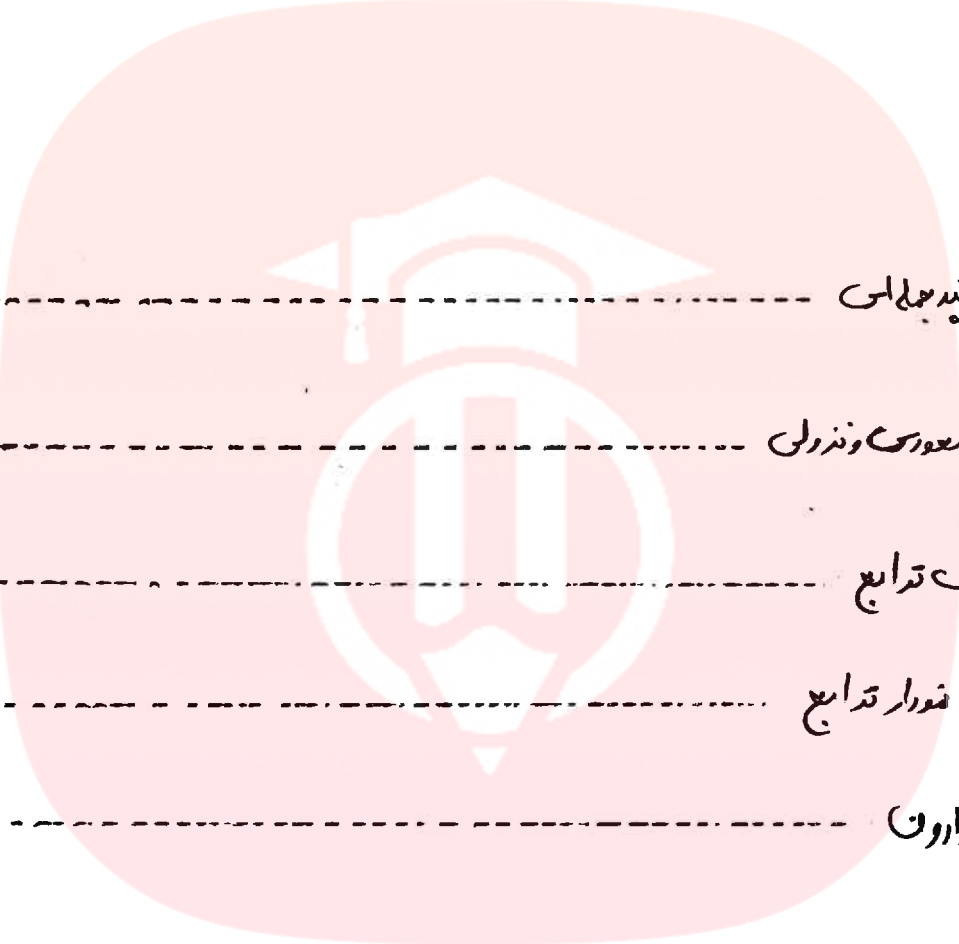
تایم



مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.maydars.ir

- 
- ۱) تابع چند جمله‌ای
- ۲) تابع صعودی و نزولی
- ۳) ترکیب تابع
- ۴) تبدیل نمودار تابع
- ۵) تابع وارون
- ۳
- ۱۳
- ۳۳
- ۵۳
- ۷۳

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین (۷): درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف: تابع $f(x) = 2x^3 - x^4 + 2$ یک تابع چندجمله‌ای درجه ۴ است.

ب: تابع $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - x$ یک تابع چندجمله‌ای درجه ۲ است.

پ: عبارت $f(x) = (x^2 - 3)(4x + 1)^3$ یک تابع چندجمله‌ای درجه ۵ است.

نکته: دامنه توابع چندجمله‌ای برابر \mathbb{R} است.

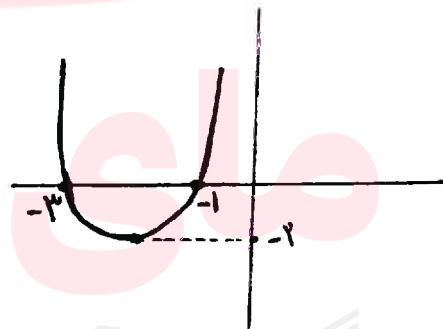
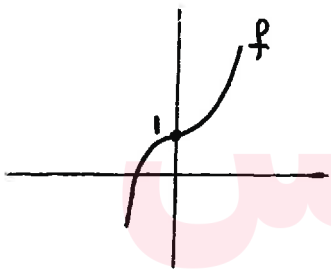
$$f(x) = 2x^3 - 2x + 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = 1 - 2x^3 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

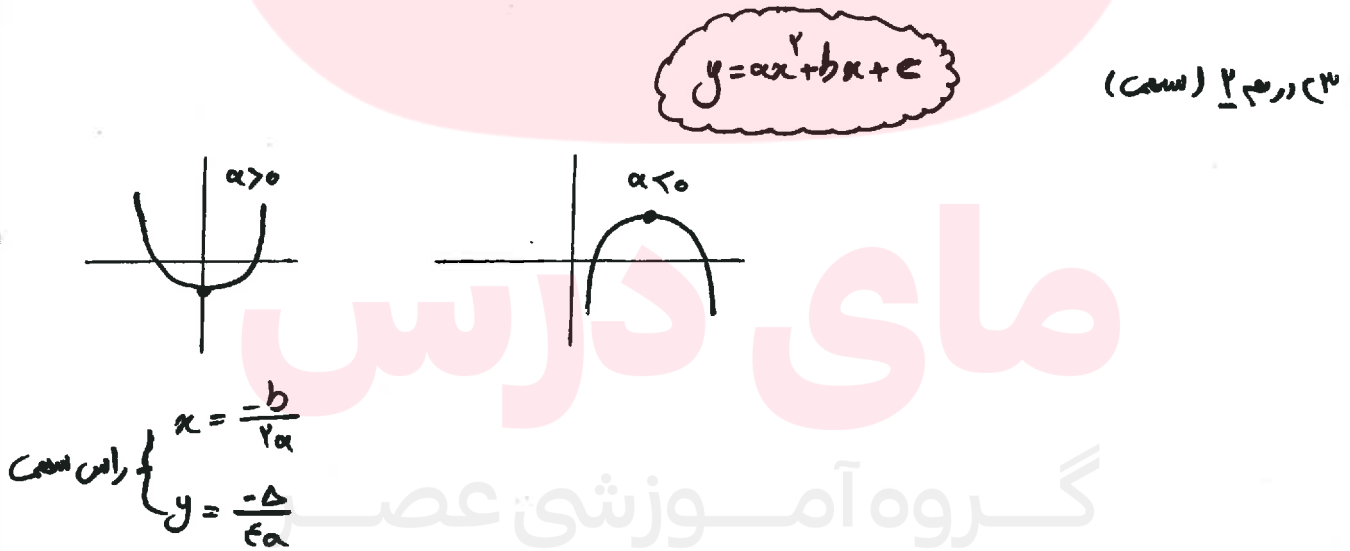
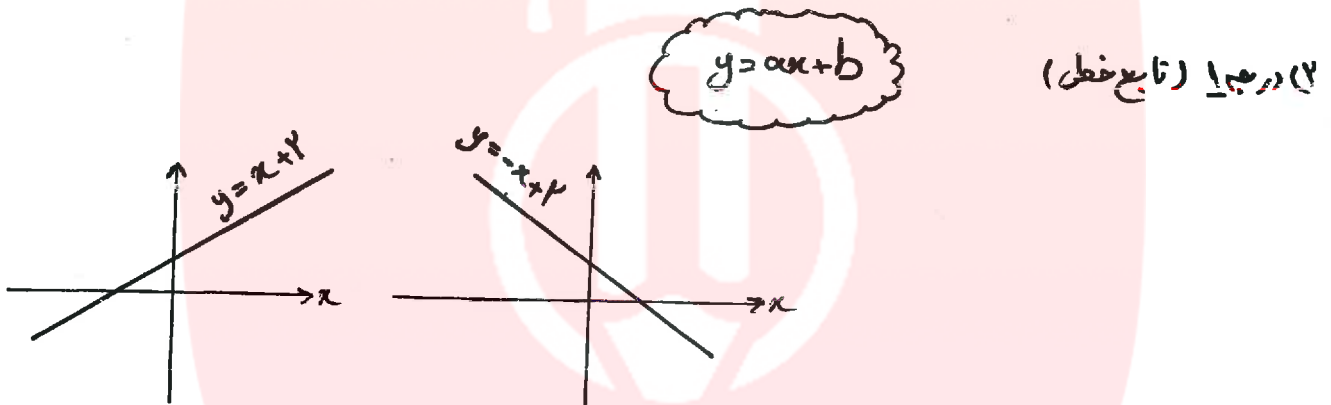
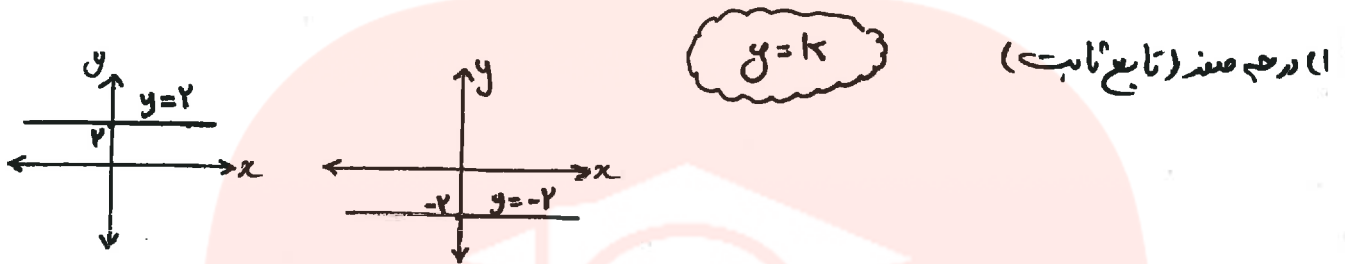
نکته: بهر توابع چندجمله‌ای درجه فرد برابر \mathbb{R} است و آن بهر توابع چندجمله‌ای زوج $(a, +\infty]$ یا $(-\infty, a]$ است.

$$f(x) = x^3 + 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad f_{\text{بر}} = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad f_{\text{بر}} = [-2, +\infty)$$



انواع تابع چندجمله‌ای:

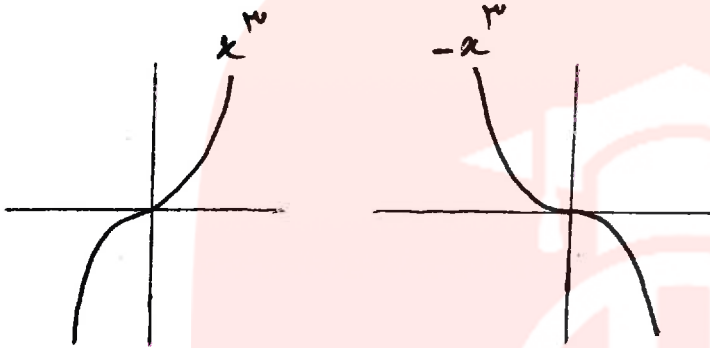


تابع درجه ۳ (تابع لرد):

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

فرد کلی تابع درجه ۳ صورت مقابل است ←

رابطه و برد هر دو برابر \mathbb{R} هستند.

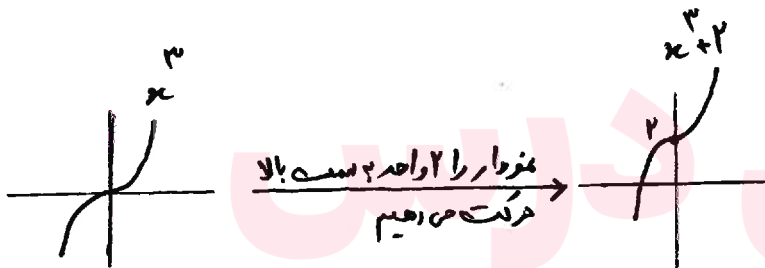


انتقال تابع $y = x^3$ و $y = -x^3$:

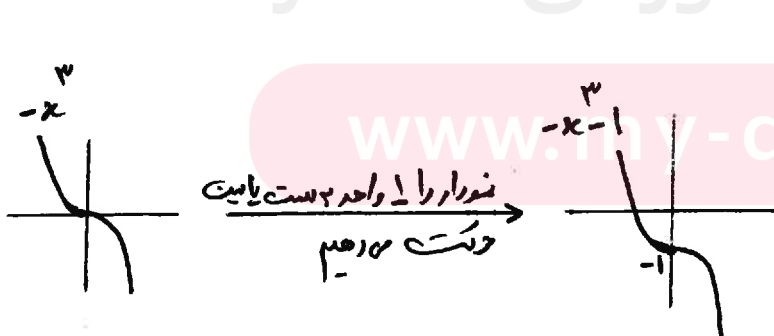
$$x^3 + k \leftarrow \text{تابع } x^3 \text{ با افزایش } k \text{ واحد بالایی دور}$$

۱) انتقال عمودی

$$x^3 - k \leftarrow \text{تابع } x^3 \text{ با افزایش } k \text{ واحد پایینی دور آید}$$



مثال ۱: نمودار تابع $y = x^3 + 2$ را رسم کنید



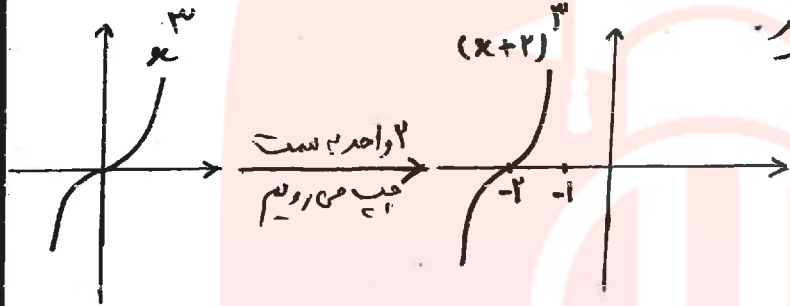
مثال ۲: نمودار تابع $y = -x^3 - 1$ را رسم کنید

www.my-dars.ir

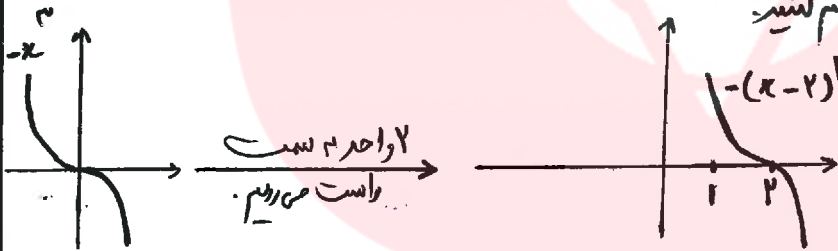
۲) انتقال افقی | $(x+k)^3$ ← نمودار x^3 با اندازه k واحد به سمت چپ حرکت می‌کند.
 $(x-k)^3$ ← نمودار x^3 با اندازه k واحد به سمت راست حرکت می‌کند.

توسکم هر چی بدعکس

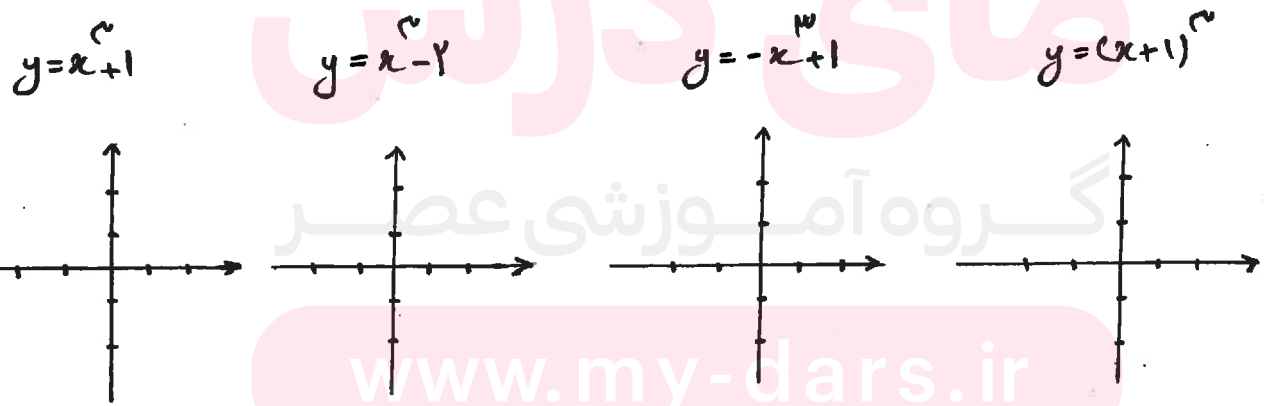
مثال ۱: نمودار تابع $y = (x+2)^3$ را رسم کنید.



مثال ۲: نمودار تابع $y = -(x-2)^3$ را رسم کنید.



تمرین ①: نمودار هر یک از توابع زیر را با استفاده از $y = x^3$ رسم کنید. در این ویدئو نظرات را مشخص کنید.

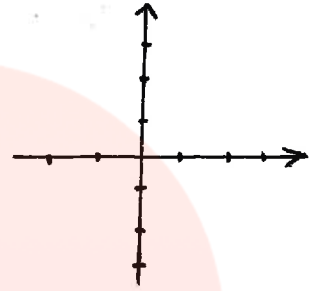
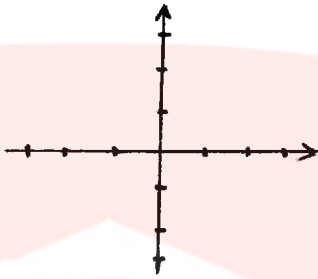
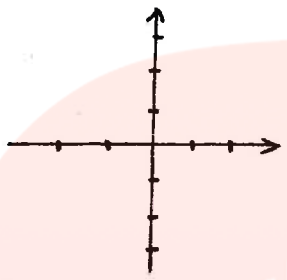
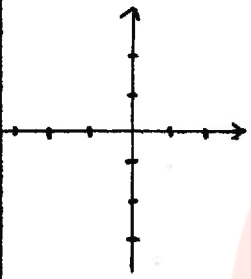


$$y = (x+2)^3$$

$$y = -(x-1)^3$$

$$y = -(x+3)^3$$

$$y = 2 - (x-1)^3$$

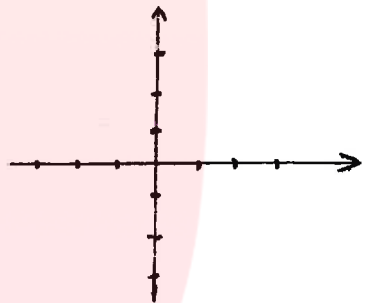
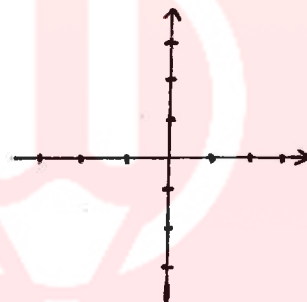
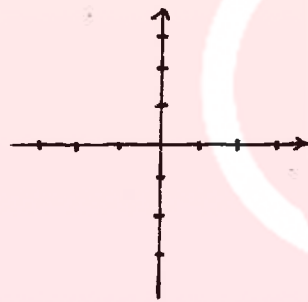
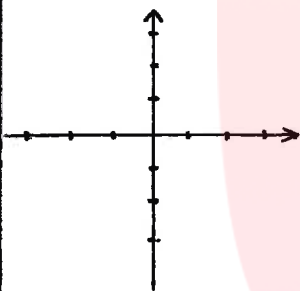


$$y = (x+2)^3 + 1$$

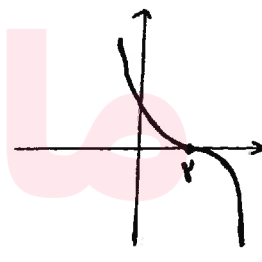
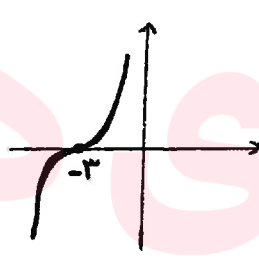
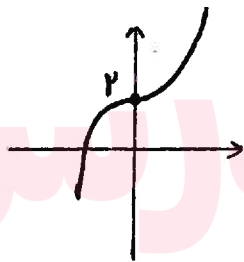
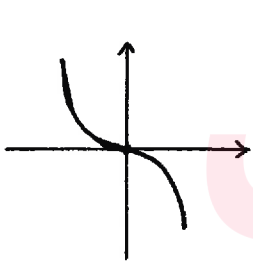
$$y = (x-1)^3 + 2$$

$$y = -1 - (x+1)^3$$

$$y = -(x+2)^3 - 1$$



تمرین ۲) اضایع مربوطه به حرکت از مقدار خاصی داده شده را بنویسید.

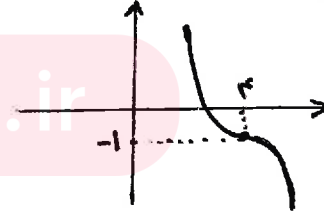
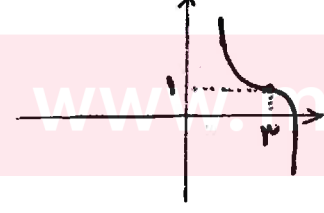
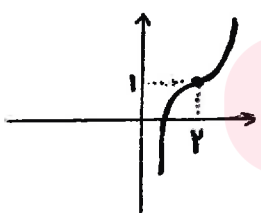


$$y = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$



$$y = \dots\dots\dots$$

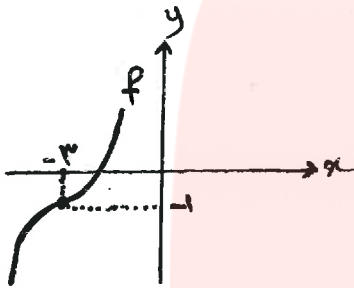
$$y = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

$$y = \dots\dots\dots$$

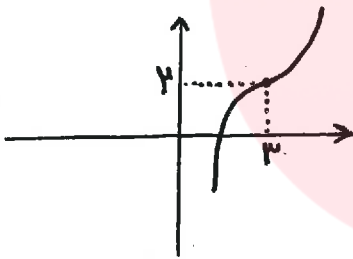
تمرین ۳: نمودار تابع $f(x) = 3 - (x+1)^3$ از کدام ناحیه ریشه افتضات عبور می‌کند؟

تمرین ۴: شکل مقابل مربوط به تابع f است حاصل $f(-1) - f(0)$ کدام است؟



ب این نمودار محور x ما را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

تمرین ۵: نمودار تابع با ضابطه $f(x) = (x-\alpha)^3 + b$ را مشاهده است حاصل b کدام است؟



تمرین ۶: نمودار تابع $y = x^3$ را ابتدا ۲ واحد سمت چپ و سپس ۳ واحد سمت بالا حرکت می‌دهیم و آن را $f(x)$ می‌نامیم، حاصل $f(1)$ را بیابید.

تمرین ۷: نمودار تابع $f(x) = 2 - x^3$ را ابتدا ۱ واحد سمت راست و سپس ۲ واحد سمت پایین منتقل می‌کنیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. معادله $g(x)$ را بنویسید.

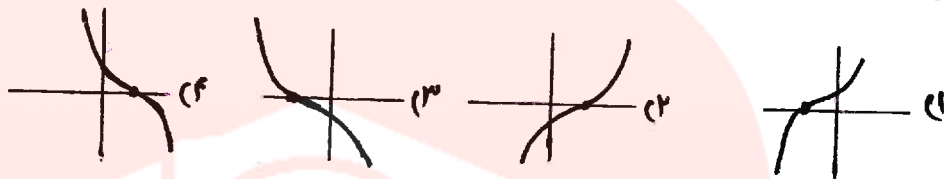
www.my-dars.ir

تمرین ۸: اگر تابع $f(x) = (a-1)x^5 + ax^4 - (b-2)\sqrt{x} + 4$ یک تابع غیر جبهه‌ای از درجه ۴ باشد حاصل $a+b$ را بیابید.

تمرین ۹) اگر بردار تابع $f(x) = (2\alpha - 1)x^4 - x^2 + 5$ برابر ۱۴ باشد مقدار α را بیابید.

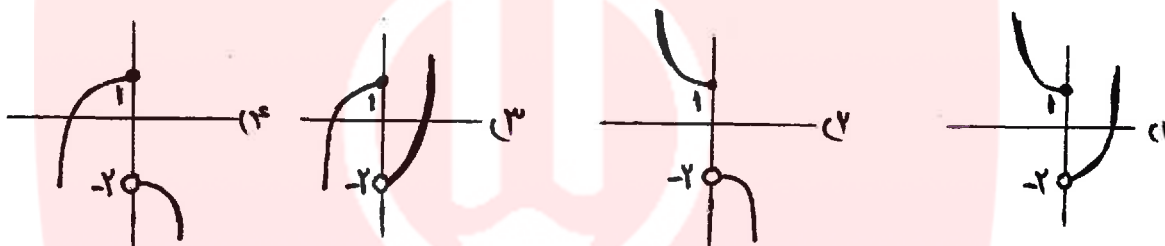
(خطی سبز)

تمرین ۱۰) تعداد تابع $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ چند کدام نفع است؟



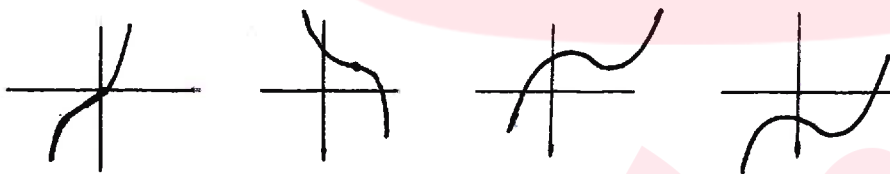
(خطی سبز)

تمرین ۱۱) تعداد تابع $f(x) = \begin{cases} x-2 & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ -x+1 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟



نکته: تعداد ریشه های تابع درجه ۳:

۱- ریشه داشته باشد ←

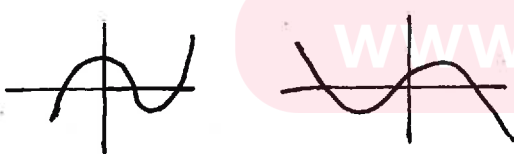


۲- ریشه نداشته باشد ←



$f(x) = (x-3)(x^2 - 4x + 4)$
 یک ریشه مختلف $\Delta = 0$ ←
 یک ریشه سه گانه ←

۳- ریشه داشته باشد ←



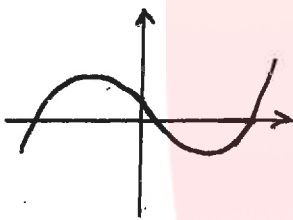
$f(x) = (x-2)(x^2 - 3x + 2)$
 ۲ ریشه دارد $\Delta > 0$ ←
 یک ریشه سه گانه دارد ←

خرم ایفتم بدو نیک :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$a \rightarrow$ بازمانه نوزار
 $b \rightarrow$ جهت تقعر در عرض از مبدأ
 $c \rightarrow$ شیب در نقطه عرض از مبدأ
 $d \rightarrow$ عرض از مبدأ

تقریب ۱۲: در نمودارهای زیر که مربوط به ضرایب $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ است علامت ضرایب a تا d را مشخص کنید.



مشخص کنید

تقریب ۱۳: نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات عبور می کند؟ (حالت سبز)

۲۴ دوم و چهارم

۳ سوم و چهارم

۲۲ دوم و سوم

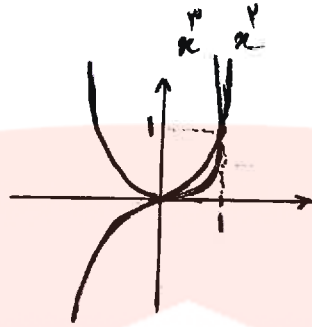
۱ اول و سوم

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

مقایسه قرار x^2 و x^3 :



* در بازه $(-\infty, -1)$ x^2 بالاتر است.

* در بازه $(-1, 1)$ x^3 بالاتر است.

* در بازه $(1, +\infty)$ x^3 بالاتر است.

x در نقاط $(0,0)$ ، $(1,1)$ و $(-1,-1)$ هم‌بند را قطع می‌کند.

تمرین ۱۳) مقدار x^3 در بازه $[\alpha, -\infty)$ بالاتر از مقدار x^2 قرار ندارد. بیشترین مقدار α کدام است؟

(آب‌تلیس)

۴) عرض قطب را بنویسید

۳) -۱

۲) ۱

۱) صفر

مای درس

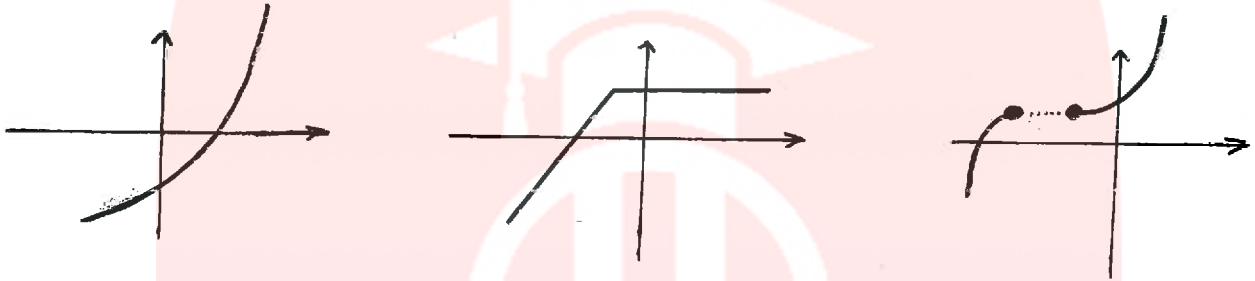
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

صفحه ۲ تا ۱۵ کتاب درسی

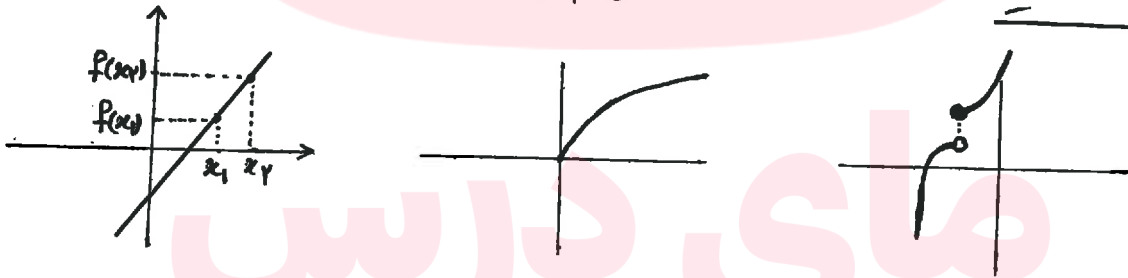
۲۲ تابع صعودی و نزولی:

۱۱ تابع صعودی: بازدار شدن مقدار x ، مقدار y هم زیاد می شود یا ثابت می ماند.



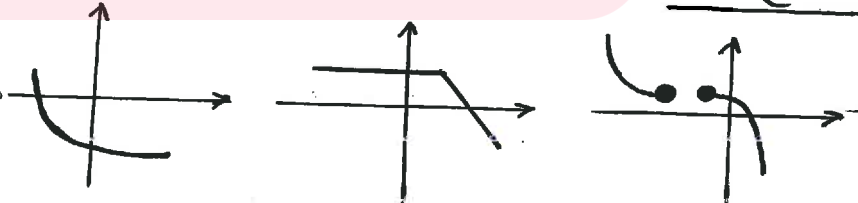
$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

۱۲ تابع صعودی اکید: بازدار شدن مقدار x ، مقدار y هم زیاد می شود.



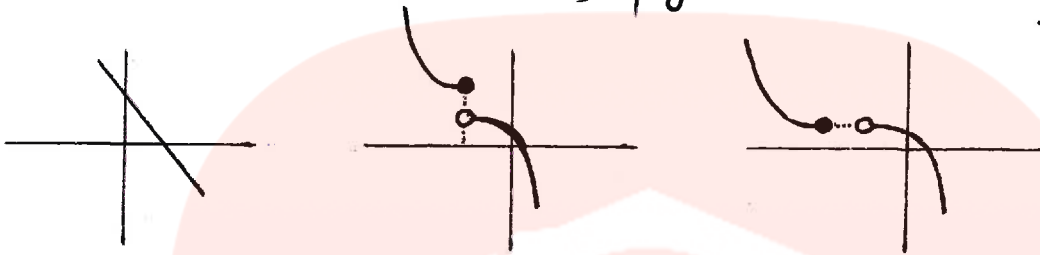
$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

۱۳ تابع نزولی: بازدار شدن مقدار x ، مقدار y کم می شود یا ثابت می ماند.



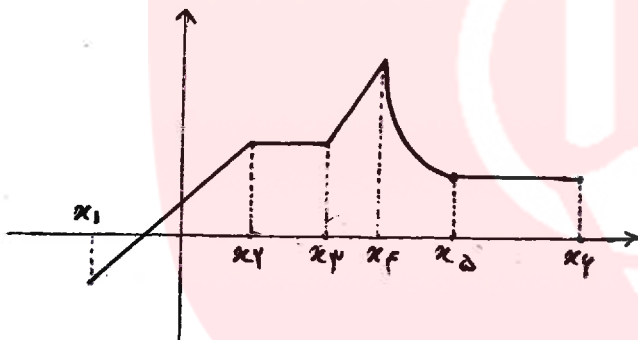
$$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

۴. تابع نزولی آکید: باز یار ستن مقار x ، مقدار $f(x)$ کم می شود.



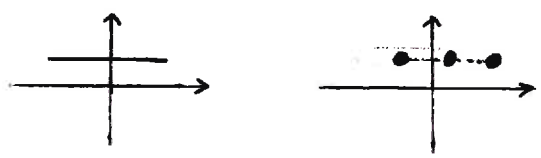
$x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

مثال: نمودار زیر مربوط به تابع f است.



- (x_1, x_2) ← صعودی آکید
 - (x_2, x_3) ← صعودی
 - (x_3, x_4) ← ثابت
 - (x_4, x_5) ← نزولی آکید
 - (x_5, x_6) ← نزولی
 - (x_1, x_3) ← نه صعودی و نه نزولی (غیر کلینوا)
 - (x_3, x_5) ← نه صعودی و نه نزولی (غیر کلینوا)
- این تابع در بازه‌ی ...

نکته: تابع ثابت هم صعودی محسوب می شود و هم نزولی. چون شرط هر دو را دارد.

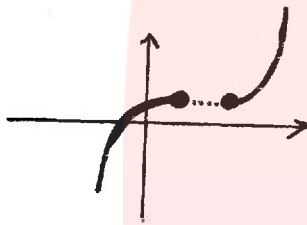


نکته ۲: هر تابع معکوس الید، معکوس نوعی تابع معکوس است. این عکس آن همواره درست نیست.

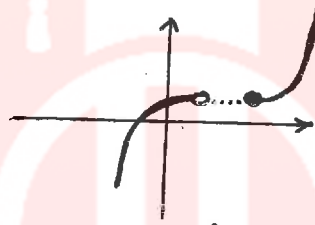
نکته ۳: هر تابع نزولی الید نیز نوعی تابع نزولی است. این عکس آن همواره درست نیست.

نکته ۴: با انتقال دادن یک تابع، معکوس و نزولی بودن در تمام موارد پیوسته نیستند.

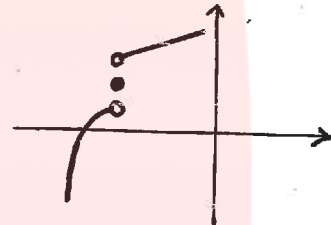
نکته ۵: تشخیص معکوس و نزولی بودن در تمام موارد پیوسته نیستند.



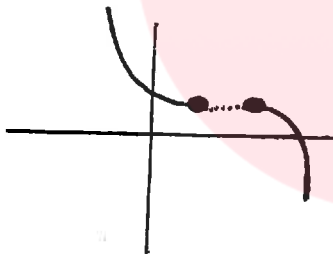
معکوس



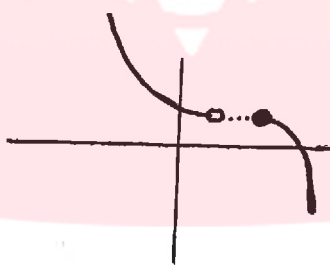
معکوس الید



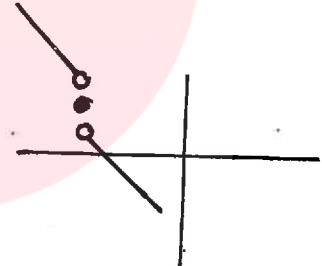
معکوس الید



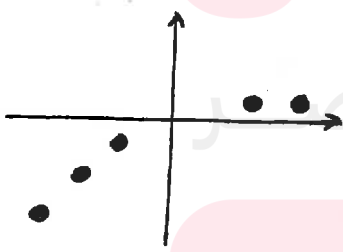
نزولی



نزولی الید



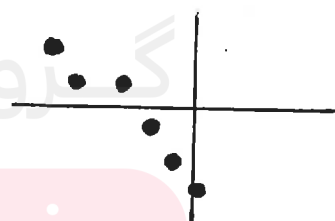
نزولی الید



معکوس



معکوس الید



نزولی

نکته ۲: تشخیص معکوس و تدرولی بودن در نهایت زوج مرتب

$f(x) = \{(1, -3), (2, -1), (3, 0)\}$ ← معکوس الیه (با افزایش x ، y هم تنگه کار می‌شود)

$g(x) = \{(2, 3), (1, 3), (-2, 1)\}$ ← معکوس (با افزایش x ، y هم زیاده‌تر می‌شود ولی نه تنگه کار

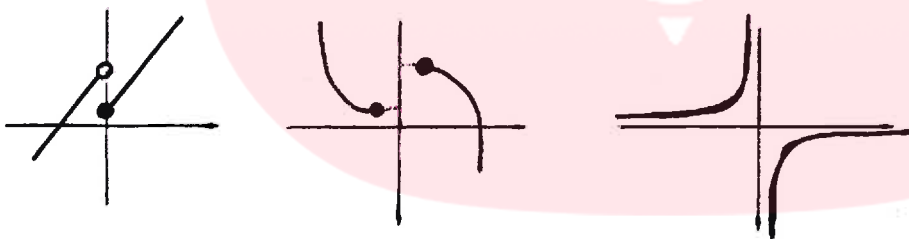
یعنی جابجایی ثابت می‌ماند

$h(x) = \{(1, -2), (-1, 1), (-3, 2)\}$ ← تدرولی الیه (با افزایش x ، y تنگه کار کم می‌شود)

$p(x) = \{(3, 7), (4, 7), (5, 2)\}$ ← تدرولی (با افزایش x ، y کم می‌شود ولی نه تنگه کار)

نکته ۷: تابع x معکوس الیه و تابع x^3 - تدرولی الیه است.

نکته ۸: دقت کنید که حین تابع هاین نه معکوس هستند و نه تدرولی ← غیر یکنوا هستند.



نکته ۹: در تابع الیه معکوس با حذف f از دو طرف نامساوی ← جهت نامساوی عوض نمی‌شود.

در تابع الیه تدرولی با حذف f از دو طرف نامساوی ← جهت نامساوی عوض می‌شود.

آه f الیه معکوس باشد → $f(2x-1) > f(x+4) \rightarrow 2x-1 > x+4$

آه f الیه تدرولی باشد → $f(2x-1) > f(x+4) \rightarrow 2x-1 < x+4$

تمرین ۱) دانه تابع $f = \{(2,2), (3,4), (5, m+2)\}$ تابع اکیدا صعودی باشد هر دو m را تعیین کنید

تمرین ۲) دانه تابع $f = \{(1,2), (4,-2), (3, m^2-5)\}$ از اس فند مقدار صبیح m تابع نزولی است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) صبیح مقدار

۴) ۳

تمرین ۳) دانه $f = \{(1, 3\alpha+1), (-1, \alpha+1), (2, 4\alpha+3)\}$ تابع صعودی باشد مقادیر α در کدام بازه است؟

(مخالی نسبی)

۱) $(-\infty, 0]$

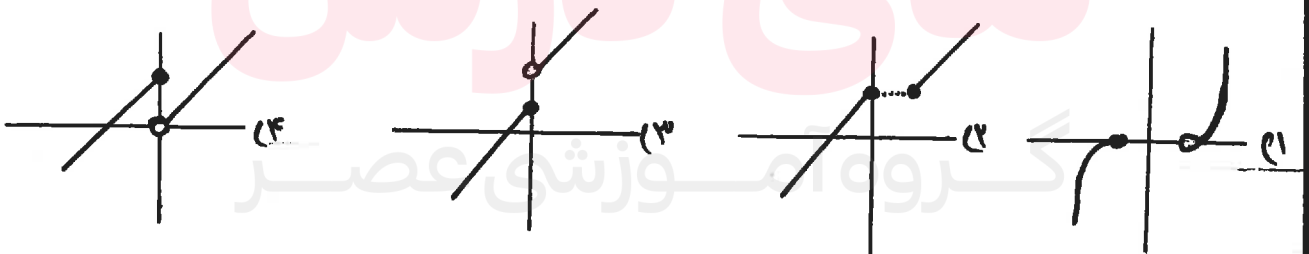
۲) $(-\infty, 0)$

۳) $[0, +\infty)$

۴) $(0, +\infty)$

(آزمون تابعی)

تمرین ۴) کدام فندار زیر صعودی است و این اکیدا صعودی نیست؟



تمرین ۵) دانه تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$ چگونه است؟

۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی

۲) اکیدا نزولی

۱) اکیدا صعودی

تدریس ۹، اگر تابع f در $[a, b]$ اکیدا صعودی باشد آنگاه f در این بازه صعودی ما را

۱) حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۲) دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند.

(آنزیرین تاملی)

۳) قطع نمی‌کند.

۴) حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

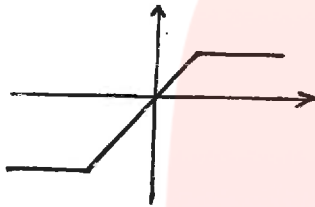
مای درس

گروه آموزشی عصر

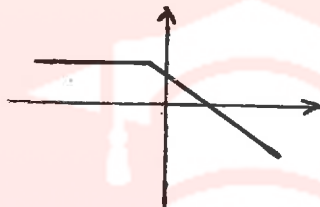
www.my-dars.ir

کلیفایم و غیر کلیفایم:

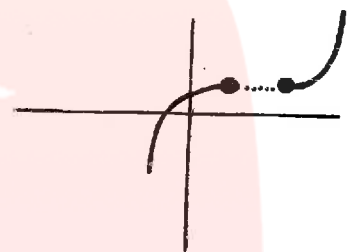
۱۱ تابع کلیفایم: تابعی کہ یا فقط صعودی است یا فقط نزولی



صعودی ← کلیفایم

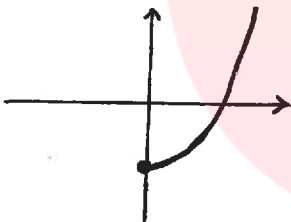


نزولی ← کلیفایم

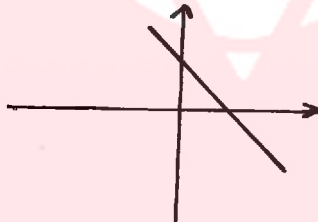


صعودی ← کلیفایم

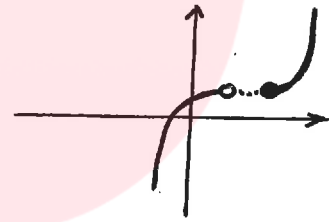
۱۲ تابع اکیدا کلیفایم: تابعی کہ یا صعودی اکیدا است یا نزولی اکیدا



صعودی اکیدا ← اکیدا کلیفایم

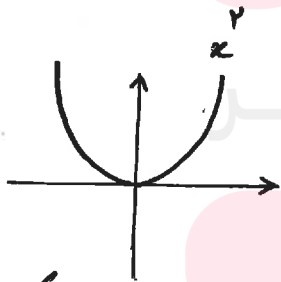


نزولی اکیدا ← اکیدا کلیفایم

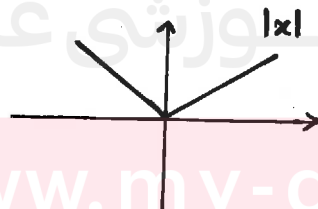


صعودی اکیدا ← اکیدا کلیفایم

۱۳ تابع غیر کلیفایم: تابعی کہ کلیفایم نیست.



نه صعودی و نه نزولی ← غیر کلیفایم



نه صعودی و نه نزولی ← غیر کلیفایم



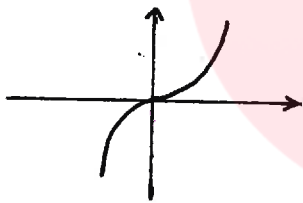
نه صعودی و نه نزولی ← غیر کلیفایم

صعورس ← کینوا	مجموع بنبرس
صعورس اکیر ← اکیرا کینوا	
نزولس ← کینوا	
نزولس اکیر ← اکیرا کینوا	
نم صعورس ونف نزولس ← عنبر کینوا	

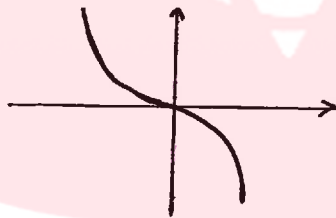
نکته ۱: تابع ثابت هم صعورس محسوب می‌شود و هم نزولس ← تابع ثابت تابعی کینوا است.

نکته ۲: تابع اکیرا کینوا نوعی تابع کینوا است.

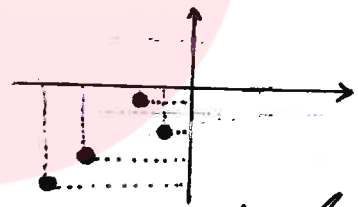
نکته ۳: هر تابع اکیرا کینوا قطعاً یک به یک است و برعکس آن همواره درست نیست



اکیرا کینوا - یک به یک



اکیرا کینوا - یک به یک



عنبر کینوا - یک به یک

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ①: عدد m را طوری پیدا کنید که f تابعی اکیدا یکنوا باشد.

$$f = \{(2, 5), (3, 3), (4, 2m+4)\}$$

تمرین ②: عدد m را طوری پیدا کنید که تابع زیر تابعی یکنوا باشد.

$$g(x) = \{(1, -1), (4, m+1), (5, -2m-5)\}$$

تمرین ③: n سرالوات زیر پاسخ صحیح دهید.

الف: تابعی رسم کنید اکیدا یکنوا باشد ولی اکیدا صعودی نباشد.

ب: تابعی رسم کنید هم صعودی و هم نزولی باشد.

ج: تابعی رسم کنید در بازه $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$ اکیدا صعودی باشد ولی در \mathbb{R} اکیدا صعودی نباشد.

د: فاصله تابع را بنویسید و در ادامه خود را بنویسید.

(سه تایی از)

تمرین ④: کدام یک از توابع زیر، تابعی اکیدا یکنواست؟

$$1) \{(1, 4), (2, 1), (3, 5)\}$$

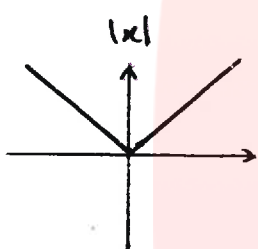
$$2) \{(1, 0), (2, 5), (3, -6)\}$$

$$3) \{(1, 5), (2, 7), (3, 9)\}$$

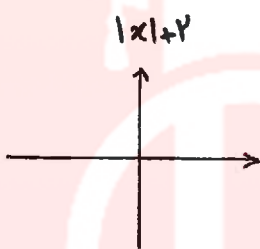
$$4) \{(1, 5), (2, -4), (3, -2)\}$$

③ ③ ③ به عنوان دانش آموز پایه دوازدهم علاوه بر تابع ثابت، خطی، سهمی و x^3 تابع زیر را نیز باید بتوانیم رسم کنیم، انتقال دهیم و دامنه و بردار آنها را پیدا کنیم.

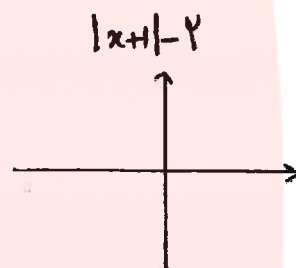
۱۱) تابع $|x|$



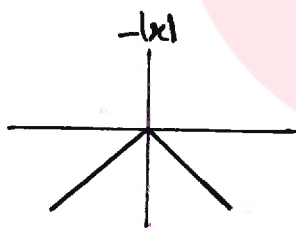
نه صعودی و نه نزولی ← غیر یکنوا
یک به یک نیست.



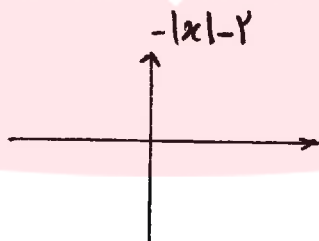
نه صعودی و نه نزولی ← غیر یکنوا
یک به یک نیست.



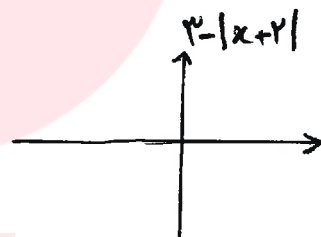
نه صعودی و نه نزولی ← غیر یکنوا
یک به یک نیست.



نه صعودی و نه نزولی ← غیر یکنوا
یک به یک نیست.

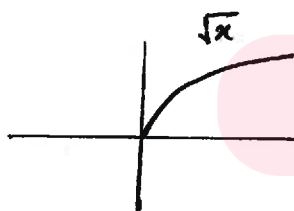


یک به یک نیست

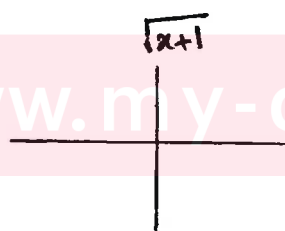


یک به یک نیست

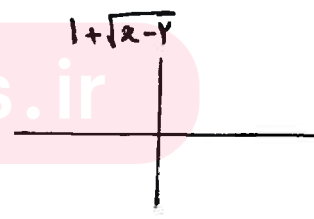
۱۲) تابع \sqrt{x}



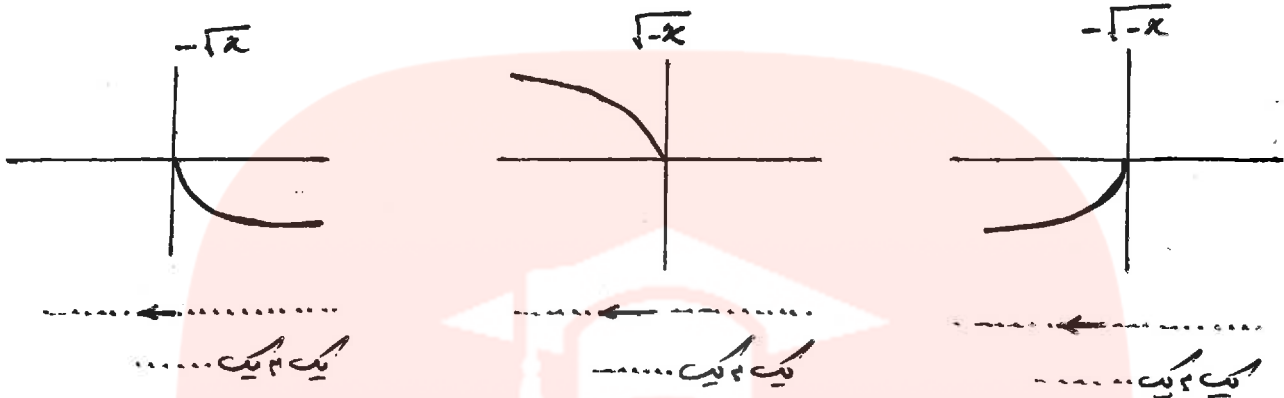
الگیا صعودی ← الگیا یکنوا
یک به یک است.



یک به یک نیست



یک به یک نیست



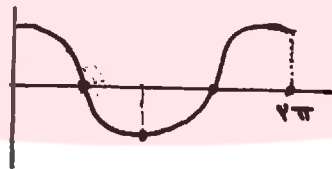
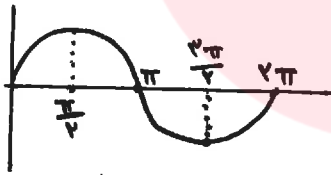
۳) تابع $\sin x$:



$\sin x$

$\sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\sin(x - \frac{\pi}{2})$

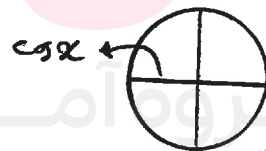


نه صعودی و نه نزولی ← غیر یکپارچه
یک به یک نیست.

یک به یک

یک به یک

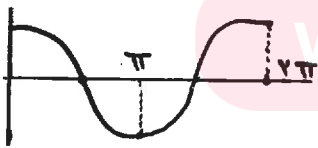
۴) تابع $\cos x$:



$\cos x$

$\cos(x + \frac{\pi}{2})$

$\cos(x - \frac{\pi}{2})$

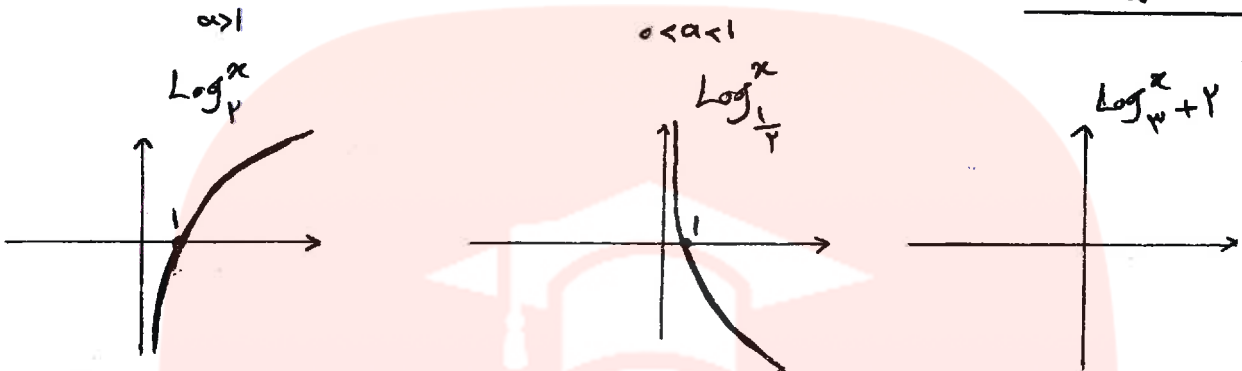


نه صعودی و نه نزولی ← غیر یکپارچه
یک به یک نیست.

یک به یک

یک به یک

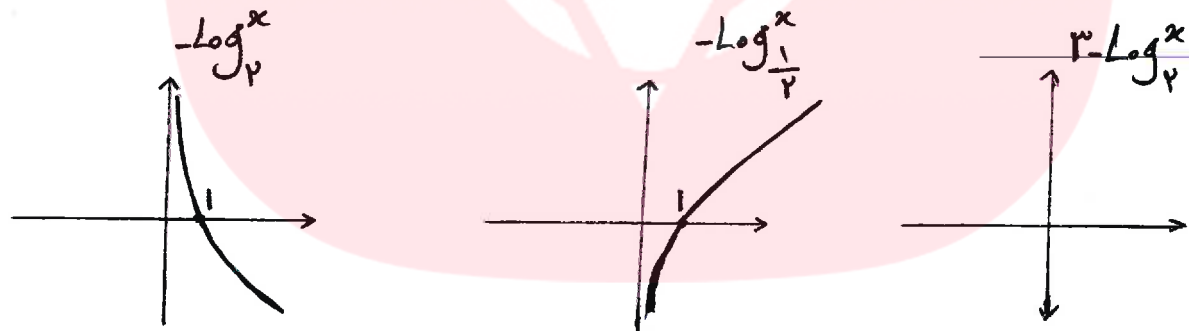
(د) تابع Log_a^x :



اگر $a > 1$
 اگر $a < 1$
 اگر $a > 1$ و $a < 2$
 اگر $a < 1$ و $a < -2$

یک به یک

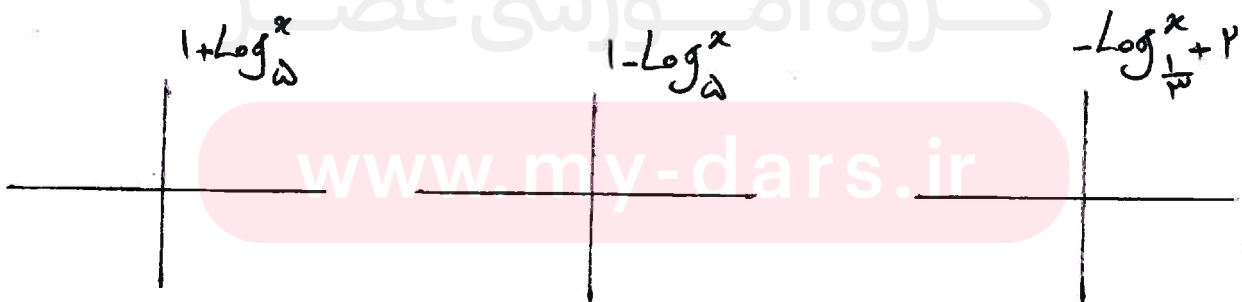
یک به یک



یک به یک

یک به یک

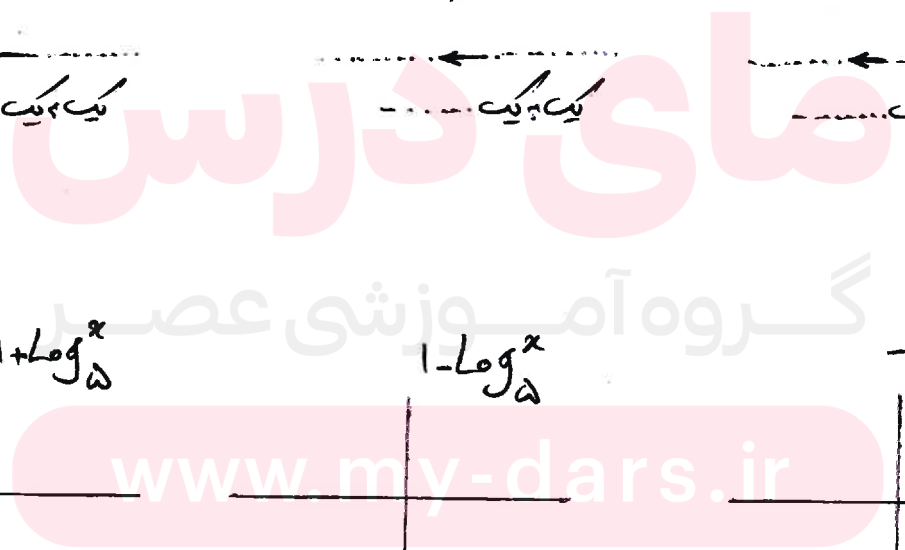
یک به یک



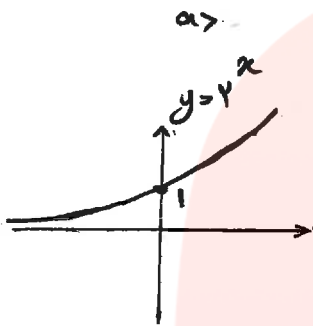
یک به یک

یک به یک

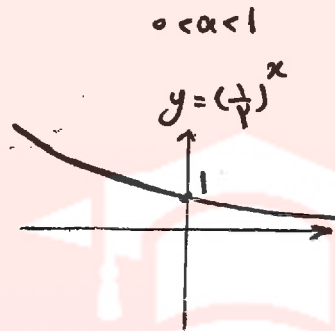
یک به یک



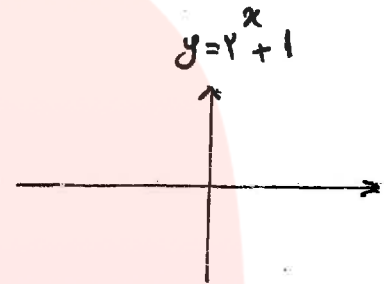
۶- تابع $y = a^x$



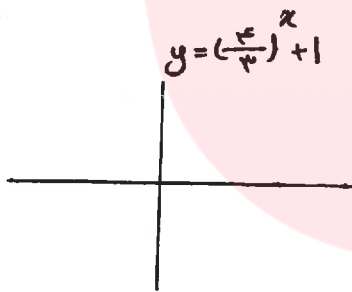
الگرای صعودی ← الگرای متناهی
یک به یک است



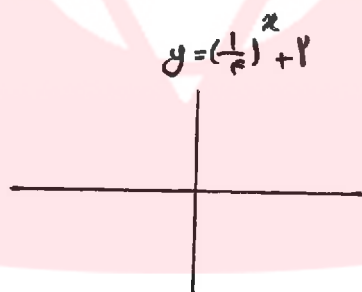
یک به یک



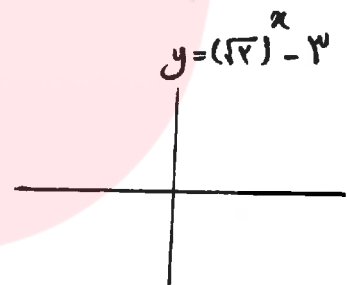
یک به یک



یک به یک

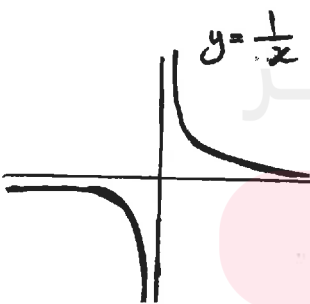


یک به یک

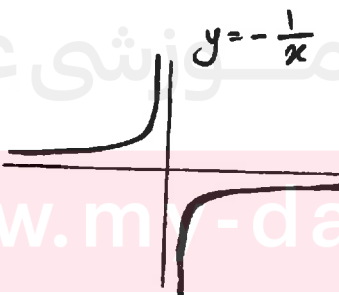


یک به یک

۷- تابع $y = \frac{1}{x}$



نه صعودی و نه نزولی ← غیر متناهی
یک به یک است.



یک به یک

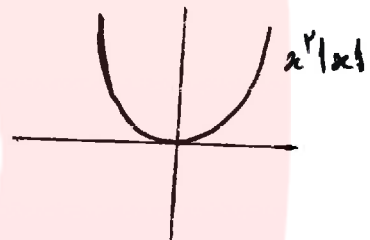
۷) توابع قدر مطلق:

ابتدا رسم داخل حرکت از قدر مطلق ما را پیدا کنیم سپس تابع را یک تابع دو یا چند ضابطه ای تبدیل می‌کنیم و در نهایت هر ضابطه را با قدم به دستور مقابل آن رسم می‌کنیم تا تابع رسم شود.

مثال: نمودار تابع $f(x) = x^2|x|$ را رسم کنید.

رسم داخل قدر مطلق $|x|=0 \rightarrow x=0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x) & x > 0 \\ x^2(-x) & x < 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases}$$



نمودار حرکت از توابع زیر را رسم کنید.

$$y = x + |x|$$

$$y = x - |x|$$

$$y = x|x-1|$$

مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$y = |x+3| + |x-1|$$

$$y = |2x+4| + |x+1|$$

$$y = |2x+4| - |x+1|$$

$$y = |x-2| - |x|$$

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ① درستی یا نادرستی عبارات های زیر را مشخص کنید.

الف: تابع $y = \cos x$ بی در بازه $[\pi, 2\pi]$ صعودی است.

ب: اگر برای دو نقطه x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، تابع f الیاً نزولی است.

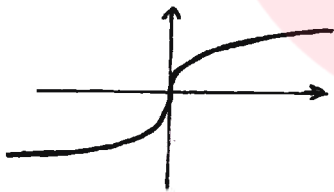
ج: تابع $f(x) = -(x+1)^3 - 2$ در قسمتی از دامنه خود صعودی است.

د: بین شمار تابع مرتبان یافت که هم صعودی و هم نزولی باشند.

ه: تابع $y = \frac{1}{x}$ تابعی یکنوا است.

و: $y = \sqrt{x+1} - 3$ تابعی صعودی است و $y = -\log_{\frac{2}{3}} x + 2$ تابعی یکنوا است.

(مقاله صفحه ۱۰ کتاب ری)



تمرین ② د: نمودار تابع رو به رو دقت کنید.

الف: این تابع صعودی است یا نزولی است؟

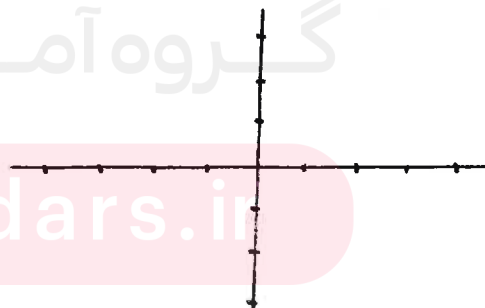
ب: این تابع یک به یک است؟

ج: آیا تابعی وجود دارد که الیاً صعودی یا الیاً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

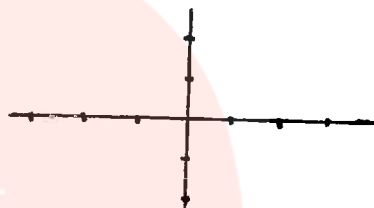
تمرین ③ د: نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌ها را که در آن صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

(تمرین ۲ صفحه ۱۰ کتاب ری)

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 < x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$



تمرین (۴) تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ -x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ در بازه $(-\infty, \infty)$ نزولی است حداقل مقدار α را بیابید.



(آب قلمچی)

تمرین (۵) کدام تابع زیر صعودی است؟

۴ $y = -x|x|$

۳ $y = x|x|$

۲ $y = -x^3$

۱ $y = x^2$

(آب قلمچی)

تمرین (۶) کدام تابع زیر نزولی است؟

۴ $y = x - 2|x|$

۳ $y = |x| - x$

۲ $y = 2x + |x|$

۱ $y = x + |x|$

تمرین (۷) تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکثراً نزولی است؟ (مراکز تجربی ۹۸)

۴ $(1, +\infty)$

۳ $(-2, 1)$

۲ $(-\infty, 1)$

۱ $(-\infty, -2)$

تمرین (۸) تابع با ضابطه $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه اکثراً صعودی است؟ (مراکز تجربی خارج ۹۸)

۴ $(2, +\infty)$

۳ $(-1, 2)$

۲ $(1, +\infty)$

۱ $(-\infty, 2)$

تمرین ۹ در بازه α تابع با ضرایب $f(x) = 1x - 21 + 1x - 31$ الیا تدریس است ضرایب آن با ضرایب

تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟
 (سراسری شعبه ۹۷)

۱) ۱
 ۲) ۲
 ۳) ۳
 ۴) ۴ نقطه مشترک

تمرین ۱۰ تابع f الیا تدریس است، همان $f(\alpha + 1) < f(3\alpha - 1)$ باشد؟ آنگاه عدد α کدام است؟
 (آب کلید)

- ۱) $\alpha \geq 2$ ۲) $\alpha > 1$ ۳) $\alpha > 1$ ۴) $\alpha > 2$

تمرین ۱۱ اگر تابع f الیا صعودی باشد و $f(1 + \alpha) > f(3 - 2\alpha)$ باشد بزرگترین مقدار صحیح α کدام است؟
 (حل سبز)

- ۱) ۱ ۲) صفر ۳) -۱ ۴) -۲

تمرین ۱۲ اگر تابع $f(x) = (a - 2)x^2 + 2ax + 3$ صاف باشد، $f(2)$ کدام است؟
 (حل سبز)

- ۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱



⊗ سوالات امتحان نهایی ⊗

① درست یا نادرست هر یک از عبارات من زیر را مشخص کنید.

رس ۹۷ و خرداد ۹۹

* تابع ثابت $y = k$ بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود.

تیر ۹۸

* تابع $f(x) = |x|$ در دامنه \mathbb{R} یکدست است.

شهریور ۹۸

* تابع $f(x) = x^3 + 2$ در دامنه تعریفش صعودی است.

خرداد ۹۹ خارج

* تابع $f(x) = |x|$ در دامنه \mathbb{R} صعودی است.

خرداد ۹۹ خارج

* تابع $y = \sqrt{x} + 3x^3 - 2x^5$ یک تابع چندجمله ای نیست.

رس ۱۴۰۱

* تابع $y = 1 + (1 - 3x^2)^2$ یک تابع چندجمله ای از درجه سوم است.

رس ۱۴۰۱

* نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایت تراز نمودار تابع $y = x^3$ است.

رس ۱۴۰۱

* هر تابع یکدست، یک به یک است.

خرداد ۱۴۰۱

* تابع $f(x) = 3x - x^2$ یک تابع درجه دوم است.

خرداد ۱۴۰۱

* تابع $y = x^2$ تابع \mathbb{R} صعودی است.

شهریور ۱۴۰۰

* دامنه توابع چندجمله ای برابر \mathbb{R} است.

شهریور ۱۴۰۰

* تابع $y = \sqrt{x}$ در دامنه \mathbb{R} یکدست است.

خرداد ۱۴۰۲

* بیشتر توابع زوج در \mathbb{R} هم صعودی و هم نزولی است.

شهریور ۱۴۰۲

* تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنه \mathbb{R} یکدست است.

تربیع ۷) در جاس خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید:

* تابعی که در یک بازه هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود تابع نامیده می‌شود. (س ۹۸)

* در بازه $(0, \infty)$ نمودار تابع $y = x^3$ نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد. (س ۹۹)

* تابع $f(x) = (x+1)^3$ در رانده تعریف می‌شود است. (صورتی - نزولی) (خزانه ۹۸)

* تابع $y = x^2$ (در بازه $[-\infty, \infty)$) نزولی است حداکثر مقدار a است. (تیر ۹۸)

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تدکیک توابع

صفحه ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

تعریف: تدکیک دو تابع یعنی یکی از آنها را بیاندازیم داخل دیگری.

عنوان مثال دو تابع $f(x) = 2x + 5$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ را باهم تدکیک می‌کنیم

① $g(f(x)) = \sqrt{2x + 5}$ → تابع f را داخل g می‌اندازیم

یعنی به جای x تابع f را قرار می‌دهیم که به این حالت اصطلاحاً $g \circ f$ می‌گویند.
و تابع اصلی f داخل شکل

② $f(g(x)) = 2\sqrt{x} + 5$ → تابع g را داخل f می‌اندازیم

یعنی به جای x تابع g را قرار می‌دهیم که به این حالت اصطلاحاً $f \circ g$ می‌گویند.
 f تابع اصلی و g داخل شکل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) : \quad x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(x) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(g(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) : \quad x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(f(x))$$

$$(f \circ g)(x) = f \circ g(x)$$

$$(g \circ f)(x) = g \circ f(x)$$

تذکره:

تمرین ① در هر مورد با توجه به تابع f و g داده شده، منابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را بنویسید.

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2x+1} \\ g(x) = x-2 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$(g \circ f)(x) =$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+3} \\ g(x) = \sin x \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) =$$

$$(g \circ f)(x) =$$

تمرین ② تابع $h(x) = (3x^2 - 4x + 1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف: $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

ب: $f(x) = x^5$, $g(x) = 3x^2 - 4x + 1$

تمرین ③ تابع $h(x) = 5(2x^2 - 5x + 4)^3$ ترکیب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ است.

حامل $(g \circ f)$ را بنویسید.

www.my-dars.ir

تمرین ④ تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ را در صورت ترکیب دو تابع بنویسید.

تمرین ۵ در تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ را در نظر بگیرید.

الف: ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید.

ب: حاصل $(g \circ f)(x)$ را حساب کنید.

تمرین ۶ با توجه به ضابطه های f و g عبارات زیر را تکمیل کنید و نتایج را حاصل کنید.

$f(x) = 2x + 3$ $g(x) = -x - 1$ $(f \circ g)(x) = -2$

$f(x) = x + 1$ $g(x) = x^2 + 4x - 1$ $(g \circ f)(x) = -4$

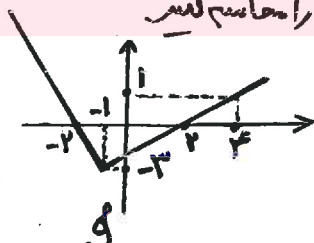
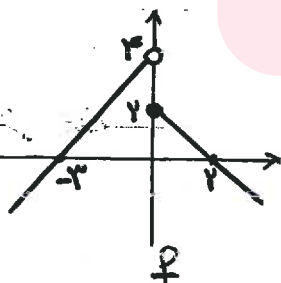
تمرین ۷ اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (5, -1), (0, 2)\}$ و $g = \{(4, -2), (-1, 5), (2, 1), (3, 0)\}$ باشد

(فرض کنید)

تابع $f \circ g$ را مشخص کنید.

تمرین ۸ اگر $f(x) = 3x^2 - 1$ و $g(x) = \{(0, 4), (2, 4), (-1, 2)\}$ باشد حاصل $(f \circ g)(-1)$ را بیابید.

تمرین ۹ با توجه به نمودارهای f و g موارد خواسته شده را حساب کنید.



$(f \circ g)(-1) =$

$(g \circ f)(0) =$

(۲ به قلمی)

تربیت ۹) دانه $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ، $g = \{(1, 4), (2, 1), (3, -1)\}$ ، $f \circ g$ تابع g کدام است؟

- ۱) $\{(1, \frac{1}{3}), (3, -1)\}$ ۲) $\{(1, \frac{1}{3}), (-1, \frac{1}{3})\}$ ۳) $\{(1, \frac{1}{3}), (3, \frac{1}{3})\}$ ۴) $\{(1, 4), (3, -1)\}$

(سراسری ریاضی ۱۷۰)

تربیت ۱۵) دانه $f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 4$ مقدار $\frac{(f \circ g)(2)}{(g \circ f)(-1)}$ چقدر است؟

- ۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{3}{7}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) 3

(سراسری تجربی ۱۲۵)

تربیت ۱۶) دانه $f(x) = [x]$ ، $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ، $(f \circ g)(\sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) -1

تربیت ۱۷) دانه $f(x) = x + \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ ، $(f \circ g)(\alpha) = 5$ ، g نقطه α کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۱)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تربیت ۱۸) دانه $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}$ ، $g = \{(1, 0), (2, 3), (3, 2), (4, -1)\}$ ، $f \circ g$ تابع g چگونه است؟

(۲ به قلمی)

- ۱) صعودی دانه ۲) نزولی دانه ۳) غیر یکنوا ۴) هم صعودی و هم نزولی

تربیت ۱۹) دانه $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ ، $f \circ g$ تابع g و $(f \circ g)$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۹۲)

- ۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$

تقریب ۱۵) اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = \frac{1}{x} + 2$ آنگاه مجموع طالع تقاطعی از منحنی تابع

(سراسری تجربی ۹۱)

f و g که در بالا مندرج است، x ما مقدار x بیفزاید بدانند کدام بازه است P

۱) $(-۴, ۱)$

۲) $(-۲, ۲)$

۳) $(-۲, ۱)$

۴) $(-۱, ۴)$

تقریب ۱۶) اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ و نمودار f و g با یکدیگر متقاطع است؟

(سراسری تجربی ۹۲)

۱) -۱

۲) $\frac{1}{3}$

۳) ۱

۴) $\frac{3}{2}$

تقریب ۱۷) اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند عبارت معادله $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

(سراسری تجربی خارج ۹۷)

کدام است P ؟

۱) $-۷, -۱$

۲) $-۷, ۱$

۳) $-۱, ۷$

۴) $۱, ۷$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تدکبیک تابع بافوردن:

یعنی یک تابع رو بنوازم داخل افوردن ← $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(f(x))$$

اصلاً این حالت $f \circ f$ می‌تونید.

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x)))$$

تذکره: یک تابع ممکنه چندین بار بافوردن تدکبیک بشه ←

مثال: بافوردن تابع $f(x) = 2x + 5$ ، تابع $f \circ f$ را بنویسید.

$$f \circ f = f(f(x)) = f(2x + 5) = 2(2x + 5) + 5 = 4x + 10 + 5 = 4x + 15$$

تدریس ①: در تابع $f = \{(1, 2), (3, 5), (2, -1), (5, 2)\}$ بتابع $f \circ f$ را تشکیل دهید.

تدریس ②: اگر $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x > 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ ، $g(x) = 3x-2$ باشد حاصل موارد خواسته شده را بنویسید.

$$f \circ f(1) = \quad (g \circ f)(0) = \quad (f \circ g)\left(\frac{2}{3}\right) =$$

تدریس ③: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ باشد تابع $f \circ f$ را بنویسید.

$$f \circ g \text{ یا } g \circ f$$

در دو حالت باید بتوانیم تابع معکوس را پیدا کنیم:

حالت ①: وقتی f و g را داریم، f را داریم، g را داریم، f را داریم، g را داریم (یعنی تابع را داخل یکدیگر میزنیم)

برای این کار $g(x)$ را به جای x مانده f قرار می‌دهیم و تابع بدست آمده را با f برابر قرار می‌دهیم که به این معادله می‌رسیم.

مثال: اگر $f(x) = -x + 4$ و $(f \circ g)(x) = x^2$ باشد تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x^2 \\ f(g(x)) &= -g(x) + 4 \end{aligned} \right. \rightarrow x^2 = -g(x) + 4 \rightarrow -g(x) = x^2 - 4 \\ g(x) &= -x^2 + 4 \end{aligned}$$

تمرین ①: اگر $(f \circ g)(x) = 3x + 1$ و $f(x) = x^2 - 1$ باشد تابع $g(x)$ را پیدا کنید.

تمرین ②: اگر $f(x) = 2 - x^2$ و $g(x) = 2x - 3$ باشد حاصل $f(g(x))$ را بدست آورید.

مای دارس

تمرین ③: اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $f(g(x)) = 4x^2 + 4x$ باشد مقدار $g(-2)$ کدام است؟

(سازمان تعجبی فارغ ۱۸۴)

www.my-dars.ir

- ۱) ص
- ۲) ۱
- ۳) -۱
- ۴) ۲

$$f \circ g \text{ یا } g \circ f$$

حالت ۵) وقتی f و g را داریم و f را بر g می‌گذاریم (یعنی تابع امل جدید است)

برای حل این سوالات از روش استفاده می‌کنیم:

این صورت که $g(x)$ را برابر t قرار می‌دهیم و x را بر حسب t بدست می‌آوریم و بعد کل عبارت $f \circ g$ را بر حسب t می‌نویسیم.

مثال دیگر: اگر $f(x+2) = x^2 + 5$ باشد تابع $f(x)$ را بدست آوریم.

$$f(x+2) = x^2 + 5$$

$$x+2 = t \rightarrow x = t-2 \rightarrow f(t) = (t-2)^2 + 5 \rightarrow f(t) = t^2 - 4t + 4 + 5 \rightarrow f(t) = t^2 - 4t + 9$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 9$$

تمرین ۱) اگر $f(2x+1) = x^2 - 4x$ باشد تابع $f(x)$ را بدست آوریم.

تمرین ۲) اگر $f(2x+2) = 9x^2 - 4x$ باشد مقدار $f(-1)$ را محاسبه کنید.

تمرین ۳) اگر $g(x) = \frac{x}{x+2}$ و $f \circ g = -2x + 1$ باشد تابع f را بیابیم.

www.my-dars.ir

تربیت ④: دالر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد ضابطه $f(x)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۷)

۱) $x^2 - x + 3$

۲) $x^2 - 2x - 1$

۳) $x^2 - 2x + 1$

۴) $x^2 - x + 1$

تربیت ⑤: دالر $f(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشد ضابطه $f(x)$ کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۳)

۱) $x^2 - 4x + 3$

۲) $x^2 - 4x + 5$

۳) $x^2 - 2x + 5$

۴) $x^2 - 2x + 3$

تربیت ⑥: دالر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشد ضابطه تابع g کدام است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $2x^2 - 7x + 3$

۲) $2x^2 - 3x + 7$

۳) $4x^2 - 2x + 13$

۴) $4x^2 - 4x + 11$

مای درس

گروه آموزشی عصر

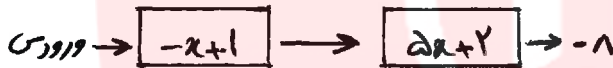
www.my-dars.ir

سوالات ماشین ترکیب تابع:

تمرین ①: اگر ورودی ماشین شکل مقابل ۲- باشد خروجی آن را بیابانید.



تمرین ②: در شکل مقابل ورودی ماشین چه عددی است؟



تمرین ③: اگر تابع f در x و عبارت ماشین به صورت $x \rightarrow [f] \rightarrow [g] \rightarrow 2x$ باشد و $g(x) = 3x+4$ (در ورودی تعبیر خارج ۹۱) آنگاه مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱-۱
- ۲-۲
- ۳-۳
- ۴-۴

تمرین ④: اگر خروجی ماشین شکل مقابل $\frac{4}{3}$ باشد مقدار ورودی کدام است؟ (در ورودی ریاضی ۸۲)

- ۱- $\frac{11}{9}$
- ۲- $\frac{7}{2}$
- ۳- ۳
- ۴- ۴

رمانه ترکیب تابع :

رمانه $f \circ g$ $x \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(x) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(g(x))$

در مرحله اول x من خواهر وارد تابع g شود و به بیست است که باید عضو رمانه آن باشد و در نتیجه عقب و در ردیف $x \in D_f$ ندارد

در مرحله دوم $g(x)$ من خواهر وارد تابع f شود که باز هم باید عضو رمانه آن باشد $g(x) \in D_f$

ترکیب مرحله اول و دوم $\leftarrow D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

محدودیت نامعادله باید حل کنیم

رمانه $f \circ g$ $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow f(x) \rightarrow \boxed{g} \rightarrow g(f(x))$

در مرحله اول x من خواهر وارد تابع f شود که باید عضو رمانه آن باشد $x \in D_f$

در مرحله دوم $f(x)$ من خواهر وارد تابع g شود که باز هم باید عضو رمانه آن باشد $f(x) \in D_g$

ترکیب مرحله اول و دوم $\leftarrow D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

محدودیت نامعادله باید حل کنیم

یادآور صم ۱: دامنه توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$g(x) = \frac{2}{2x-3}$$

$$h(x) = \sin x$$

یادآور صم ۲: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$2x-6 \geq 0$$

$$2x^2 - 8 < 0$$

$$\frac{x-1}{3x+4} \geq -2$$

$$\frac{2x-4}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{3}{x+2} \neq -2$$

روش حل سوالات دامنه f و g و fg :

① ابتدا دامنه f و g را جداگانه بدست می آوریم (چون مقلعاً در ادامه به دامنه هر دو نیاز داریم)

② ضریب دامنه فرماتت شده را منفرسم و چابگذاری می کنیم و بعد نامعادله را حل می کنیم.

www.my-dars.ir

③ اگر دو نامساوی نوشته شده اشتراک می گیریم.

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بنویسید.

$$\text{مرحله ①} \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x-3} \rightarrow D_f: x-3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow D_f = [3, +\infty) \\ g(x) = x^2 - 1 \rightarrow D_g = \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\text{مرحله ②} \left\{ \begin{array}{l} D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \in [3, +\infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \geq 3\} \\ \phantom{D_{f \circ g}} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\} \\ x^2 - 1 \geq 3 \rightarrow x^2 \geq 4 \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \end{array} \right.$$

$$\text{مرحله ③} \left\{ \begin{array}{l} (-\infty, +\infty) \text{ یا } x \in \mathbb{R} \text{ شرط اول} \\ [-2, 2] \text{ یا } -2 \leq x \leq 2 \text{ شرط دوم} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_{f \circ g} = [-2, 2]$$

تمرین ①: اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ باشد، دامنه $f \circ g$ را بیابید. (صفحه ۱۴ کتاب ریاضی)

تمرین ②: اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد، دامنه $f \circ g$ را بیابید. (صفحه ۱۴ کتاب ریاضی)

تمرین ۳) دامنه $f(x) = \frac{2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{3}{x}$ باشد ضابطه دامنه $f \circ g$ را پیدا کنید. (کاربرگ کلاس صفحه ۱۴ ک)

تمرین ۴) دو تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

۱) $(-\infty, 1]$

۲) $[1, +\infty)$

۳) $(-\infty, 0]$

۴) $(-\infty, 1)$

تمرین ۵) دامنه $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ و دو تابع باشند دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟

۱) $[-1, \infty)$

۲) $(-1, 4]$

۳) $[-1, 4]$

۴) $(-1, 4)$

تمرین ۶) دامنه $f(x) = \sqrt{3-2x}$ و $g(x) = \frac{4}{x-5}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع $f \circ g$ کدام است؟ (سید بسند)

۱) $\mathbb{R} - \{5\}$

۲) $\mathbb{R} - \{11\}$

۳) $(-\infty, \frac{3}{2}] - \{24\}$

۴) $(-\infty, \frac{3}{2}] - \{11\}$

تقریب ۷: اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد، دامنه f کدام است؟

(سازمان سنجش ۹۲)

۱. $[0, 2]$

۲. $[0, 3]$

۳. $[1, 2]$

۴. $[1, 3]$

تقریب ۸: اگر تابع f در شکل زیر باشد، دامنه تابع f کدام است؟

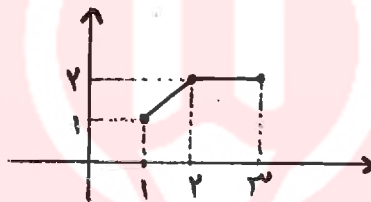
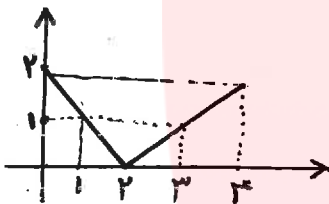
(فصل ۲ زبان ۱۴۰۱)

۱. $[0, 3]$

۲. $[1, 2] \cup [3, 4]$

۳. $[2, 3] \cup [4, 5]$

۴. $[3, 4] \cup [5, 6]$



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

⊛ سوالات امتحان نهایی ⊛

① درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin x$ باشد، آنگاه $(g \circ f)(x) = \sqrt{\sin x}$ خواهد بود. خراب ۹۹ خانج
 ب) اگر $f(7) = 5$ و $f(7) = 7$ و $g(7) = 5$ و $g(7) = 5$ آنگاه $(f \circ g)(7) = 5$. ۱۴۰۰

② جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر $f(7) = 5$ و $g(7) = 7$ و $(f \circ g)(7) = \dots$ آنگاه $(f \circ g)(7) = \dots$ خراب ۹۹ خانج
 ب) تابع $h(x) = (2x^2 - 5x + 1)^2$ ترکیب دو تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ و $g(x) = \dots$ است. ۹۷

سفر ۹۸، سفر ۹۹

③ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد

این رابطه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بدست آورید.

خراب ۹۸

④ دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید

رابطه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

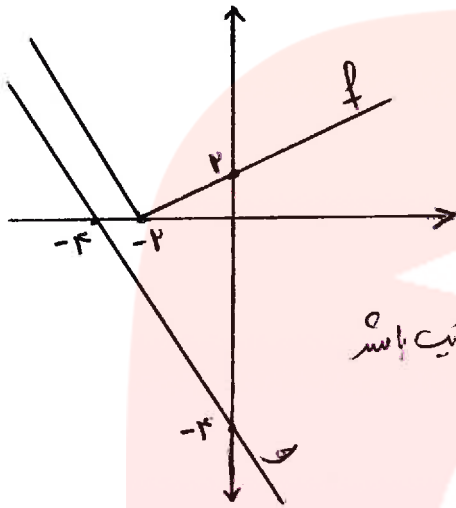
گروه آموزشی عصر

⑤ اگر $f(x) = 3x - 4$ و $f(g(x)) = 3x^2 - 4x + 14$ ، ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید. ۹۸

خراب ۹۹ خانج

۹۹ (۶)

۶) با توجه به نمودارهای تابع f و g سوالات زیر پاسخ دهید.



الف) مقدار $(-1)(f \circ g)$ را محاسبه کنید.

ب) اگر $h = (34-1)g$ و h نقطه مقدار t را بدست آورید.

پ) با استفاده از روش دامنه f و بازه g مشخص کنید که تابع $f \circ g$ یک به یک باشد.

خرداد ۹۹ خارج

۷) اگر $f(x) = x^2 - 5$ و $g(x) = \sqrt{x+9}$ باشد دامنه تابع $f \circ g$ را بدست آورید.

۹۷ (۸)

۸) تابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x-1$ را در نظر بگیرید.

دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

خرداد ۱۴۰۲

۹) اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = x-1$ و $h = 3$ نقطه:

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بدست آورید.

ب) نقاط تابع $f \circ g$ را بنویسید.

۱۴.۱۰۱

۱۰) اگر $f(x) = 7 - 4x^2$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ باشد

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف بیست و یکم

ب) مقدار $(f \circ g)(1)$ را محاسبه کنید.

۱۴.۱۰۲

۱۱) اگر $f = \{(0, -1), (5, 9), (3, 7), (-2, 4)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, -1), (9, 5), (-1, 4)\}$

تابع $f \circ g$ را در صورت وجود بنویسید.

۱۴.۱۰۳

۱۲) اگر در درون مائیس مقابل ۳ باشد مقدار خروجی آن معین است P .

$$x \text{ در درون} \rightarrow 2x - 2 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \text{خروجی}$$

۱۴.۱۰۴

۱۳) با توجه به جدول زیر مقادیر خواسته شده را بدست آورید.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	-1	2	-5
$g(x)$	2	3	4	-2

الف) $(f \circ g)(0)$

ب) $(f \circ (f \circ g))(0)$

۱۴) اگر $f(x) = \frac{x}{4} - 1$ ، $f(g(x)) = 4x^2 + 1$ ، آنگاه ضابطه تابع (x) را بیابید. شماره ۱۴۰۲



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

۱۴ تبدیل نمودار تابع:

از صفحه ۵۱ تا ۲۳ کتاب درسی

۱) انتقال و انبساط و انقباض: $K f(x)$

- \leftarrow $3 f(x)$ و ماس تابع f ، سه برابر شوند (انبساط عمودی)
- \leftarrow $\frac{1}{3} f(x)$ و ماس تابع f ، یک سوم برابر شوند (انقباض عمودی)
- \leftarrow $-f(x)$ و ماس تابع f ، تندی بر سر نیزه (تغییر نیست)

۲) جابجایی: $f(x) + a$ در y ماس a واحد به بالا یا a واحد به پایین (تغییر نیست)

مثال ۱: اگر $f(x) = \{(-2, 7), (-4, 2), (-3, 2)\}$ باشد تابع $f(x)$ را بنویسید.

$2f(x) = \{(-2, 14), (-4, 4), (-3, 4)\}$ و ماس عدد ۲ شده است (تغییر نیست)

$-2f(x) = \{(-2, -14), (-4, -4), (-3, -4)\}$ و ماس عدد -2 شده است (تغییر نیست)

$\frac{1}{3}f(x) = \{(-2, \frac{7}{3}), (-4, \frac{2}{3}), (-3, \frac{2}{3})\}$ و ماس عدد $\frac{1}{3}$ شده است (تغییر نیست)

نکته: تغییر در $K f(x)$ نقطه y را تغییر می‌دهد و a ماس ثابت آن نیست. دامنه $f(x)$ و $K f(x)$ با هم برابر است.

تغییر در $f(x) + a$ ماس ثابت آن نیست. دامنه $f(x)$ و $f(x) + a$ با هم برابر است.

تغییر ۱: اگر $f(x) = \{(2, 3), (-1, -4)\}$ باشد تابع $f(x)$ را بنویسید.

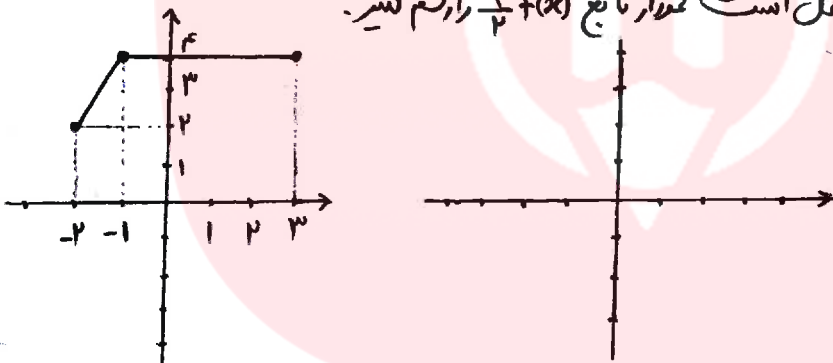
تمرین ۲) د آنه $f = \{(1, -2), (2, 5), (3, 4)\}$ ، دامنه ربر تابع $f(x)$ را بنویسید .

تمرین ۳) د نقطه $A(1, 2)$ نقطه B روی نمودار تابع f است. نقطه A متناظر A را روی نمودار $f(x)$ بیابید.

تمرین ۴) د تابع $f = \{(1, 3), (2, -2), (3, 5)\}$ $f(x)$ ضریف است. تابع $f = \{(1, -2), (2, 4), (3, -10)\}$ کدام است؟

$\frac{1}{4} f(x)$ ، $\frac{1}{3} f(x)$ ، $2 f(x)$ ، $-2 f(x)$ ، $\frac{1}{3} f(x)$ ، $\frac{1}{4} f(x)$

تمرین ۵) د نمودار تابع f مطابق شکل است نمودار تابع $\frac{1}{4} f(x)$ را رسم کنید.



علاوه بر اینها، تابع را انتقال هم بدیم . یعنی دو تغییر در $f(x)$ اعمال کنیم.

نکته مهم: حالت کوه در انجام عملیات پس از این همیشه مندرج و تقسیم بد جمع و تفریق اولویت را بر اینها

نیز ابتدا x و y را انجام بدیم و بعد $+$ و $-$ ~~یعنی~~ ابتدا انتقال و انباشت و بعد انتقال .

مثال: با توجه به $f = \{(1, 5), (2, -4), (3, 2)\}$ ، تابع $f(x) + 3$ را بنویسید .

$$f = \{(1, 5), (2, -4), (3, 2)\} \xrightarrow{-x^2} 2f(x) = \{(1, 10), (2, -8), (3, 4)\} \xrightarrow{+3} 2f(x) + 3 = \{(1, 13), (2, -5), (3, 7)\}$$

نکته: دیدیم که در انقباض و انبساط عرض، رضایت در انتقال عرض نقطه x ما تغییر نکند و x ما ثابت اند. پس دامنه ثابت است ← دامنه $f(x)$ ، $f(x)+2$ با هم برابر است.

نکته: نقاط برخورد تابع $f(x)$ و $f(x)+k$ با هم یکی است در $f(x)$ ، $f(x)+2$ یکی نیست.

تمرین ① در دست یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

الف: دامنه تابع $f(x)$ ، $f(x)$ - با هم برابر است ولی در $f(x)$ با هم برابر نیست.

ب: اگر $A(-4, 3)$ نقطه $f(x)$ باشد، $B(-4, 2)$ نقطه متناظر A در $f(x)-2$ است.

ج: اگر $f(x)$ بازه $[-1, 4]$ باشد، $f(x)+2$ بازه $[2, 3]$ است.

د: $f(x)+g(x)$ - قدرین $f(x)$ و $g(x)$ نسبت x مساوی است.

تمرین ② تابع $f(x) = (1, 2) (4, -2) (5, 4)$ فرض است حرکت از توابع زیر را بنویسید.

$$-3f(x) = \quad 2f(x)+1 =$$

$$3f(x)-2 = \quad -\frac{1}{3}f(x)+1 =$$

تمرین ③ اگر دامنه و برد تابع $f(x)$ صورت $D_f = [-1, 3]$ ، $R_f = [2, 4]$ باشد، دامنه و برد تابع $f(x)+1$

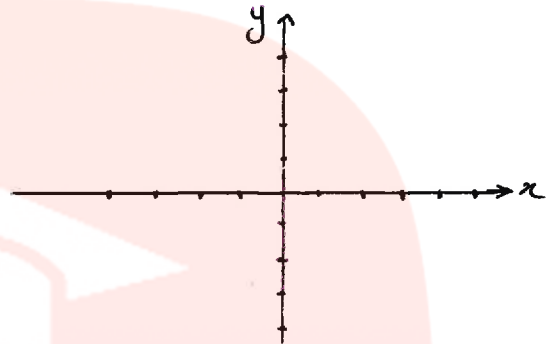
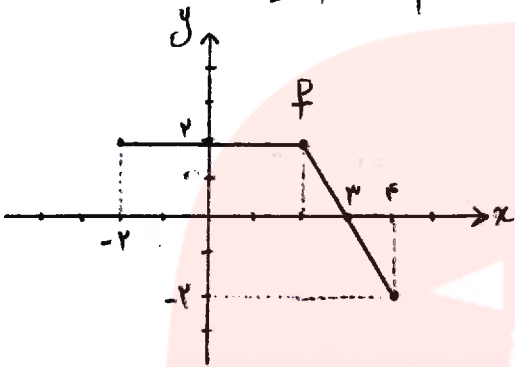
بنویسید.

www.my-dars.ir

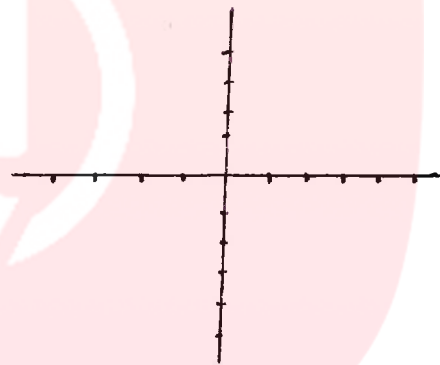
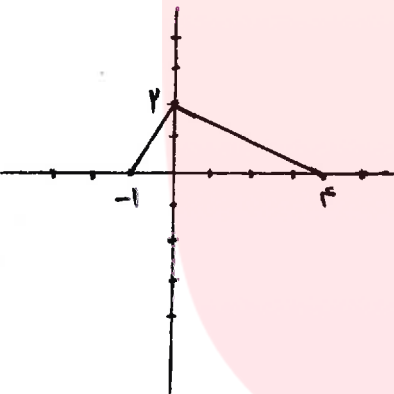
تمرین ④ اگر برد تابع $f(x)+3$ صورت $[2, 4]$ باشد، برد تابع $f(x)$ کدام است؟

$c_1 [7, -8]$ $c_2 [-3, \frac{1}{3}]$ $c_3 [\frac{4}{3}, \frac{1}{3}]$ $c_4 [-3, \frac{1}{3}]$

تمرین ۵ دانه نمودار تابع f معلابت شکل باشد نمودار تابع $\frac{1}{p}f(x) + 2$ را رسم کنید.



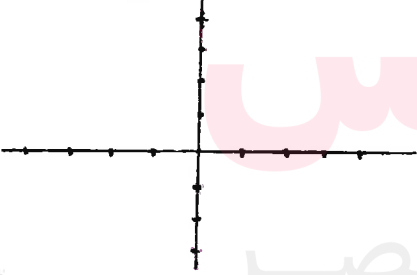
تمرین ۶ دانه نمودار زیر مربوط به تابع f باشد نمودار تابع $-2f(x)$ را رسم کنید.



تمرین ۷ دانه نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ را در بازه $[-2, 3]$ رسم کنید و تک این نمودار تابع $g(x) = -|x - 2|$ و

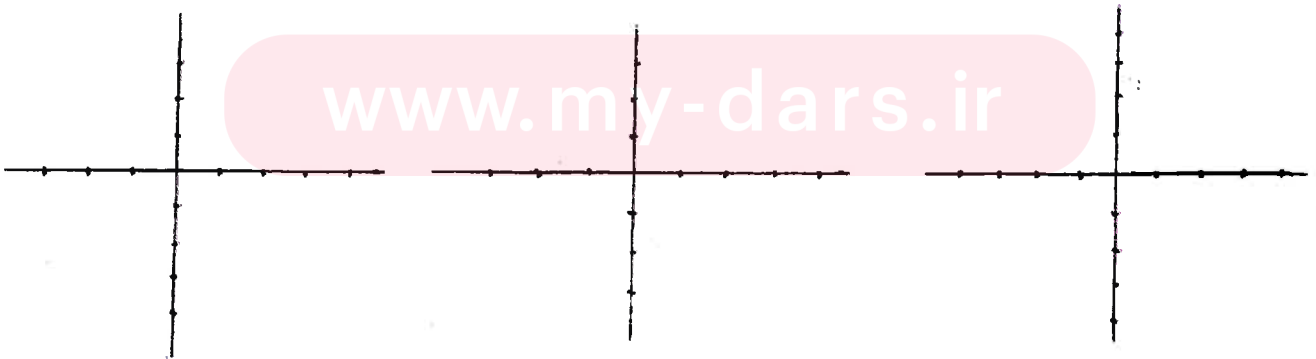
(کاربر کتاب صفحه ۱۶ کتاب درسی)

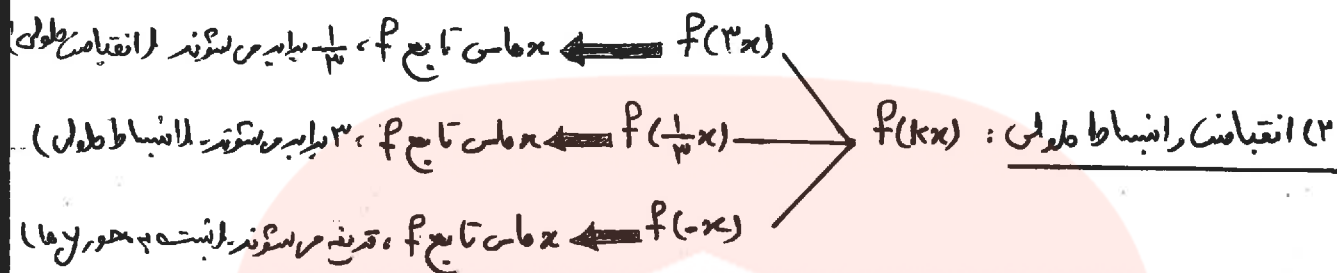
$h(x) = \frac{1}{p}|x - 2|$ و $k(x) = \frac{1}{p}|x - 2|$ را رسم کنید.



مای درسی
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir





یادآور: f منبسط ← f منبسط می‌شود

مثال: اگر $f = \{(1, 3), (2, 5), (6, 4)\}$ باشد توابع $f(2x)$ ، $f(\frac{1}{2}x)$ و $f(-2x)$ را بنویسید.

$f(2x) = \{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ ← x ماس عدد $\frac{1}{2}$ ضرب منبسط (ن ثابت)

$f(\frac{1}{2}x) = \{(2, 3), (4, 5), (12, 4)\}$ ← x ماس عدد ۲ ضرب منبسط (ن ثابت)

$f(-2x) = \{(-1, 3), (-2, 5), (-6, 4)\}$ ← x ماس عدد $\frac{1}{2}$ ضرب منبسط (ن ثابت)

نکته: $f(kx)$ در f فقط x ما تغییر کند و n ثابت اندیس ← بدر $f(kx)$ برابر $f(x)$ برابر است
 ← دامنه $f(kx)$ برابر دامنه $f(x)$ برابر نیست

تمرین ①: اگر $f = \{(1, 4), (2, -2), (3, 5)\}$ باشد هر یک از توابع زیر را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$f(3x) =$

$f(\frac{1}{3}x) =$

$f(-\frac{1}{3}x) =$

www.mydars.ir

تمرین ②: اگر $A(-1, 3)$ نقطه‌ای در f باشد نقطه‌ی متناظر A را در $f(\frac{2}{3}x)$ پیدا کنید.

حالاً در مباحث علاوه بر انقباض و انبساط و طولی، انتقال طولی هم را می‌بینیم.

⊗⊗ به خلاف اولویت هاس ریاضی، اینجا اولویت با جمع و تفریق است. یعنی اول +، - و بعد × و ÷

مثال: اگر $f = \{(1, -4), (2, 5), (3, -1)\}$ باشد تابع $f(2x+3)$ را بنویسید.

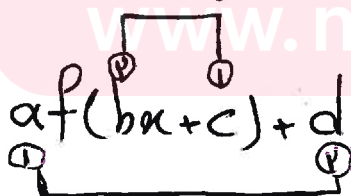
$$f = \{(1, -4), (2, 5), (3, -1)\} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x-3}{2}} \{(1, -4), (2, 5), (3, -1)\} \xrightarrow{-3} \{(-2, -4), (-1, 5), (0, -1)\}$$

- $4 + 2f(x) \leftarrow$ ن ما ابتدا x^2 رو بسنجیم + 4 رو میزنیم (x ما ثابت)
- $4 + \frac{1}{4}f(x) \leftarrow$ ن ما ابتدا $x \cdot \frac{1}{4}$ رو بسنجیم + 4 رو میزنیم (x ما ثابت)
- $4 - 2f(x) \leftarrow$ ن ما ابتدا $(-2) \cdot x$ رو بسنجیم + 4 رو میزنیم (x ما ثابت)
- $4 - 2f(x) \leftarrow$ ن ما ابتدا x^2 رو بسنجیم - 4 رو میزنیم (x ما ثابت)

جمع بنویس:

- $f(2x+4) \leftarrow$ x ما ابتدا -4 رو بسنجیم $x \cdot \frac{1}{4}$ رو میزنیم (n ما ثابت)
- $f(\frac{1}{4}x+4) \leftarrow$ x ما ابتدا -4 رو بسنجیم x^2 رو میزنیم (n ما ثابت)
- $f(-2x+4) \leftarrow$ x ما ابتدا -4 رو بسنجیم $\frac{1}{4}x$ رو میزنیم (n ما ثابت)
- $f(2x-4) \leftarrow$ x ما ابتدا +4 رو بسنجیم $x \cdot \frac{1}{4}$ رو میزنیم (n ما ثابت)

تأثیر عمودی روی x ما



تأثیر مستقیم روی y ما

نکته: نمودار تابع $f(x)$ و $f(2x+3)$ با هم برابر است ولی دامنه آن‌ها با هم برابر نیست.

تمرین ①: تابع f را به صورت $f(x) = \begin{cases} (2, 4) \\ (1, 2) \\ (0, 3) \\ (-3, 4) \end{cases}$ مفروض است. نمایش گراف هر یک از روابط زیر را مشخص کنید.

$$3f(x) - 2 =$$

$$-2f(x) + 1 =$$

$$f(2x-1) =$$

$$-f(x+1) =$$

$$2f(3x) + 1 =$$

$$-2f\left(\frac{1}{3}x\right) - 1 =$$

$$\frac{1}{3}f(2x-5) + 4 =$$

تمرین ②: دامنه و بردار تابع $f(x)$ را در صورت $D_f = (-1, 4]$ و $R_f = [-2, 3)$ مفروض است.
دامنه و بردار تابع $g(x) = f\left(\frac{1}{3}x-1\right) + 2$ را بنویسید.

www.my-dars.ir

تمرین ③: دامنه تابع f بازه $[-2, 4]$ است. دامنه تابع $f(-2x+1)$ کدام است؟

$$14 \quad \left(-\frac{5}{2}, 1\right]$$

$$13 \quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

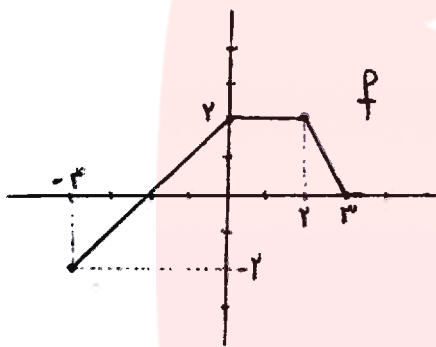
$$12 \quad [-9, 5]$$

$$11 \quad [-3, 0]$$

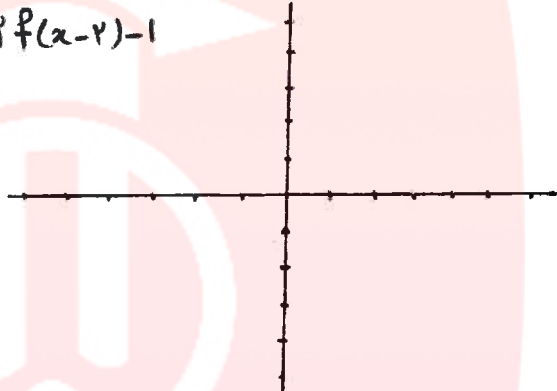
تمرین ④: نقطه $(-1, 2)$ روی نمودار f است. نقاط متناظر آن روی نمودار $f(x) + 3$ کدام است؟

- ۱) $(-4, 5)$ ۲) $(-1, 0)$ ۳) $(0, 5)$ ۴) $(-4, 18)$

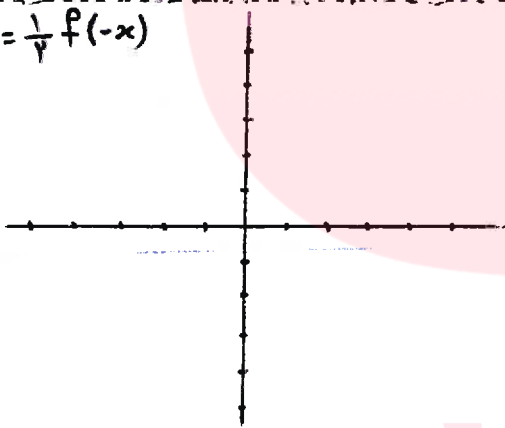
تمرین ⑤: نمودار تابع f شامل زیر صفر من است. حرکت از نمودار f منتهی به f را رسم کنید.



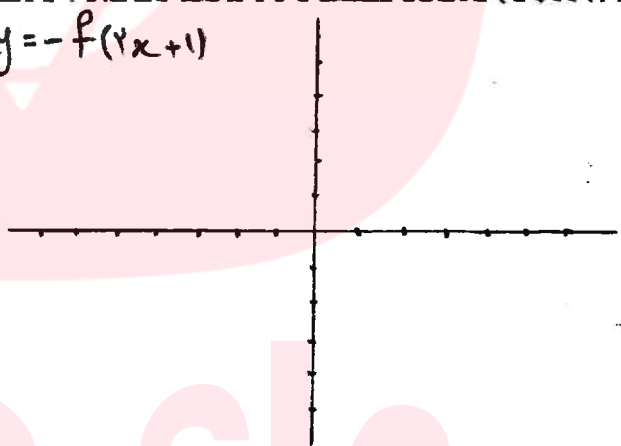
$$y = 2f(x-2) - 1$$



$$y = \frac{1}{3}f(-x)$$



$$y = -f(2x+1)$$



تمرین ⑥: اگر $f(x)$ را رسم کنیم $y = f(x)$ را نقطه $A(2, -3)$ باشد، رسم $y = \frac{1}{3}f(1-x)$ را رسم کنید؟

(اصل منبر)

- ۱) $(-1, -5)$ ۲) $(-3, -1)$ ۳) $(-5, 1)$ ۴) $(-3, 1)$

تمرین ⑦: اگر دامنه تابع f برابر $[-2, 3]$ باشد، دامنه تابع $y = 3f(1 - \frac{x}{3})$ شامل چند عدد طبیعی است؟

(آب قلجی)

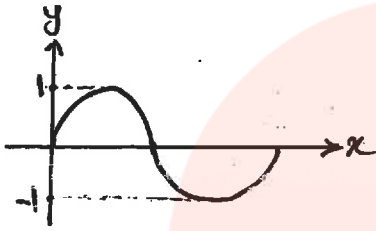
۴۲۴

۳۲۳

۲۲۲

۵۲۱

تمرین ۸) د آنه نندارتابع $y = f(x)$ ، صورت زیره باشه برتابع $f(\frac{x}{p}) = 1 + 3y$ کدوم است؟ (ایه طبعی)



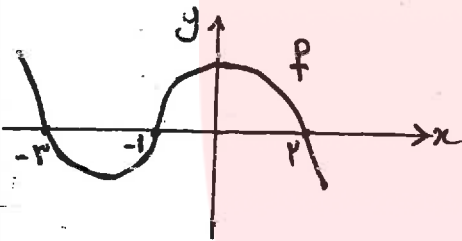
۱) $[-2, 2]$

۲) $[2, 4]$

۳) $[-2, 0]$

۴) $[-2, 4]$

تمرین ۹) د نندارتابع f ، شکل زیره است . مجموع ریشه های معادله $f(2x) = 0$ کدوم است؟ (ایه طبعی)



۱) صفر

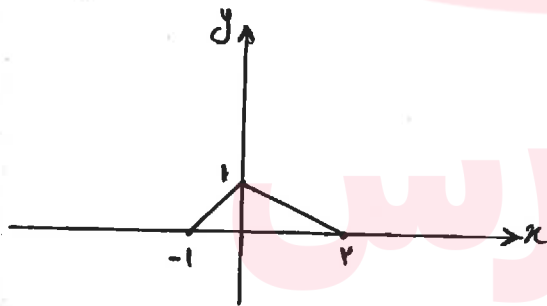
۲) -2

۳) -1

۴) -5

تمرین ۱۰) شکل مقابل مربوط به نندارتابع $y = f(x)$ است مساحت محدود به نندارتابع $y = 2f(\frac{x}{p})$ ،

محدود به ما کدوم است؟



۱) 1

۲) 3

۳) 2

۴) 9

بازگشت ، تنظیبات کارخانه !! $f(x)$ از روی $f(x)$ تغییر یافته \Rightarrow

تمرین ۱۱) د آنه رانده تابع $y = f(\frac{x}{p})$ ، صورت $[-2, 4]$ باشه رانده تابع $f(x)$ کدوم است؟

۱) $[-5, 7]$

۲) $[-5, 8]$

۳) $[-1, 2]$

۴) $[-2, 4]$

تمرین ۱۲) دانه برد تابع $y = -3f(x+2)$ صورت بازه‌ی $(4, 0]$ باشد برد تابع $f(x)$ کدام است؟

- ۱) $[-18, 0]$ ۲) $[-2, 0]$ ۳) $(0, 2]$ ۴) $[-2, 0]$

تمرین ۱۳) دانه برد تابع $y = 2f(-x+1) + 5$ صورت بازه‌ی $(-1, 4)$ باشد برد $f(x)$ کدام است؟

- ۱) $(8, 18)$ ۲) $(-\frac{1}{2}, -3)$ ۳) $(\frac{1}{2}, -4)$ ۴) $(3, 13)$

تمرین ۱۴) دانه رانده تابع $y = f(\frac{x}{3} - 3)$ بازه‌ی $[18, 45]$ باشد رانده تابع $y = f(\frac{1}{3}x + 1)$ کدام است؟

(آب قلیچی)

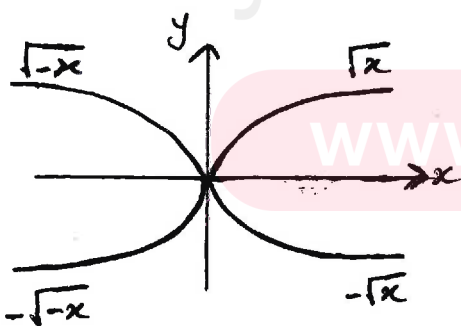
- ۱) $[2, 11]$
۲) $[4, 22]$
۳) $[1, \frac{11}{3}]$
۴) $[2, \frac{11}{3}]$

نکته: دانه برد تابع $f(x)$ ← \ominus نسبت تابع بیانه $-f(x)$ ← نذرار نسبت به محور x ها تغییر می‌شود.

\ominus نسبت x بیانه $f(-x)$ ← نذرار نسبت به محور y ها تغییر می‌شود.

\ominus هم نسبت تابع و هم نسبت x بیانه $f(-x)$ ← نسبت به مبدأ مختصات تغییر می‌شود.

گروه آموزشی عصر



$f(x)$ ← دانه برد تغییر می‌کند (رانه ثابت)
 $f(-x)$ ← رانه تغییر می‌کند (بدر ثابت)
 $-f(-x)$ ← رانه و بدر تغییر می‌کند

تمرین ۱۵، نمودار تابع $y = x^2 + 3$ را ابتدا با ۲ واحد به سمت بالا، سپس یک واحد به سمت راست و در آخر

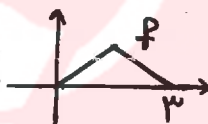
نسبت ۳ محور y را قدری منگیم منابع حاصل کدام است؟

$y = (-x-1)^2 + 3$ (۴)
 $y = -(x-1)^2 + 3$ (۳)
 $y = (-x+1)^2 + 3$ (۲)
 $y = -(x+1)^2 + 3$ (۱)


تمرین ۱۶، نمودار تابع $y = (x-2)^2$ را ابتدا نسبت ۳ محور x را قدری منگیم و نسبت ۳ واحد به سمت راست

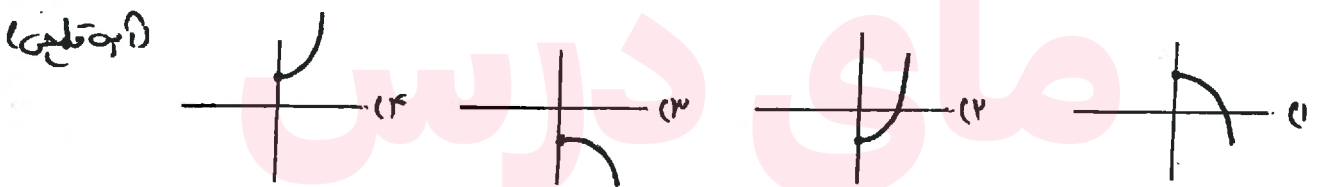
انتقال منگیم و آنرا $g(x)$ به نام حاصل (۱) g کدام است؟

-4 (۱)
 -14 (۲)
 34 (۳)
 14 (۴)

تمرین ۱۷، اگر نمودار f به شکل  باشد نمودار تابع $y = -f(-x)$ در کدام ناحیه دستگاه مختصات

قرار دارد؟ اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴) (آبجکتیو)

تمرین ۱۸، اگر نمودار تابع $y = 1 - f(x)$ به شکل  باشد نمودار $y = f(x)$ در کدام ناحیه است؟



تمرین ۱۹، در تابع نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ ، نسبت ۳ محور y را تغییر ندهیم، ۲ واحد به سمت راست

نسبت انتقال منگیم (همین نمودار حاصل، نسبت از تابع اول دوم را با کدام طول تقاطع منگیم)

-2 (۱)
 14 (۲)
 14 (۳)
 5 (۴)

تمرین (۲۵) ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده سپس منحنی حاصل را یک واحد سمت بالا منتقل می‌کنیم. نقاط تلاقی منحنی جدید با منحنی اصلی کدام است؟ (سراسری و امتحان خارج ۹۹)

۲، ۱

۱، ۲

۲، ۳

۳، ۴

تمرین (۲۶) نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ را ابتدا یک واحد سمت چپ و سپس یک واحد سمت راست حرکت می‌دهیم و در هر مرحله هر نسبت به محور y ما قرینه می‌کنیم، نمودار حاصل خط $x = y = 4$ در دو نقطه می‌دید. ارتفاع هر کشتی ناممکن طول این دو نقطه کدام است؟

۱۵

۲۷

۳۳

۴۴

مای دارس

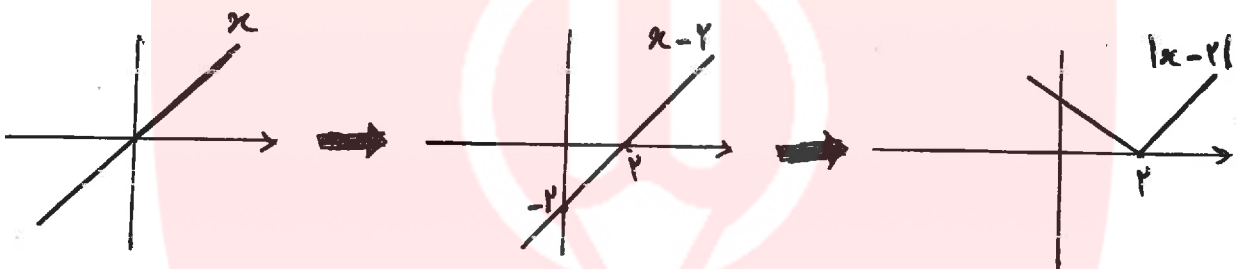
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

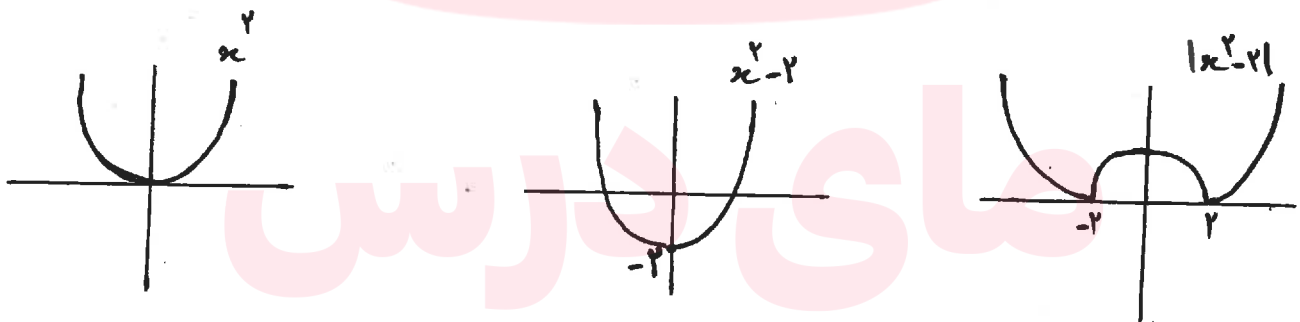
رسم نمودار ۱۴۱ :

۱) ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم
 ۲) قسمت های f از نمودار f را که زیر محور x هستند را آنی می‌کنیم و تقریف آن‌ها را بالا از محور x می‌آوریم می‌کنیم.

مثال ۱: نمودار تابع $y = |x - 2|$ را رسم کنید.



مثال ۲: نمودار تابع $y = |x^2 - 2|$ را رسم کنید.



تکلیف ۱: دانه تابع $f(x)$ ، $f(x)$ با هم برابر است ولی در آنجا الزاماً برابر نیست.
 تکلیف ۲: برد تابع $f(x)$ هیچ وقت متغیر نمی‌شود.

مای دارس
 گروه آموزشی عصر

تمرین ۱ د نمودار حرکت از قدايع راه سه را رسم كنيد. سپس رابطه روبرو آنها را مشخص كنيد.

$$۱) y = |x^2 - ۱|$$

$$۲) y = |x^3 + ۱|$$

$$۳) y = |-x^2 - ۲|$$

$$۴) y = |۲x| + ۳$$

$$۵) y = |x^2 - ۲x|$$

$$۶) y = ||x - ۲| - ۱|$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

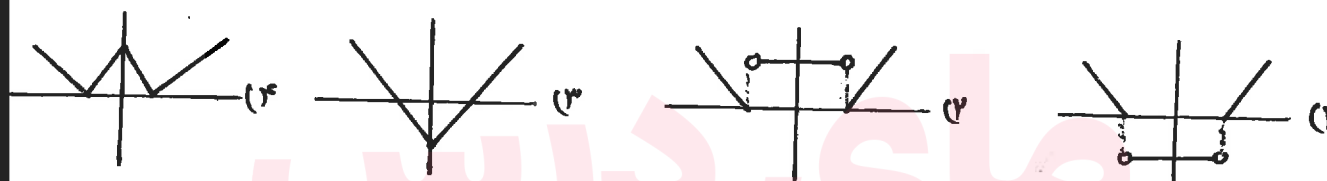
www.my-dars.ir

۷) $y = |x^2 - x - 2|$

۸) $y = |\cos x| \quad x \in [-\pi, \pi]$

۹) $y = -|x - 1|$

تقریب ۲) د منحنی نمایش تابع $f(x) = |x| - 2$ کدام است؟ (بر اساس کتاب ۹۷)



تقریب ۳) د خط معادلی $y = 2x$ و درجه تابع $y = |x^2 - 2|$ را، در نقطه تقاطع آن‌ها بیابید. (۲۰۲۱)

۲۰۲۱

۱۳ صفر

۲۰۲۲

۱۰۱

تمرین ۴) دو منحنی $y = 1x - 2$ را ۳ واحد به سمت چپ انتقال داده و در نتیجه شکل حاصل را نسبت به محور y تعین می‌کنیم و با ضرب ۲ انبساط عمودی می‌دهیم، نسبت قدیم ۳ را نسبت به ۲ واحد به محور x ما رسم می‌کنیم معادله منحنی جدید کدام است؟
(خط سبز)

$$y = -2x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = -2x - 1$$

$$y = -2x + 1$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سرالات امتحان فغان

درستی یا نادرستی عبارت‌ها را مشخص کنید.

۹۸ (س)

الف: هر تابع با تابع $y = k f(x)$ همان برد تابع $f(x)$ است

مغزور ۹۸

۹۹ (س)

ب: دامنه تابع $y = k f(x)$ با دامنه تابع $y = f(x)$ است.

هزار ۹۹ خانج

ج: دامنه تابع $y = -f\left(\frac{x}{k}\right)$ با دامنه تابع $y = -k f(x)$ است.

۱۰۰) در جاس خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف: اگر برد تابع f برابر $[1, 4]$ باشد آنگاه برد تابع $y = 2 f(x)$ برابر با است. هزار خانج ۹۹

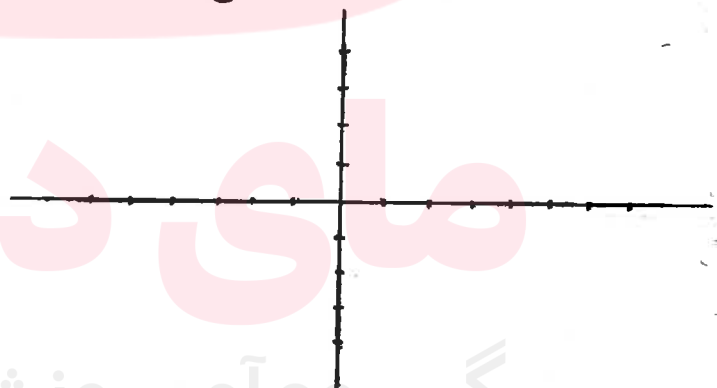
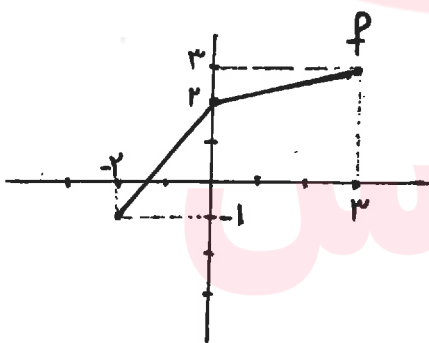
ب: دو قطعی $(-2, 4)$ و $(2, 4)$ در بردار تابع $y = f(x)$ باشد نقاط متناهی در بردار $f(x) = y$ برابر با

هزار ۱۴۰۲

..... است.

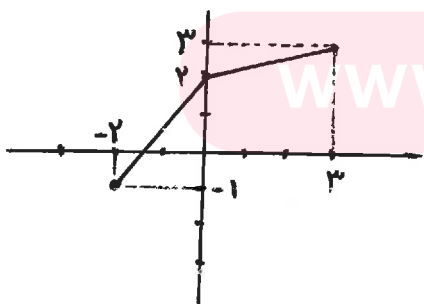
۹۷ (س)

۱۰۱) با استفاده از بردار تابع f بردار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ را رسم کنید.



تیر ۹۸

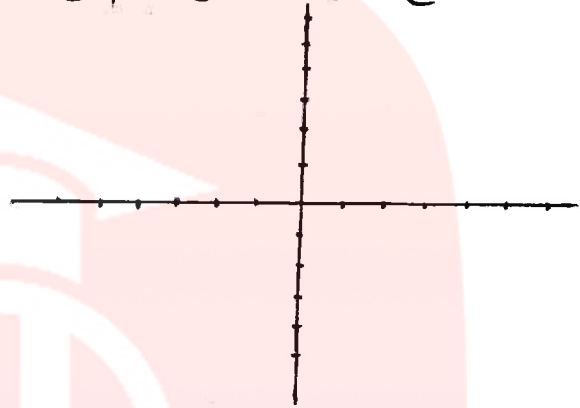
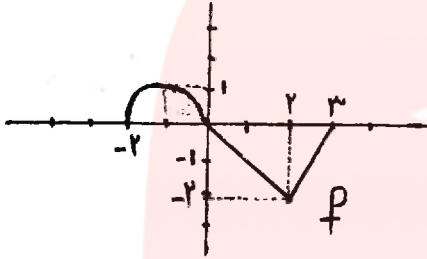
۱۰۲) با استفاده از بردار تابع f بردار تابع $y = f\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ را رسم کنید.



تمرین ۹۹

۵) نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است.

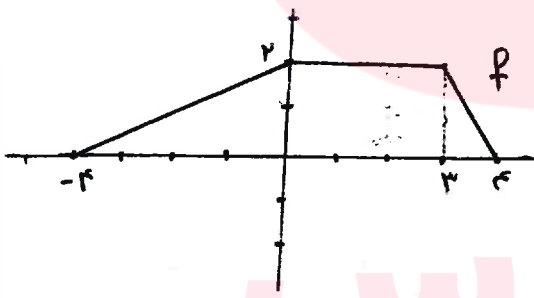
انفرد نمودار تابع $y = 2f(\frac{1}{3}x)$ را رسم کنید.



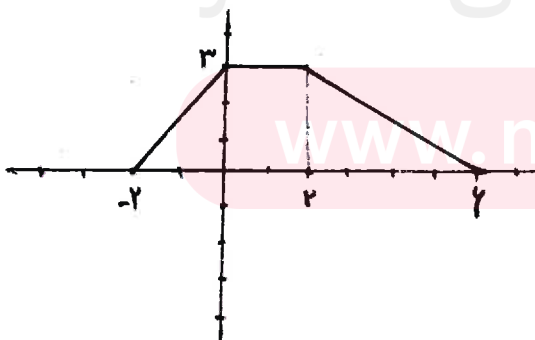
به راهنمای تابع $y = 2f(\frac{1}{3}x)$ را تعیین کنید.

تمرین ۹۸

۶) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار تابع $y = \frac{1}{4}f(4x)$ را رسم کنید.



۷) نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $y = \frac{1}{3}f(2x)$ را رسم کنید. تمرین ۹۹



۹) مقدار تابع $y = f(x)$ رسم شده است با استفاده از این مقدار $y = -2f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید. سختی ۹۸



۱۰) با توجه به مقدار تابع $y = f(x)$ مقدار تابع $y = f(-x) + 2$ را رسم کنید. مقدار ۱۴۰۰

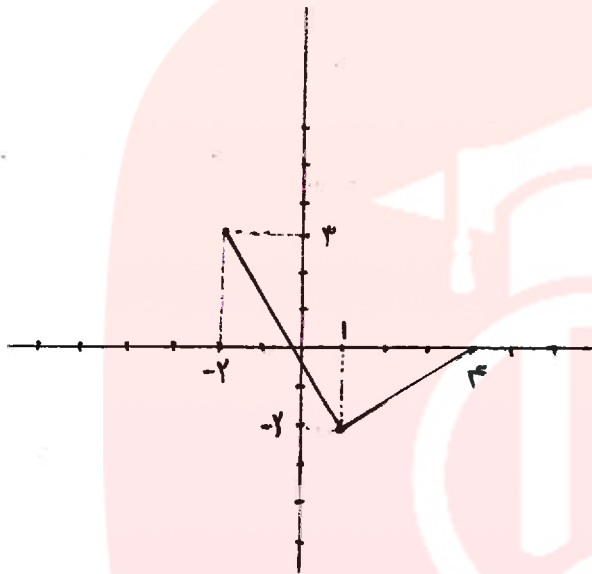


۱۱) اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $[-1, 3]$ و بردار آن $[0, 2]$ باشد دامنه و بردار $f(\frac{x}{2})$ را بیابید. نمره ۱۴۰۱

۱۲) بردار تابع f بازه $[-3, 1]$ است. بردار تابع $y = -2f(\frac{1}{2}x - 1) + 3$ کدام است؟ مقدار ۱۴۰۱

- $[-8, 0]$
 $[-2, 0]$
 $[1, 9]$
 $(-1, 2]$

شهریور ۱۴۰۱

۱۲) نمودار تابع f به صورت زیر است.اغت د نمودار تابع $f(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید.دو دامنه تابع f را بدست آورید.۱۳) نمودار تابع $g(x) = 3x$ را ابتدا به واحد g رسم راست انتقال من g رسم کنید و سپس عرض تقاطع را دو برابر کنید.

شهریور ۱۴۰۲

مناظره تابع جدید را بنویسید.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

۱۵) تابع وارون:

صفحه ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی

وارون کردن یک تابع یعنی این که جایی که ما در تابع داریم را عوض کنیم.

① وارون از زوج مرتب ها: جایی که اول زوج را عوض کنیم.

مثال: وارون تابع $f = \{(1, 2), (3, 5), (5, 1)\}$ را بنویسید.

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 3), (1, 5)\}$$

نکته: جهت از عوض کردن جایی که ما در f^{-1} داریم: $D_f = R_{f^{-1}}$ و $D_{f^{-1}} = R_f$

تمرین ①: تابع f و وارون آن را در سطر است α را بنویسید.

$$f = \{(2, -4), (3, -2), (4, 4)\}$$

$$f^{-1} = \{(-4, 2), (\alpha + b, 4), (-2, 3)\}$$

تمرین ②: تابع $f(x) = \{(1, 3), (2, 5), (4, -2)\}$ را در سطر است موارد خواسته شده را بنویسید.

$$f^{-1}(x) =$$

$$f \circ f^{-1} =$$

$$f^{-1} \circ f =$$

تمرین ۳) آید $f = \{(1, -1), (3, 4), (-2, 5)\}$ و $g = \{(4, 1), (2, 2), (-2, 4)\}$ دو تابع باشند تابع

$f \circ g^{-1}$ کدام است؟

- ۱) $\{(3, 4), (1, -1)\}$ ۲) $\{(4, 5)\}$ ۳) $\{(-2, 4)\}$ ۴) \emptyset

تمرین ۴) آید $f = \{(1, 2), (2, 5), (0, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(2, 3), (-1, 4), (4, 1), (3, 0)\}$

تابع $f \circ g^{-1}$ کدام است؟

(سراسری تجربی ۸۵)

- ۱) $\{(1, 3), (0, 5)\}$ ۲) $\{(2, 4), (3, 5)\}$ ۳) $\{(2, 0), (-1, 4)\}$ ۴) $\{(5, 3), (-1, 1)\}$

تمرین ۵) دو تابع $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$

(سراسری ریاضی خارج ۹۰)

مفروضه اند تابع $f \circ g^{-1}$ کدام است؟

- ۱) $\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\}$ ۲) $\{(5, 3), (5, 5), (4, 3)\}$

- ۳) $\{(4, 4), (1, 1), (4, 4)\}$ ۴) $\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$

تمرین ۶) دو تابع $f = \{(2, 5), (4, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروضه اند

(سراسری تجربی ۹۴)

آید $f^{-1}(g(2a)) = 4$ باشد a کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

نتیجه جمع د وارون «ترکیب در تابع»

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

جاهای شش عوض میشه، هر دو معکوس میشن ←

تمرین ۷: دو تابع $f = \{(1, 2), (-2, 4), (3, 5)\}$ و $g = \{(3, 4), (4, 5), (2, 2)\}$ سفارش اند

هر یک موارد خواسته شده را بنویسید.

$$(f \circ g)^{-1} =$$

$$(g \circ f)^{-1} =$$

$$f \circ g^{-1} - g =$$

$$\frac{(f \circ g)^{-1}}{g} =$$

تمرین ۸: اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 2)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 2), (3, 1)\}$ باشند

(در این سوال ریاضی ۹۸)

تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

$$\{(4, 2), (3, 5)\} \text{ ا}$$

$$\{(4, 2), (5, 2)\} \text{ ب}$$

$$\{(3, 5), (2, 4)\} \text{ ج}$$

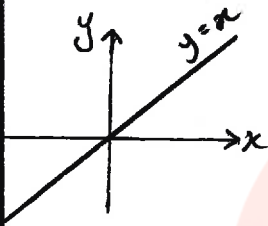
$$\{(5, 2), (2, 4)\} \text{ د}$$

مدرس: مهدی سپهوند

فصل اول: تابع

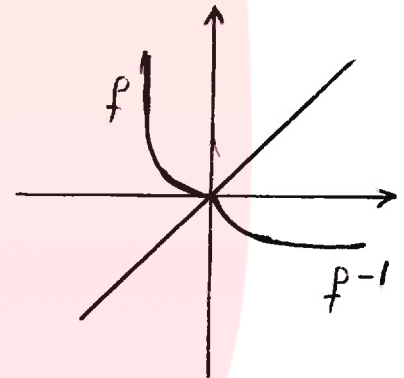
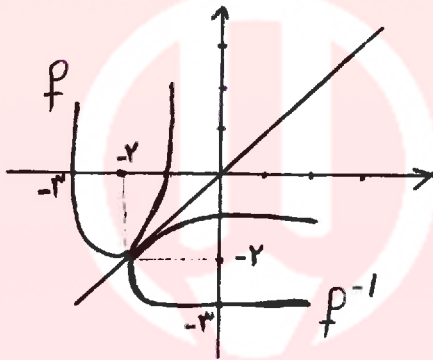
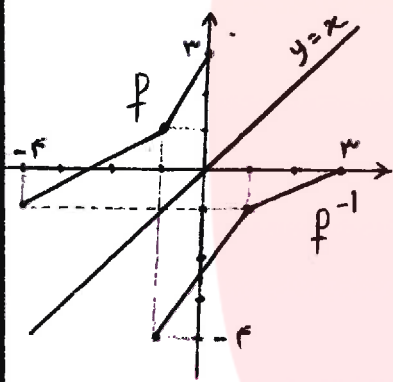
دوازدهم تجربی

۵) وارون در نمودارها:



برای رسم وارون یک نمودار ← قرینش کن، انبساط به $y=x$ رسم کن.

مثال در هر مورد نمودار f و f^{-1} رسم شده است.



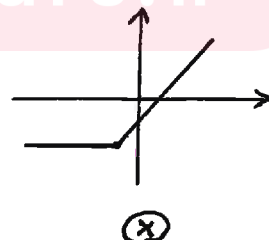
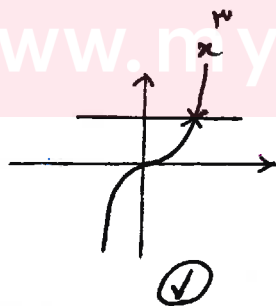
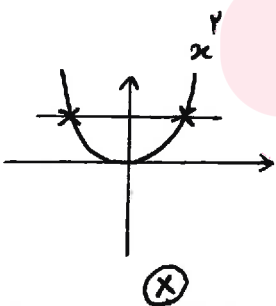
یادآوری ۱: فقط تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد.

یادآوری ۲: یک به یک بودن یعنی این که ← در زوج مرتب ما ← مؤلفه دوم نگذاریم نه اینکه باقیمانده
در نمودار ← هر خط موازی محور x یا y تنها در یک نقطه نمودار را قطع کند.

* تابع $f = \{(1,1), (2,3), (3,1)\}$ یک به یک نیست چون مؤلفه دوم نگذاریم دارم

* تابع $f = \{(1,2), (2,4), (3,5)\}$ یک به یک است. وقت کنیم ← $f = \{(1,2), (2,4), (3,5)\}$

* نمودارهای زیر وقت کنیم



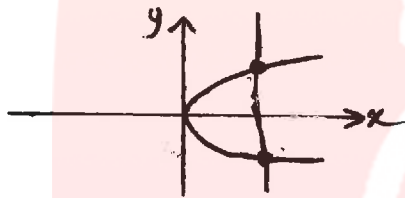
www.nay-dars.ir

یادآورس ۲: تابع بودن یعنی این که ← در زوج مرتب ما، مولف اول نگذاریم نداشته باشیم.
 ← در نمودار، هر خط موازی محورین ما نهایتاً در یک نقطه نمودار را قطع کند

(۲ از این هر دو در نقطه یک خودمون داشته باشیم)

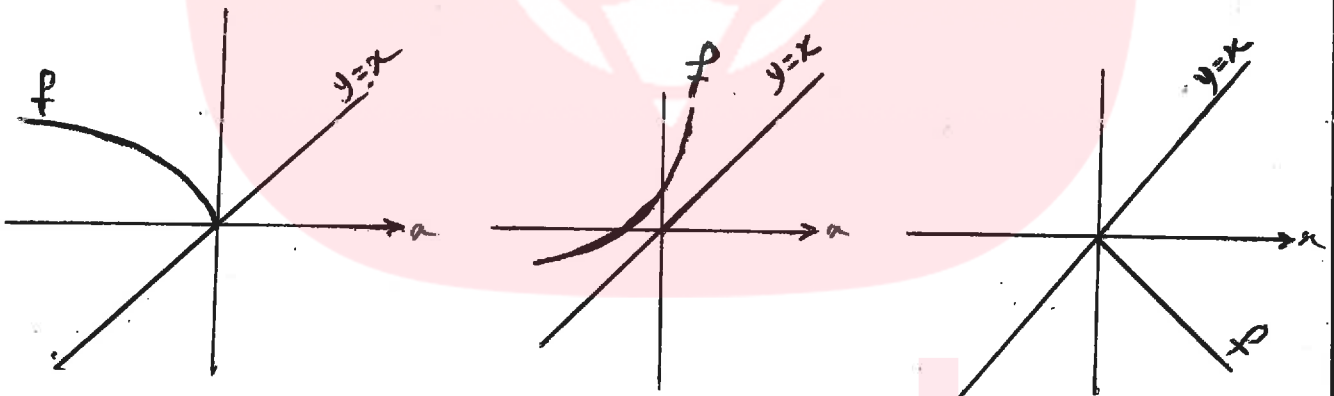
$$f = \{(1, 3), (1, 4), (2, 8)\}$$

مثلاً رابط رو بر تابع نیست چون مولف اول نگذاریم



معنی نمودار مقابل نیز تابع نیست ←

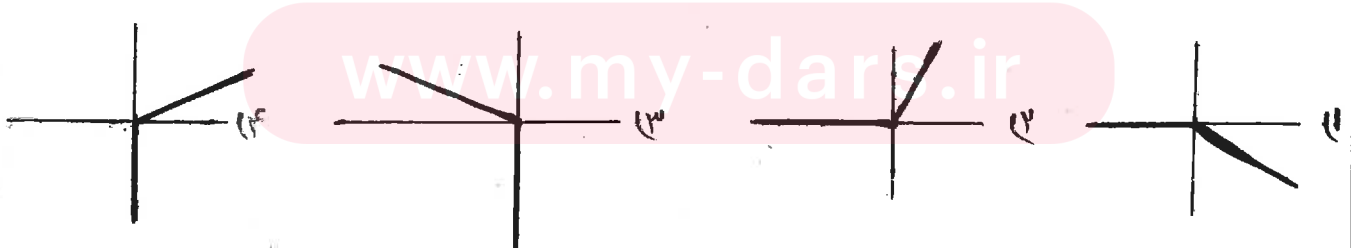
تمرین ۱: نمودار وارون حرکت از تابع زیر را رسم کنید.



تمرین ۲: معنی ثابت معلوم تابع $y = 2x + |2x|$ کدام است؟ (سازش ریاضی ۷۰)

گروه آموزشی عصر

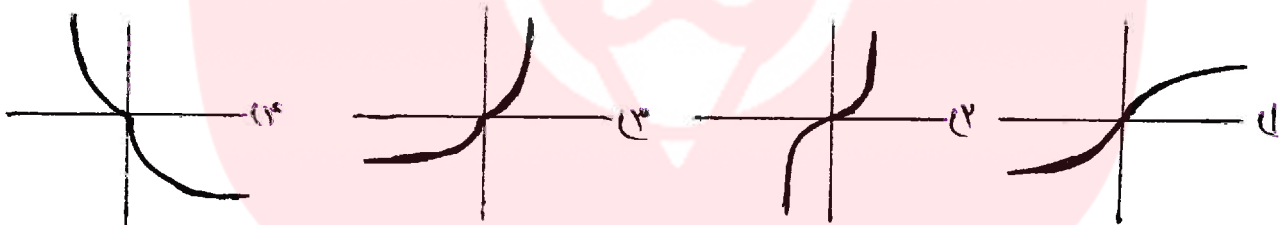
www.my-dary.ir



تمرین ۳: آنگاه $f(x) = x|x|$ باشد (فقط نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟) (سازش تعیین ۹۵)



تمرین ۴: تابع منتهی تابع وارون $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟



تمرین ۵: نمودار تابع $y = 1 - \sqrt{x}$ وارون نمودار در نقطه قطع می‌کند؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) صحیح (۴)

مای درسی
گروه آموزشی عصر

تمرین ۶: تابع وارون کدام تابع زیر صحیح است؟

۱ (۱) $|x|$ ۲ (۲) $\sqrt[3]{x}$ ۳ (۳) $2x - |x|$ ۴ (۴)

③ وارون یک نقطه: $f(x) = 5 \rightarrow f(5) = 2$ $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$

مثلاً اگر نقطه‌ای (۱، ۲) عضو f باشد \leftarrow (۲، ۱) عضو f^{-1} است.

$$\begin{cases} D_f = R_{f^{-1}} \\ D_{f^{-1}} = R_f \end{cases}$$

نکته: دامنه f با برد f^{-1} برابر است و بالعکس \leftarrow

تمرین ۱: تابع $f = \{(2, -1), (3, 4), (4, -2), (5, 0)\}$ داده شده است. حاصل عبارت‌های

$$f(4) + 3f(2) =$$

$$f^{-1}(-1) - f(3) =$$

زیر را حساب کنید.

تمرین ۲: اگر $f = \{(2, -1), (0, 1), (1, 2), (1, -5)\}$ باشد $\frac{f}{f^{-1}}$ شامل چند زوج مرتب است؟

۴ جفت

۱۳

۲

۱

تمرین ۳: تابع $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 3x}$ داده شده است. برد تابع f^{-1} کدام است؟

۴ $[-5, 0)$

۳ $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

۴ \mathbb{R}

۱ $\{0, 3\}$

④ وارون یک تابع :

برای پیدا کردن وارون یک تابع باید x و y را در آن جایگزین نمود و آن را تغییر دادیم.

$$x \rightarrow y \quad \sqrt{\quad} \rightarrow (\quad)^2$$

$$+ \rightarrow - \quad \sqrt[3]{\quad} \rightarrow (\quad)^3$$

مثال ۱: وارون تابع $f(x) = 3x + 4$ را پیدا کنید.

$$f(x) = 3x + 4 \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} x = 3y + 4 \rightarrow x - 4 = 3y \rightarrow \frac{x - 4}{3} = y$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 4}{3}$$

مثال ۲: وارون تابع $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$ و همچنین دامنه و بردار $f(x)$ را مشخص کنید.

$$D_f \Rightarrow x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \text{ mm} \rightarrow R_{f^{-1}} = x \geq 1$$

$$R_f \Rightarrow x \geq 3 \text{ mm} \rightarrow D_{f^{-1}} = x \geq 3$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} + 3 \rightarrow x = \sqrt{y-1} + 3 \rightarrow x - 3 = \sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-3)^2 = y-1 \rightarrow x^2 - 6x + 9 = y-1 \rightarrow y = x^2 - 6x + 10$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 10 \quad | \quad f^{-1}(x) = (x-3)^2 + 1$$

تمرین ۱: تابعها وارون حرکت از رابطه های زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 3x + 2$$

$$g(x) = \frac{-1}{y}x + 3$$

$$h(x) = \frac{5x + 2}{3}$$

$$k(x) = 3 - \sqrt{x + 2}$$

$$o(x) = -1 - \sqrt{4x + 2}$$

$$m(x) = \frac{2}{2 + x}$$

$$n(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}$$

تمرین ۲: معکوس تابع $f(x) = \sqrt{x+3}$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq 0 \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq -3 \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 3, x \geq -3 \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 3, x \geq 0 \quad (۳)$$

روش دوم: جایگزینی

تمرین ۳: وارون تابع $f(x) = 2x + 4$ بازه $[-1, 3]$ کدام است؟

$$f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}, -1 \leq x \leq 3 \quad (۲)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}, -1 \leq x \leq 3 \quad (۱)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}, 2 \leq x \leq 10 \quad (۴)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}, 2 \leq x \leq 10 \quad (۳)$$

روش اول: جایگزینی

تمرین ۴: ضابطه وارون تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ کدام است؟ (سراسر تجربی ۹۲)

$$y = -x^2 - 4x + 5, x \leq 2 \quad (۲)$$

$$y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2 \quad (۱)$$

$$y = -x^2 + 4x - 5, x > 1 \quad (۴)$$

$$y = x^2 - 4x + 5, x > 1 \quad (۳)$$

تلفظ ترکیب f و f^{-1} :

$$f \circ f^{-1} = x$$

$$f^{-1} \circ f = x$$

ترکیب یک تابع و وارده آن همواره برابر x استوار. (تابع همانی)
از این موضوع برای اثبات استفاده می‌کنیم.

مثال: نشان دهید که تابع $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = \frac{x-2}{3}$ وارده هم‌بندند.

$$f \circ g = f(g(x)) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$g \circ f = g(f(x)) = \frac{(3x+2)-2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

تمرین ۱: در سوالات زیر نشان دهید که تابع f و g وارده هم‌بندند.

$$f(x) = 2x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{4}(x-4)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{3x+2}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}(x^3-2)$$

$$f(x) = -2 + \sqrt{x+1}$$

$$g(x) = (x+2)^2 - 1$$

تمرین ۲: اگر $f(x) = -2 + \sqrt{x+1}$ و $f(g(x)) = x$ باشد، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.

تمرین ۳: اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $f(g(x)) = x$ باشد، ضابطه تابع $g(x)$ کدام است؟

$$\frac{1}{4}(x-1)^2, x > 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{4}(x-1)^2, x > 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}(x+1)^2, x > 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}(x+1)^2, x > 1 \quad (3)$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

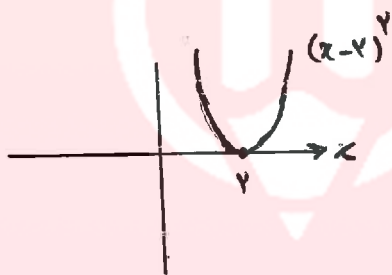
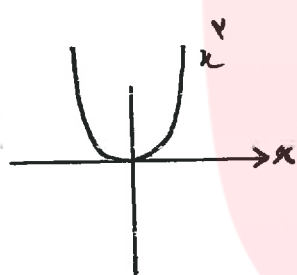
www.my-dars.ir

محدود کردن دامنه تابع:

ما در این فصل یک تابع یک به یک نیست و وارون پذیریم نسبت به y با محدود کردن دامنه آن متوانیم یک تابع یک به یک و وارون پذیر بسازیم.

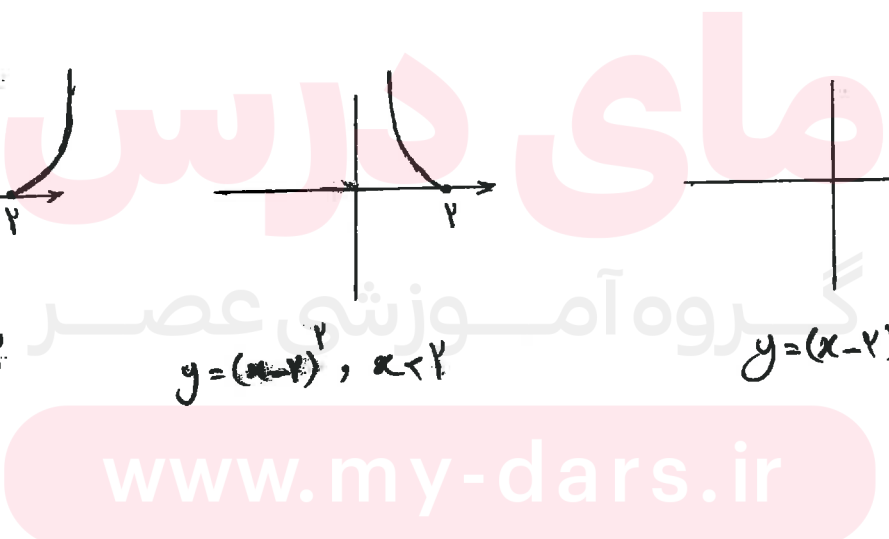
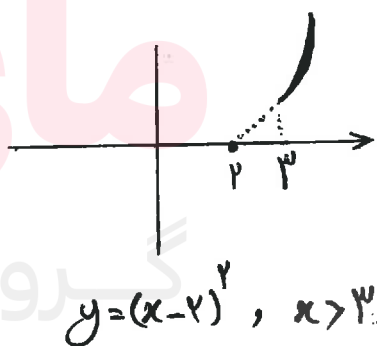
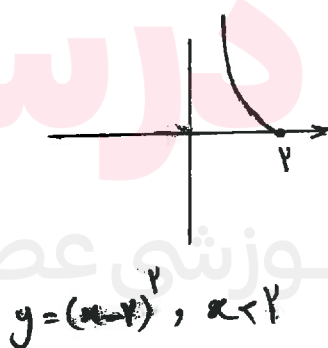
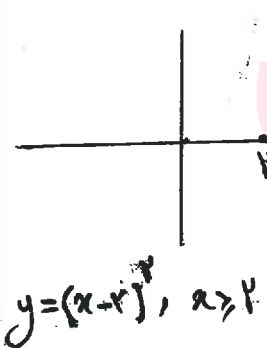
محدود کردن دامنه یعنی این که \leftarrow تقعا قسمتی از دامنه تابع را در نظر بگیریم.

مثال: با محدود کردن دامنه تابع غیر یک به یک $y = (x-2)^2$ و تابع یک به یک می‌توانیم وارون کنیم.



مثال: ابتدا تابع وارون می‌کنیم

می‌بینیم که این تابع در \mathbb{R} یک به یک نیست ولی می‌توانیم دامنه آن را محدود کرده و تابعی یک به یک بسازیم.



تمرین ۱: تابع زیر عین یک هشتاد و یک باره در کلاس (امتیازها) تابعی یک یک بسازید. (رابطه به رسم)

$$y = |x - 1|$$

$$y = |x - 1| + 3$$

$$y = -(x + 1)^2 + 4$$

$$y = x^2 - 4x$$

$$y = x^2 - 4x - 8$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۲: اگر تابع $y = x^2 - 2x + 3$ در بازه $[\alpha, +\infty)$ وارون تغییر باشد حد اکثر مقدار α را بیابانید.

تمرین ۳: اگر تابع $y = |x+2| - 1$ در بازه $(-\infty, \alpha]$ یک به یک باشد حداقل مقدار α را بیابانید.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوالهای امتحان نهایی

۱) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

الف: دو تابع $f(x) = -\frac{2x+2}{4}$ و $g(x) = -\frac{7}{4}x - 3$ وارون یکدیگرند.

خرداد ۹۸

ب: دو تابع با منابع وارون $f(x) = x^3$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ وارون یکدیگرند.

شهریور ۱۴۰۰

۷) در جایی خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف: اگر $f = \{(2,3), (3,5)\}$ باشد حاصل $f^{-1}(3)$ برابر است.

خرداد ۱۴۰۱

ب: منابع وارون تابع $y = x^3$ برابر است.

شهریور ۱۴۰۱

پ: اگر $y = 3 + \sqrt{2x-1}$ باشد مقدار $(f \circ f^{-1})(5)$ برابر با است.

خرداد ۱۴۰۲

د: اگر $f(x) = 2x^2 - 1$ باشد حاصل $f^{-1}(15)$ برابر است.

دی ۱۴۰۱

۳) منابع وارون هر یک از توابع زیر را درست آوریید.

دی ۹۹ $g(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$

شهریور ۹۹ $f(x) = \frac{7}{4}x - 3$

خرداد ۹۹ خارج $y = \sqrt{x+2}$

④ در هر صورت نشان دهید که در تابع داده شده وارون یکدیگرند.

رس ۹۸ $f(x) = 2x - 4$ $g(x) = \frac{x+4}{3}$

خبرار ۹۹ خارج $f(x) = \frac{-8x+3}{2}$ $g(x) = \frac{2-2x}{8}$

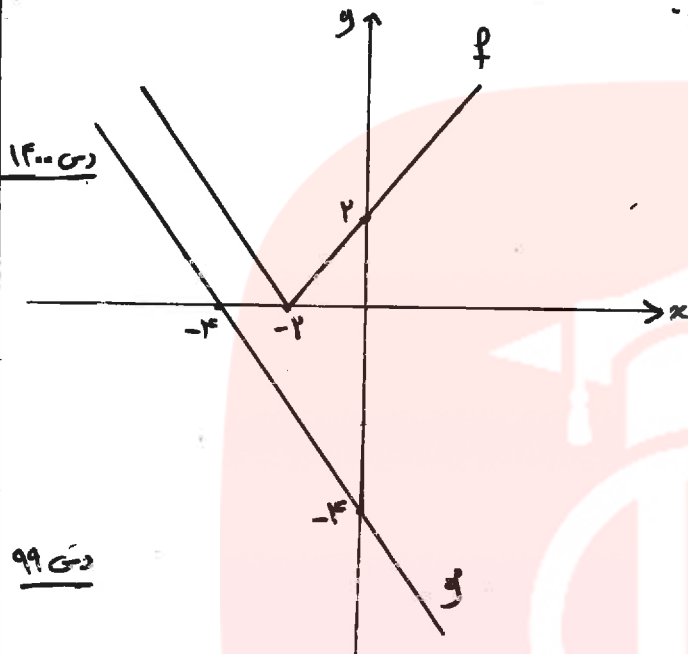
خبرار ۱۴۱ خارج $f(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ $g(x) = -\frac{2x+2}{7}$

⑤ با محدود کردن دامنه تابع $y = x^2 - 5$ و تابع وارون پذیر بسازید. دامنه تابع جدید را بنویسید. رس ۹۸

⑥ با محدود کردن دامنه تابع $y = x^2 - 4x + 5$ تابع یک به یک درست کنید. رس ۹۹ خارج

⑦ آنگاه $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ ، $g(x) = x^2$ باشد مقدار $f^{-1}(g^{-1}(2))$ و $g^{-1}(f^{-1}(2))$ را بدست آورید. رس ۹۷

۸) با توجه به نمودار f و g به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف: مقدار f را در صورت وجود g در دست آورید.

$$(f \circ g)(-1) =$$

$$(g \circ f)(-1) =$$

ب: مقدار $(f \circ g)$ را بدست آورید.

پ: با جدول کردن دامنه f ، بازه‌ای را مشخص کنید که تابع f یک به یک باشد.

دستی ۱۴۰۰

دستی ۹۹

دستی ۹۹

۹) اگر دامنه تابع $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ برابر $(-5, 2]$ باشد، فاصله g و دامنه تابع وارون را بدست آورید. - مغز پرور ۱۴۰۲

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



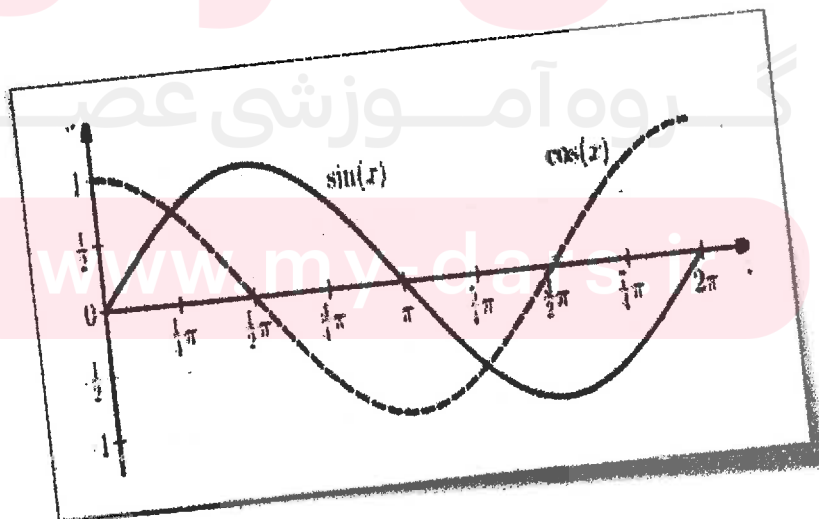
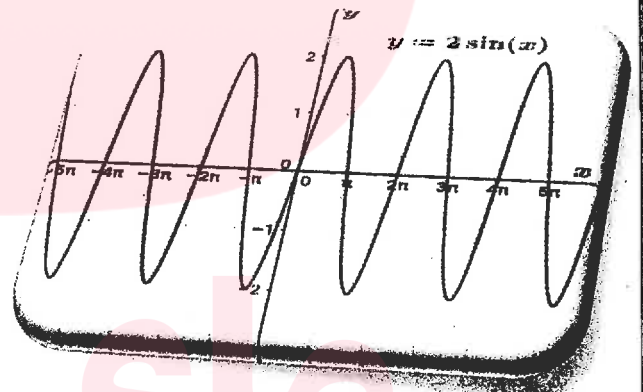
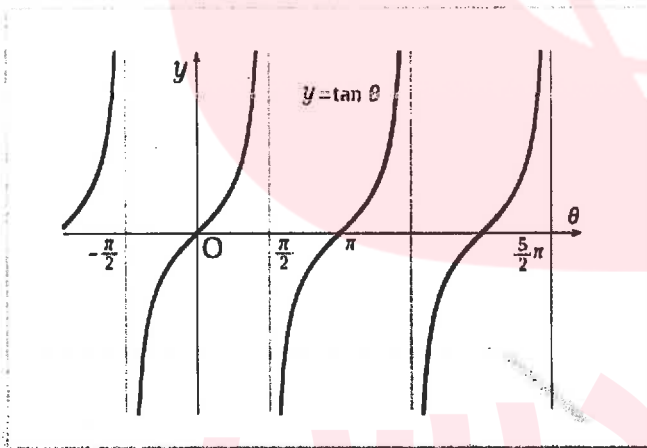
مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

● فصل دوم

مفاهیم



- ۱ $a \sin bx + c$ و $a \cos bx + c$ ۸۹
- ۲ تانژانت ۹۹
- ۳ نسبت های مثلثاتی 2α ۱۱۱
- ۴ عبارات مثلثاتی ۱۱۹

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

صفحه ۳۲ تا ۳۷ کتاب درسی

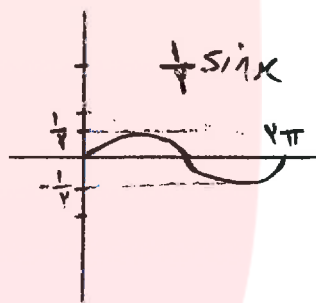
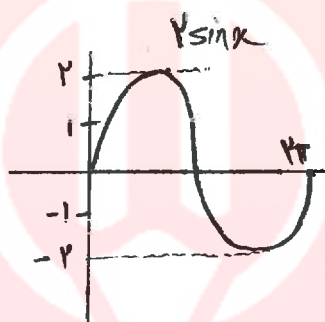
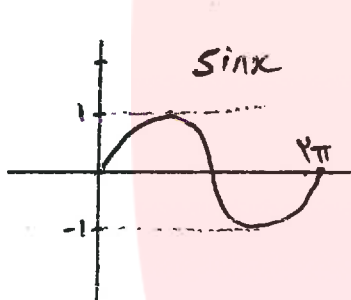
$$a \cos bx + c$$

$$a \sin bx + c$$

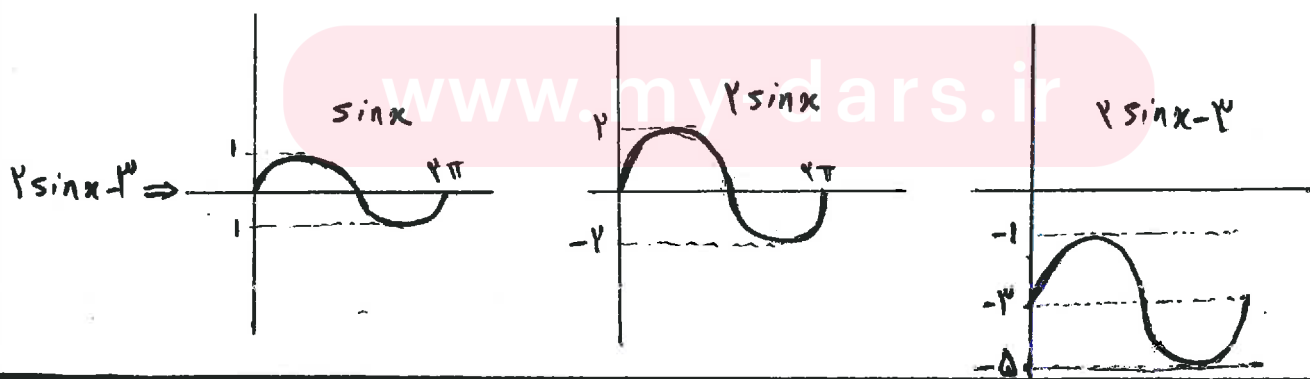
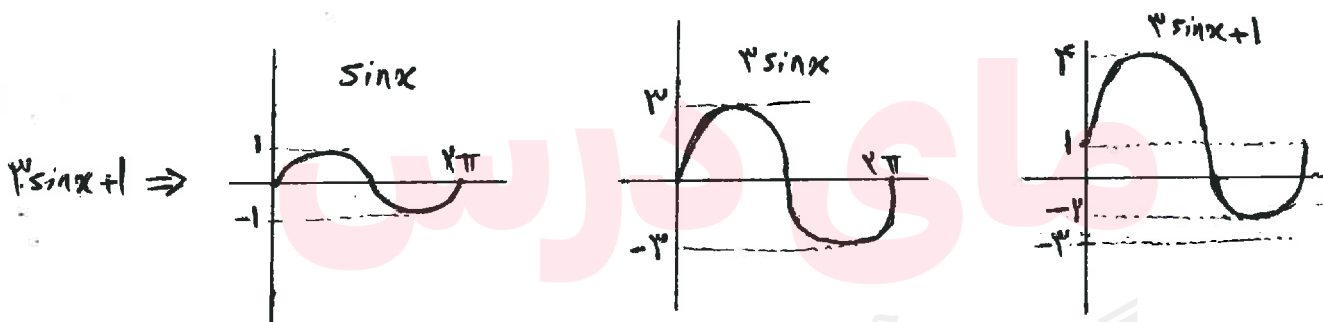


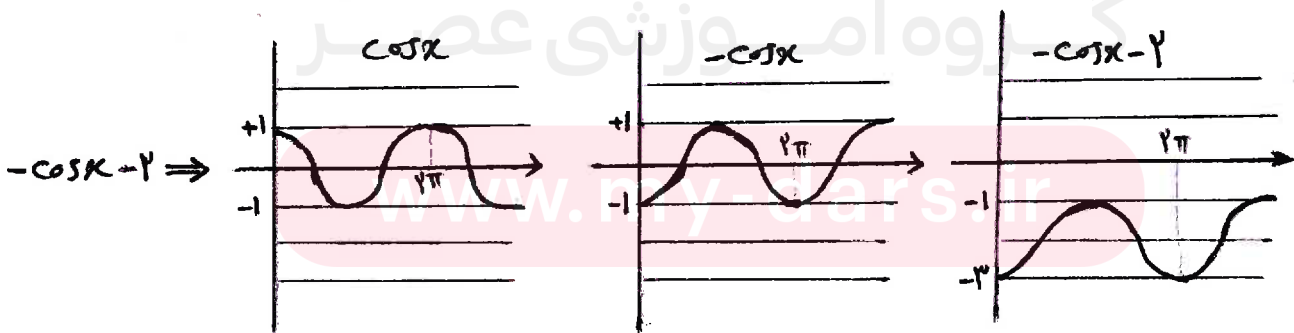
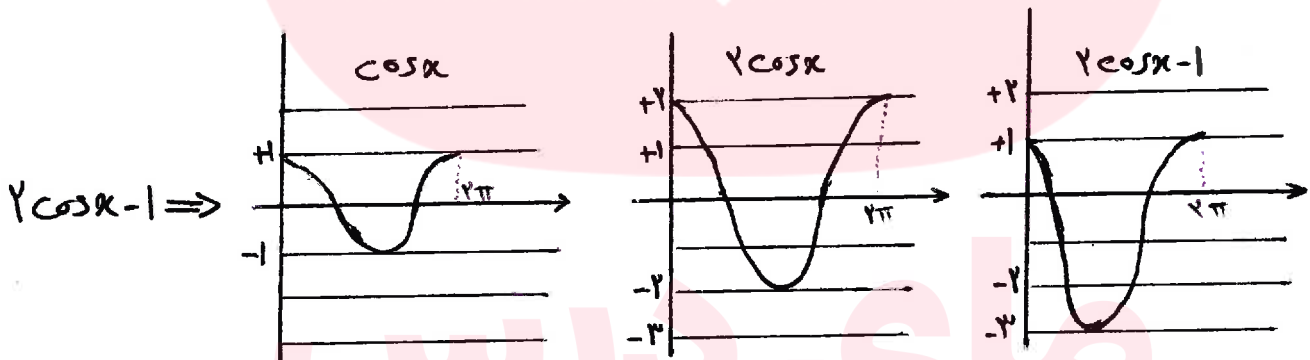
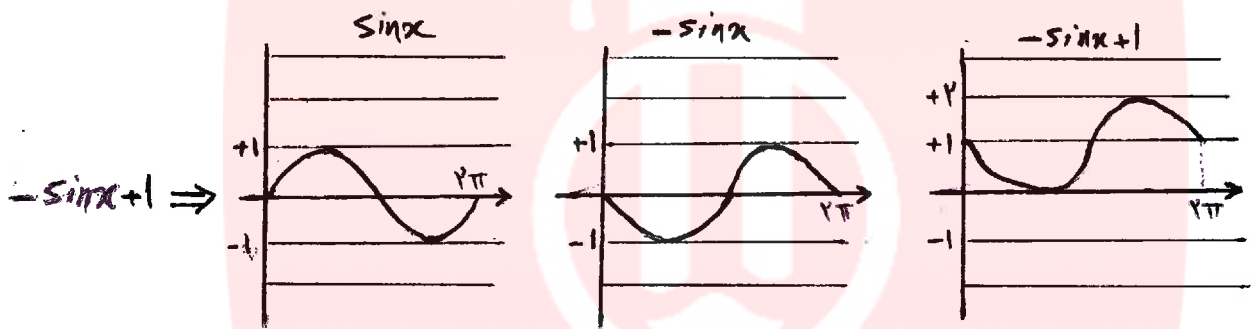
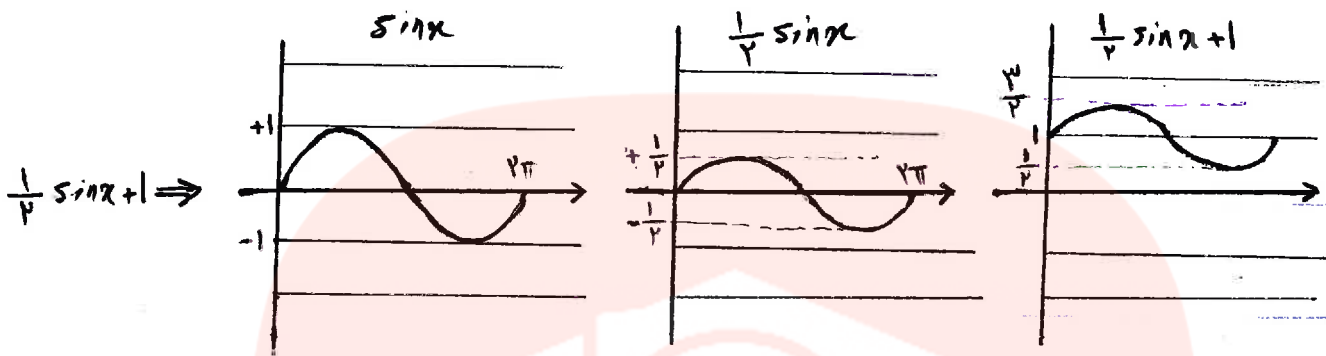
همان‌گونه که در فصل یک یاد گرفتیم، وقتی به محور میاراشیت y تابع مثل $f(x)$: تابع $f(x)$ در راستای محور y ها

انتقال و یا انبساط و یا منقبض شدن $\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow 2f(x) \leftarrow \text{انبساط عرضی} \\ \leftarrow \frac{1}{2}f(x) \leftarrow \text{انقباض عرضی} \end{array} \right.$



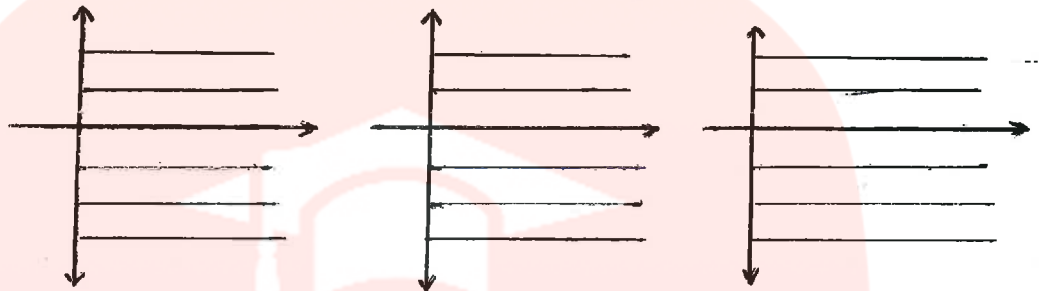
حالات خاص تابع $\sin x$ و $\cos x$ را در راستای محور y ، علاوه بر انبساط و انقباض، انتقال هم بررسی می‌کنیم.



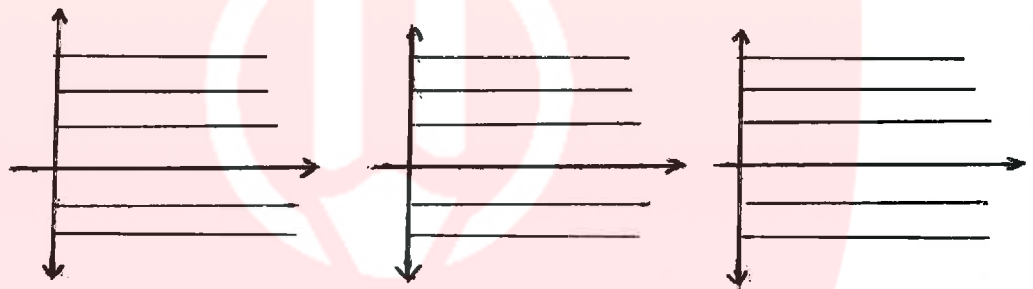


تمرین ۱: مقدار حرکت از تابع زیر را رسم کنید. [۲۳، ۲۴]

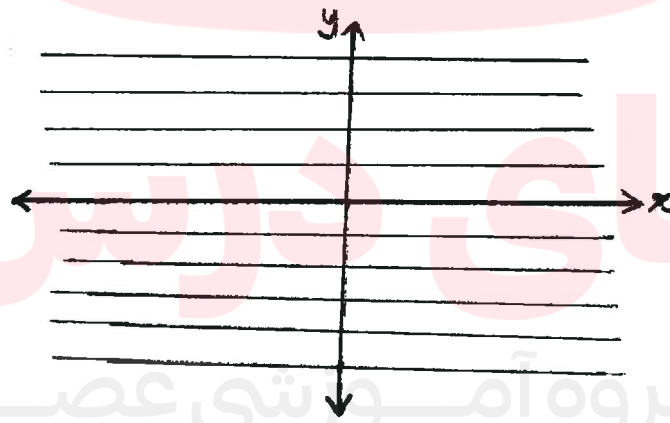
$y = 2\sin x - 1 \Rightarrow$



$y = 2\cos x + 1 \Rightarrow$



تمرین ۲: مقدار تابع $y = -\frac{1}{2}\sin x - 2$ را در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ رسم کنید.



$\max = |a| + c$

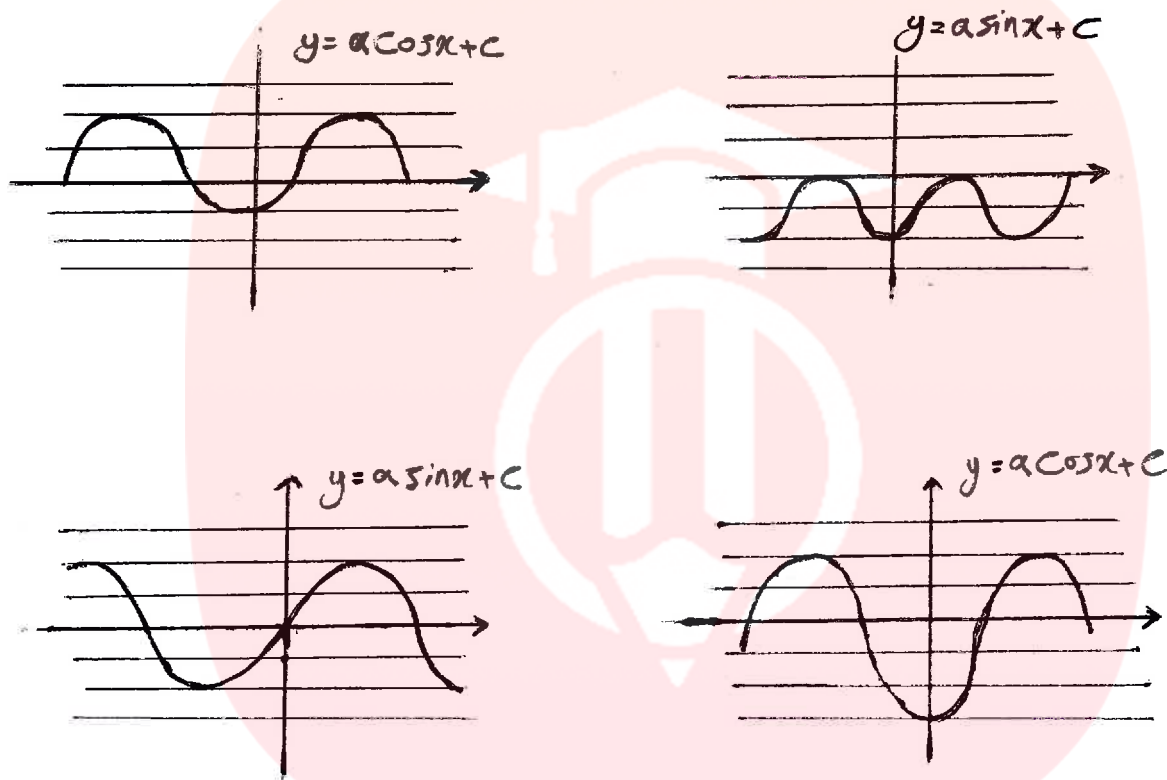
$\min = -|a| + c$

$|a| = \frac{\max - \min}{2}$

$c = \frac{\max + \min}{2}$

نتیجه امتحان تعیین نمره است:

تمرین ۳ در هر مورد مقادیر α و C را بیابید و تابع را بنویسید.



تمرین ۴، ماکزیمم و مینیمم هر کدام از توابع زیر را معاینه کنید.

$$y = 2 \cos x - 1$$

$$y = -3 \sin x + \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{3} \cos x - \pi$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تا این جا یاد گرفتیم که چگونه α و c را پیدا کنیم. حالا بدیم سرغ b :

برای پیدا کردن b باید از دوره تناوب کمک بگیریم.

دوره تناوب (T) : کمترین عددی که من راه تکرار میسه نقطه می شود. مثلا دوره تناوب $\sin x$ و $\cos x$

برابر 2π است. بقیه تابع تکرار همین دوره تناوب املی است.



تابع تناوب : اگر در تابع f یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشد که وقتی به اندازه T در راستای

محور x ما جلو یا عقب برویم باز هم تابع f بدست آید. آن تابع تناوب می گوییم.

$$f(x \pm T) = f(x), \quad x \pm T \in D_f$$

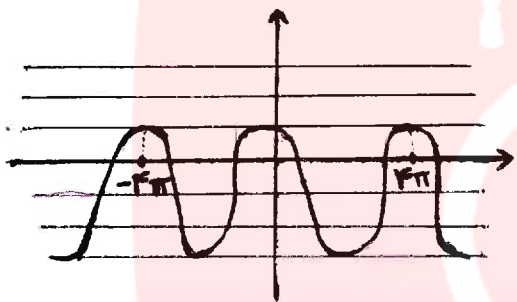
مثلا: $f(\frac{\pi}{3} \pm 2\pi) = f(\frac{\pi}{3})$ ← در تابع $\sin x$ و $\cos x$

www.my-dars.ir
 نکته: در تابع $\sin x$ و $\cos x$ دوره تناوب اصلی (2π) برابر است با
 حاصلی دو دوره متوالی
 دو برابر قله و دره متوالی

$$T = \frac{2\pi}{|b|}$$

نقطه، دوره تناوب ← در تابع $\alpha \sin bx + c$, $\alpha \cos bx + c$:

مثال: نمودار زیر مربوط به تابع $y = \alpha \sin bx + c$ است مقادیر α , b , c را بیابید و منابع را کامل کنید.



$$|\alpha| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{1 - (-3)}{2} = 2 \rightarrow \alpha = \pm 2$$

$\alpha = \pm 2$ با توجه به تکرار $c = -1$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \pm \frac{1}{2}$$

$y = -2 \sin(\frac{1}{2}x) - 1$ یا $y = 2 \sin(-\frac{1}{2}x) - 1$

نقطه ضرایب مهم: α و b علامت ← \sin صعودی $\alpha b > 0$

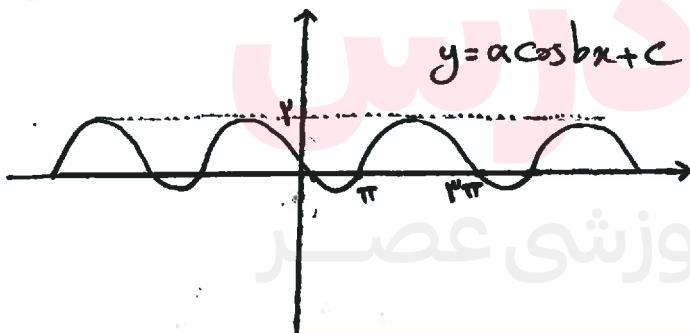
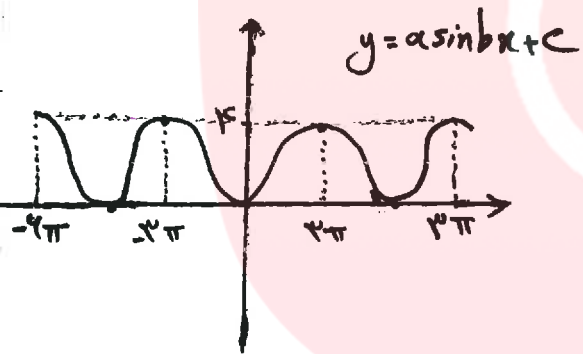
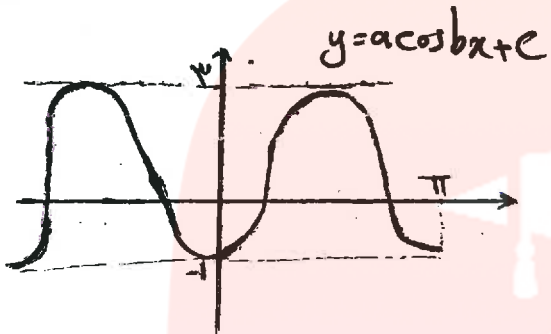
$\alpha \sin bx$ α و b غیر علامت ← \sin نزولی $\alpha b < 0$

α مثبت باشد ← \cos نزولی $\alpha > 0$

$\alpha \cos bx$ α منفی باشد ← \cos صعودی $\alpha < 0$

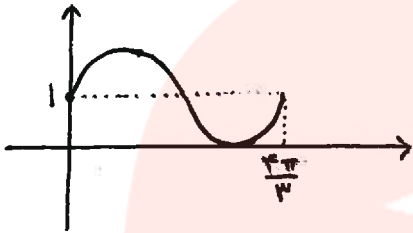
در کسینوس چون $\cos x = \cos(-x)$ است تا تاثیر در نمودار ندارد و صعودی نزولی شروع شدن نقطه علامت α بستگی دارد.

تمرین ۱: در هر یک از تابع‌های نشان داده شده مقادیر a , b , c و ضرایب تابع را بیابید.



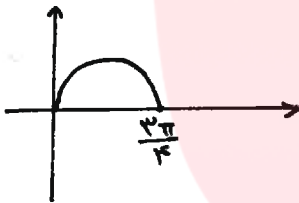
www.my-dars.ir

تمرین ۲، شکل زیر قسمت از نمودار $y = a \sin bx + c$ است معادله محور را پیدا کنید.



تمرین ۳، قسمت از نمودار تابع با ضرایب $y = \sin kx$ صورت شکل زیر است. k کدام است؟

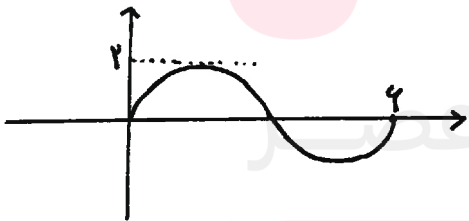
(بر اساس تمرین ۷۴)



- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $\frac{2}{\pi}$
- (۳) $\frac{2}{\pi}$
- (۴) $\frac{2}{3}$

تمرین ۴، شکل زیر قسمت از نمودار تابع $y = a \sin bx + c$ است. $a+b$ کدام است؟

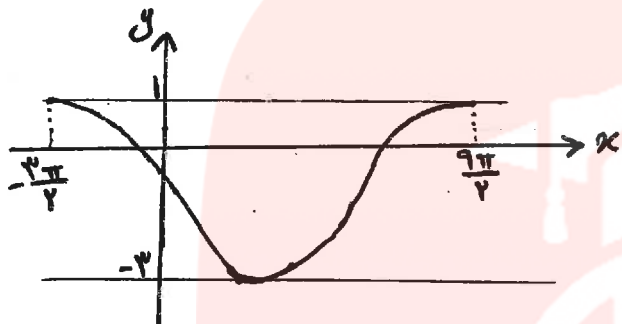
(بر اساس تمرین خارج ۹۳)



- (۱) $\frac{2}{\pi}$
- (۲) $\frac{5}{\pi}$
- (۳) $\frac{2}{\pi}$
- (۴) $\frac{2}{\pi}$

تقریب ۵: شکل زیر نمودار تابع $y = a \sin bx + c$ را در یک بازه مشخص نشان می‌دهد نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟

(سراسر تبدیل ۹۹)



- ۲(۱)
- ۳(۲)
- ۴(۳)
- ۲(۴)

تقریب ۶: شکل زیر قسمت از نمودار تابع $y = a - \cos(bx + \frac{\pi}{4})$ را نشان می‌دهد $a + b$ کدام است؟

(سراسر ریاضی ۹۵)

تبدیل



- 1/2(۱)
- 1(۲)
- 3/2(۳)
- 2(۴)

تقریب ۷

مای داریس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۸: ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب هر ضابطه را محاسبه کنید.

$$y = 2.5 \sin 4x + 1$$

$$y = -\cos 2\pi x - 12$$

$$y = 2 - \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$$

تمرین ۹: رابطه‌ی زیر مربوط به تابع $y = a \sin bx + c$ است ضابطه آن را کامل کنید.

$$\max = 8$$

$$\min = 2$$

$$T = 3\pi$$

تمرین ۱۰: ضابطه $y = a \cos bx + c$ مفروض است اتم بیشترین و کمترین مقدار این تابع ۳ و -۵ و

دوره تناوب اصلی آن برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد مقادیر a , b , c را پیدا کنید.

تمرین ۱۱: در تابع $y = a + b \sin cx$ اختلاف ماکزیمم و مینیمم برابر ۴ و مجموع آنها برابر ۶ است

معمول $a + |b|$ کدام است؟ (خطای سیر شلغفت آنلینز)

$$9 \text{ یا } 4$$

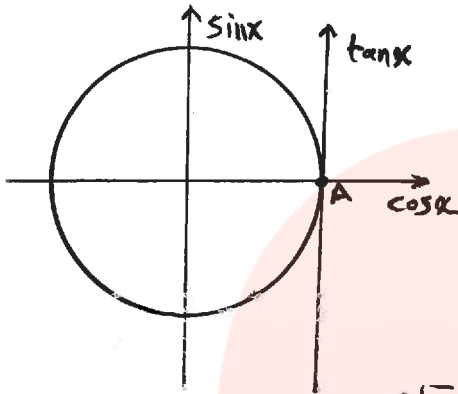
$$5 \text{ یا } 3$$

$$4 \text{ یا } 2$$

$$7 \text{ یا } 1$$

صفحه ۳۷ تا ۴۱ کتاب درسی

۲ تانژانت:

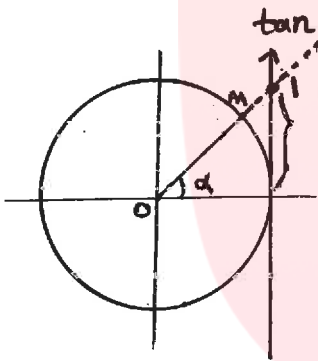


محور $\tan x$ یک محور عمود بر محور \sin و \cos است.

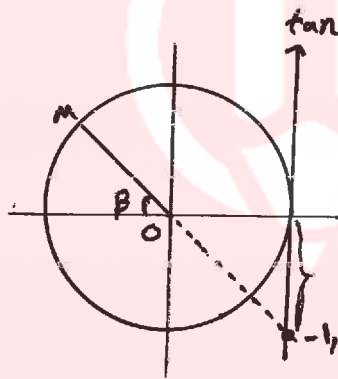
محورها به سمت راست و چپ از مبدا مثلثات است.

فقط A مباحث است جهت مثبت محور از چپ به راست است.

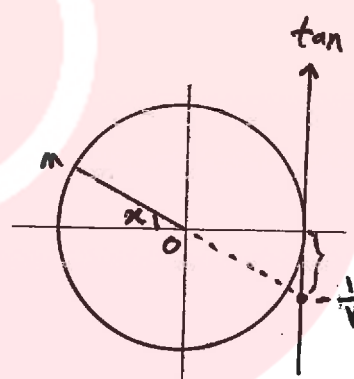
کدام تعیین مقدار \tan هر زاویه: پاره عمود آن زاویه (OM) را از دو طرف مقدار من و مثبت تا محور \tan



$$\tan \alpha = 1$$



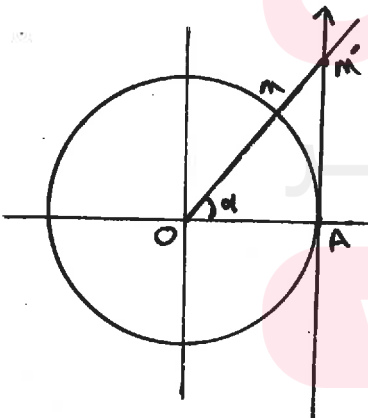
$$\tan \beta = -1$$



$$\tan x = \frac{1}{2}$$

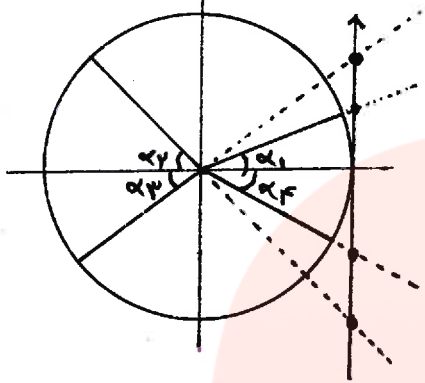
بیشترین مقدار $\tan x$ برابر با بی نهایت و کمترین مقدار آن منفی بی نهایت است.

با توجه به شکل مقابل هر دو آن نتیجه گرفتیم:



$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{AM'}{OA} = \frac{AM'}{1} = AM'$$

$$\tan \alpha = AM'$$

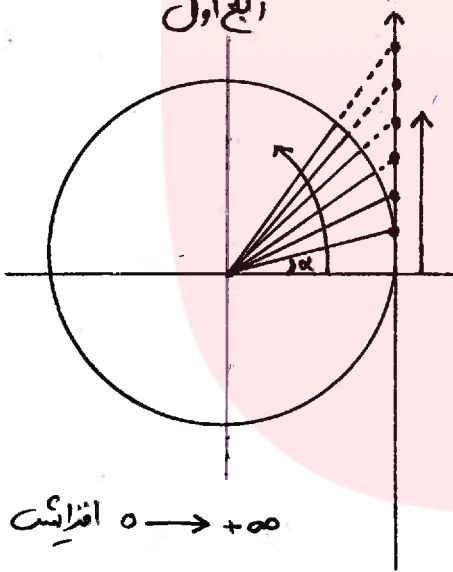


در $\tan \alpha$ ✓

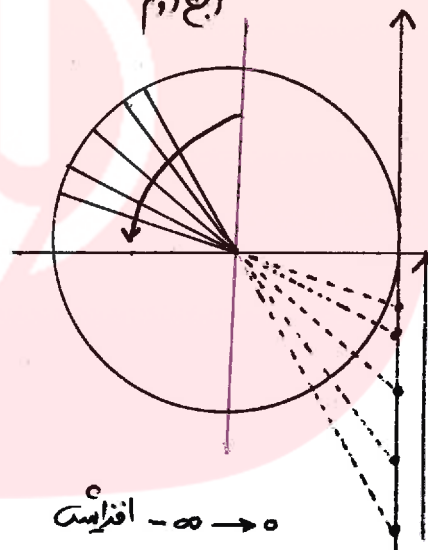
- ربع اول ← مثبت
- ربع دوم ← منفی
- ربع سوم ← مثبت
- ربع چهارم ← منفی

تغییرات $\tan \alpha$:

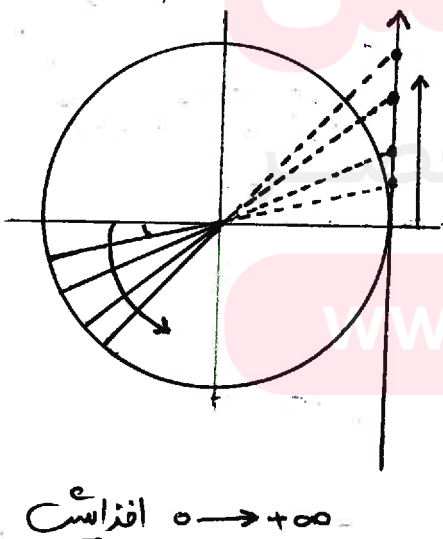
ربع اول



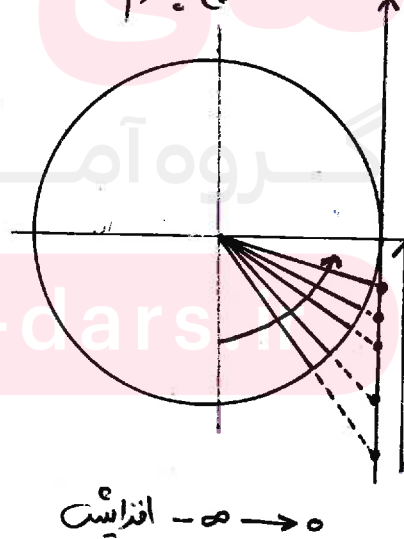
ربع دوم




ربع سوم




ربع چهارم



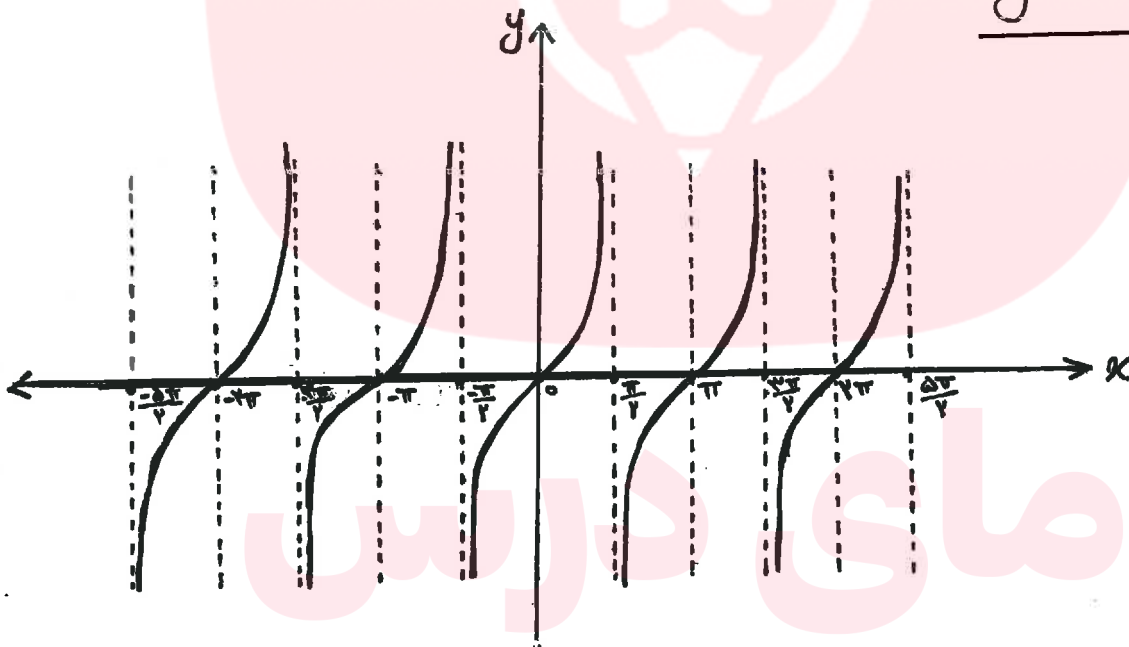
✓ در هر چهار ربع مثلثاتی، $\tan \alpha$ افزایش می‌یابد یعنی در هر ربع با افزایش زاویه مقدار $\tan \alpha$ هم افزایش می‌یابد

✓ در $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ مقدار $\tan \alpha$ تغییر نشده است. 

✓ در $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ و 4π مقدار $\tan \alpha$ بسیار صفر است. 

✓

رسم نمودار $y = \tan x$:



✓ با توجه به فشار مشخص است که تابع $y = \tan x$ تابع متناوب است ← $\tan(\pi + x) = \tan x$

✓ دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر π است.

www.my-dars.ir

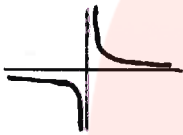
✓ محل برخورد تابع با محور x تمام مضرب صحیح π است ← $\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots$

✓ تابع در بازه‌های $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ و $(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$ صعودی است.

✓ تابع دایره‌ها $(0, \pi)$ و $(\pi, 2\pi)$ و $(-\pi, 0)$ غیر تعریف است، (نه معکوس و نه نزولی)

✓ \sin و \cos در تمام فضا تعریف شده با \sin معکوس است.

✓ نی‌توان \tan تابع \tan در \tan معکوس است. مانند تابع $\frac{1}{x}$



✓ همان طور که در شکل واضح است تابع \tan در هیچ بازه‌ای نزولی و حتی ثابت نیست.

✓ نمودار تابع \tan ثابت π می‌باشد و متناوب است.

رابطه برد $\tan x$

✓ همان طور که در شکل واضح است \tan در \mathbb{R} است. $y = \tan x \rightarrow \text{برد} = \mathbb{R}$

✓ در $\tan x$ در $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{2}$ و \dots معکوس $(k\pi + \frac{\pi}{2})$ تعریف نشده است.

سپس دامنه این تابع برابر است با تمام اعداد حقیقی π جز این اعداد $y = \tan x \rightarrow \text{دامنه} = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

گروه آموزشی عصر

⊛ برای بیشتر آموزش $y = \tan x$:

نامعادله $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ را حل می‌کنیم \leftarrow $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

مسئله ۱: دامنه تابع $y = \tan^3 x$ را بدست آورید.

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

حله:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

مسئله ۲: دامنه تابع $y = 2 \tan 2x - 3$ را بدست آورید.

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

حله:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

نکته: انقباض، انبساط، عکس و عکس انتقال عرضی فقاروس برد تائید نشانده در دامنه تائید

یعنی دامنه تابع $y = 2 \tan 2x - 3$ با دامنه $y = \tan x$ برابر است.

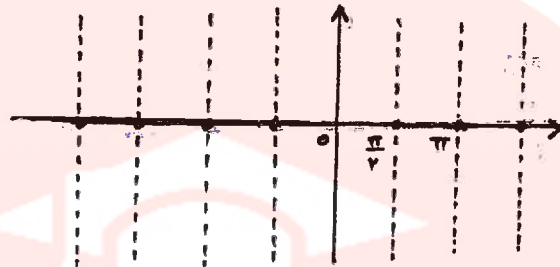
مای درسی

گروه آموزشی عصر

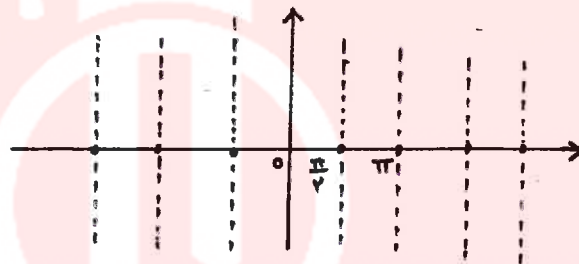
www.my-dars.ir

تمرین ۱: معادس یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در مجموعه‌های زیر بررسی کنید.

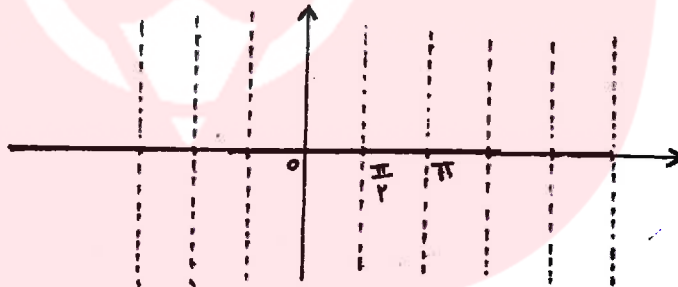
$(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$



$[0, \pi]$



$[0, 2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$



تمرین ۲: در جابجایی‌های زیر از علامت ماسی $\langle \Rightarrow \rangle$ قدر دهید.

$\tan \frac{\pi}{3} \square \tan \frac{\pi}{4}$

$\tan \pi \square \tan 4\pi$

$\tan \frac{5\pi}{4} \square \tan \frac{\pi}{4}$

تمرین ۳: اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \pi$ باشد درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$\tan \alpha - \sin \alpha < 0$

$\frac{\tan \alpha}{\sin \alpha} > 0$

$\tan^2 \alpha \sin \alpha < 0$

تمرین ۴: اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ و نگاه کنیم مورد نادرست است؟ (آب تانگس)

$$\tan \alpha < \tan \beta \quad (۱) \quad \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} < 1 \quad (۲) \quad \tan \alpha + \tan \beta < 0 \quad (۳) \quad \tan \alpha \tan \beta > 0 \quad (۴)$$

تمرین ۵: حدود تغییرات تابع $y = \tan x$ را در بازه $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ مشخص کنید.

تمرین ۶: دامنه تابع طس زیر را بدست آورید.

$$y = \tan^2 x$$

$$y = -3 \tan^2 x + 1$$

$$y = -\tan \frac{x}{4}$$

$$y = \tan(\alpha - \frac{\pi}{3})$$

مای درس

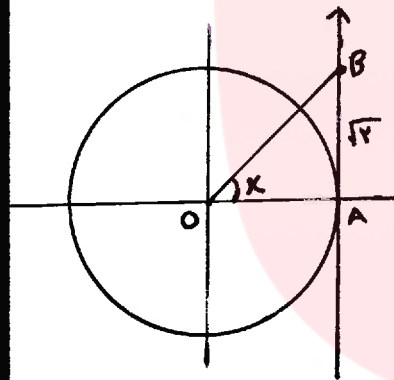
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۷: با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید.
(تمرین ۲ ص ۴۱ کتاب ریاض ۵)

الف: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ب: $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$



تمرین ۸: در دایره مثلثاتی زیر $\beta = \frac{\pi}{3}$ است.

الف: مقدار $\tan \alpha$ را محاسبه کنید.

ب: حاصل $1 - \cos^2 \alpha$ را محاسبه کنید.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوالهای امتحان ترم اول

۱) درست یا نادرست عبارت ماس زیر را مشخص کنید.

شماره ۹۹

الف) برد تابع $f(x) = \tan x$ برابر بازه $[-1, 1]$ است.

شماره ۹۸

ب) دامنه تابع $f(x) = \tan x$ برابر $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ است.

خرداد ۹۹ خارج

پ) مقدار مینیمم تابع $y = 3 \sin 2x - 2$ برابر -5 است.

خرداد ۹۸

ت) دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است.

۲) در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

ر.س ۹۸

خرداد ۹۹ خارج

الف) دوره تناوب اصلی تابع $y = \tan x$ برابر است.

خرداد ۹۹ خارج

ب) تانژانت در هر بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ تعریف شده باشد است.

خرداد ۹۹

پ) برد تابع $y = \tan x$ برابر است.

۳) دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بدست آورید.

خرداد ۹۹ خارج

$$y = 3 \sin 2x - 2$$

ر.س ۹۹

$$y = 8 \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

شماره ۹۸

$$y = -3 \cos(2\pi x) + 1$$

۹۹ خزار $y = 13 - \cos \frac{\pi}{4} x$

۹۸۵ $y = -\pi \sin\left(\frac{x}{4}\right) - 2$

۹۸ خزار $y = 1 - 2 \sin\left(-\frac{\pi}{4} x\right)$

۱۳۰۰ $y = 3 \cos(\pi x) + 2$

۹۸ تیر $y = 2 \cos(3\pi x) - 1$

۹۷ $y = 2 - 3 \sin 4x$

۹۹ شهریور $y = \pi \sin(-x) + 1$

۹۹ خزار

④ اندر داریت تابع مثلثاتی و در تناوب ۳۳ و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار مینیمم ۷- باشد

www.my-dars.ir

تابع سینوسی آن را بنویسید.

خرداد ۱۴۰۱

⑤ معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که بردار آن $[-4, 4]$

و دوره تناوب آن ۲ است.

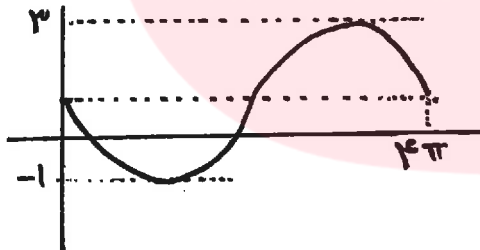
شهریور ۱۴۰۰

⑥ معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵

و مینیمم آن -۱ و دوره تناوب آن $\frac{\pi}{3}$ باشد.

خرداد ۱۴۰۲

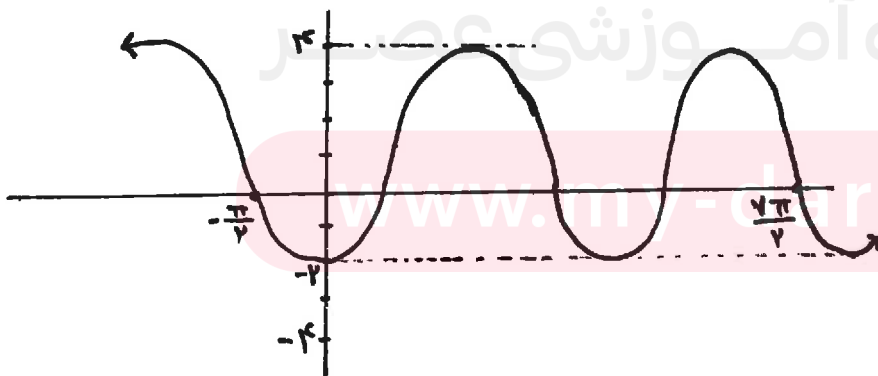
⑦ نمودار زیر قسمت از نمودار تابع $y = a \sin bx + 1$ است حاصل ab را بیابید.



دی ۱۴۰۱

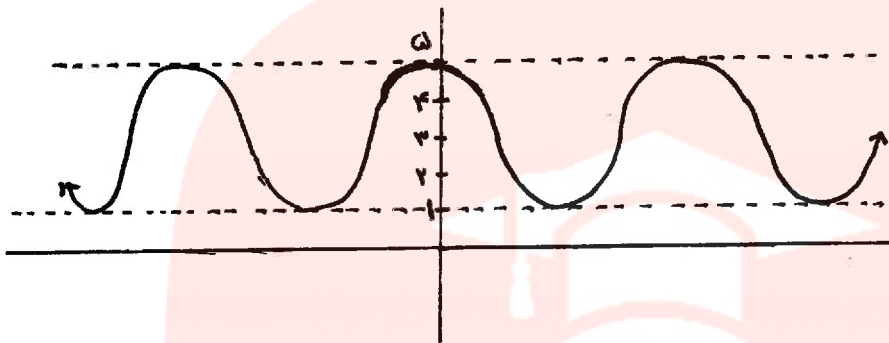
⑧ نمودار تابع با ضرایب $y = a \cos bx + c$ و دوره تناوب ۲ قابل رسم شده است

مقادیر a ، b و c را بیابید.



ضرب ۱۴۰

۹) نمودار زیر مربوط به تابع $y = a \cos bx + c$ است با توجه به نمودار



مقادیر a و b را مشخص کنید.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

نسبت طریقی مثلثاتی α : ۳

صنوع ۴۲، ۴۳ کتاب درسی

$$\textcircled{1} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

یادآوری مهم: رابطه بین $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ ←

(سینوس هر زاویه به توان ۲، علاوه بر سینوس همان زاویه به توان ۲ استیم کیت)

مثال ۱: اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، زاویه α در ربع دوم باشد مقدار $\cos \alpha$ را بیابانید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25}$$

حل ۱

$$\cos^2 \alpha = \frac{14}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{14}}{5} \xrightarrow[\text{منفی است}]{\text{ربع دوم سینوس}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{14}}{5}$$

مثال ۲: اگر $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ و زاویه α در ربع سوم باشد حاصل $\tan \alpha$ را بیابانید.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow[\text{منفی است}]{\text{ربع سوم سینوس}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = +\frac{\sqrt{5}}{2}$$

تذکره: اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ و زاویه α در ربع اول باشد حاصل $\cot \alpha$ را بیابانید.

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha} \xrightarrow{\text{تقسیم بر 2}} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{روابط ۲\alpha}$$

$$* 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha \xrightarrow{\text{تقسیم بر 2}} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$* \sin^2 2\alpha \cos^2 2\alpha = \frac{1}{2} \sin^2 4\alpha$$

$$* \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$* \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$* \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \sin^2 2\beta$$

$$* 4 \sin^2 x \cos^2 x = 4 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2x \right) = 2 \sin^2 2x$$

تمرین: هر یک از عبارات مانس زیر را مساوی تبدیل کن شکل ممکن بنویس.

$$* 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$* 2 \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x$$

$$* -\sin^2 x \cos^2 x$$

$$* \sin^2 x \cos^2 x \cos^2 x \cos^2 x \cos^2 x$$

$$* 2 \sin^2 x \cos^2 x \sin^2 x$$

$$\textcircled{۱۳} \quad \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

برایم $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ با یک جا به جا به ساده داریم: $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) \Rightarrow \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\textcircled{۱۴} \quad \cos^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

این بار فرض اول $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ با یک جا به جا به $\cos^2 \alpha$ را می‌نویسیم: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\textcircled{۱۵} \quad \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha =$$

به دسترس:

$$\cos^2 \alpha = \left\{ \right.$$

مای درسی
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

گاهی اوقات سینوس یا کسینوس یک زاویه را از ما می‌خواهند و سینوس یا کسینوس زاویه را داریم
مثال: مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \alpha = 15^\circ \rightarrow \cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-2}{2} = -2\sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{-(\sqrt{3}-2)}{4} = \sin^2 15^\circ \Rightarrow \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \sin^2 15^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sin 15^\circ \xrightarrow{15^\circ \text{ درج اول است}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sin 15^\circ$$

تمرین ۱: مقدار $\sin 22.5^\circ$ را بیابید.

تمرین ۲: مقدار $\cos 15^\circ$ را بیابید.

تمرین ۳: مقدار $\cos 75^\circ$ را بیابید.

تمرین ۴: حامل هر یک از عبارات های زیر را α ساده تریت شکل مثلث بنویسید.

$$* (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 =$$

$$* (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 =$$

$$* \tan \alpha + \cot \alpha =$$

$$* \cot \alpha - \tan \alpha =$$

$$* \sin \alpha \cos \alpha (\sec^2 \alpha - 1)$$

$$* \frac{\sin^2 \alpha}{\sec \alpha}$$

مای درسی
گروه آموزشی عصر

تمرین ۵: درستی عبارت زیر را نشان دهید. www.mystarsir.com

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

تمرین ۴: حاصل $\sin \frac{\pi}{17} \cos \frac{\pi}{17}$ را معاینه کنید.

تمرین ۷: اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{p}$ باشد حاصل $\sin 2x$ را بیابید.

تمرین ۸: اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه اس در ربع دوم مثلثاتی باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\sin 2\alpha =$$

$$\cos 2\alpha =$$

تمرین ۹: علامت هر سی $\sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ $\sin(\pi + \alpha)$ $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟ (مراعات تغییرات ۸۲)

تبدیل

۲۴ منفی

۳ $\cos 2\alpha$

۱۲ $\sin 2\alpha$

۱ $-\sin \alpha$

تمرین ۱۰: اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{4}$ و $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ مقدار $\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)$ کدام است؟ (مدرس: تغییر ۹۵)

تبدیل

$$\frac{3}{4} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۳)$$

$$-\frac{3}{8} \quad (۲)$$

$$-\frac{3}{4} \quad (۱)$$

تمرین ۱۱: حاصل عبارت $(1 - \sin^2 x) \cos x$ را برای $x = 75^\circ$ کدام است؟ (مدرس: ریاضی ۷۹)

$$\frac{3}{14} \quad (۴)$$

$$\frac{3}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{4} \quad (۱)$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوالات امتحان نهایی

۹۹① مقدار عدس $\sin 15^\circ$ را بدست آورید.سفر ۹۸② مقدار $\sin 22,5^\circ$ را بدست آورید.مقدار ۹۹ خارج③ اگر $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه ای حاد باشد، $\cos 2\alpha$ را بدست آورید.سفر ۱۴۰④ حاصل عبارت $4 \sin x \cos x \cos 2x$ را برای $x = 7,5^\circ$ بدست آورید.

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

صفحه ۳ تا ۴۸ کتاب درسی

معادله مثلثاتی: ۴

حالت ۱: $\sin x = \sin \alpha$

زمنی که کوسین $\frac{1}{4}$ یعنی زاویه $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ است

$$\sin x = \frac{1}{4} \rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

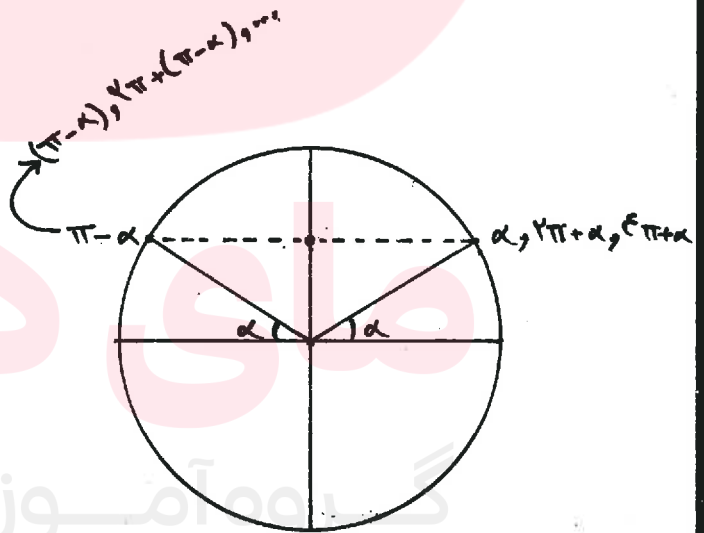
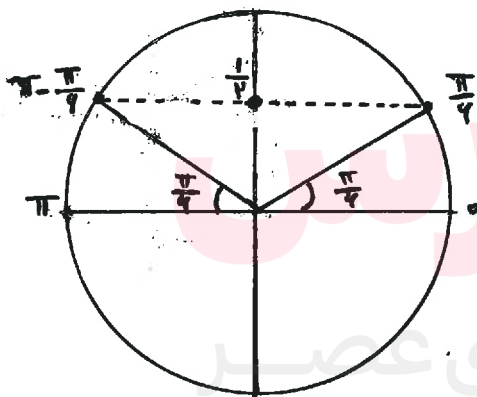
برای حل آن باید معادله را $\sin x = \sin \alpha$ در بیاریم

سپس از رابطه $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ معادله مثلثاتی را بدست می آوریم.

$$\sin x = \sin \alpha \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$k \in \mathbb{Z}$



$$\sin(\text{منفی}) = \sin(\text{مثبت}) \rightarrow \begin{cases} \text{مثبت} = 2k\pi + \alpha \\ \text{منفی} = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

مثال ۱: معادله مثلثاتی $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید.

حل ۱

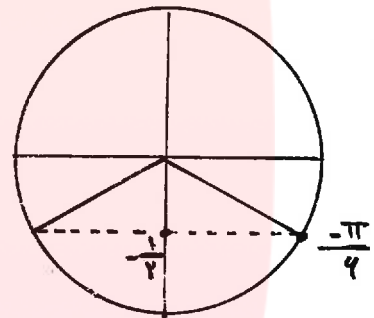
$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{4} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

مثال ۲: معادله مثلثاتی $\sin x = -\frac{1}{4}$ را حل کنید.

حل ۲:

$$\sin x = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$



مثال ۳: معادله مثلثاتی $\sin x = -\sin \frac{\pi}{3}$ را برآورد کنید.

حل ۳:

$$\sin x = -\sin \frac{\pi}{3} \rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

یادآوری:

$$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$-\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$-\sin \frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

تمرین ۱: مجموع جواب هر یک از معادلات مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$$* \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$* \sin \alpha = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$* \sin \alpha = -\sin \alpha$$

$$* \sin \alpha = \sin^2 \alpha$$

$$* \sin^3 \alpha = \sin^2 \alpha$$

www.my-dars.ir

$$* \sin x \cos x = \sin(-2x)$$

$$* \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$* \sin x \cos x = -\sin x$$

$$* \sin x - \sqrt{3} = 0$$

$$* \sin x + \sqrt{8} = 0$$

$$* \sin x + \sin^3 x = 0$$

$$* \sin^3 x - \sqrt{2} = 0$$

www.my-dars.ir

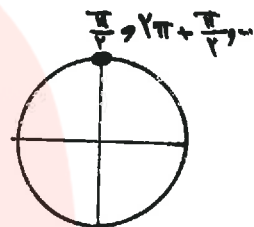
مای درس

گروه آموزشی عصر

نکته: نوع حالت خاص در معادله مثلثاتی سینوس:

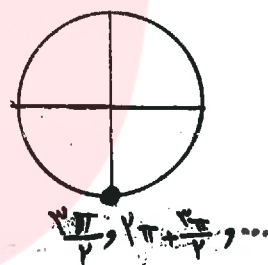
$$\sin x = 1 \rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{دو جواب برابر}$$

① $\sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$



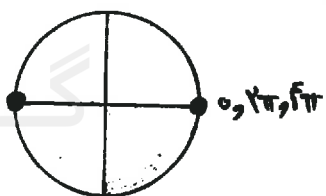
$$\sin x = -1 \rightarrow \sin x = \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{دو جواب برابر}$$

② $\sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



$$\sin x = 0 \rightarrow \sin x = \sin \pi \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ x = 2k\pi + \pi - \pi \rightarrow x = 2k\pi \end{cases} \quad \text{دو جواب برابر}$$

③ $\sin x = 0 \rightarrow x = k\pi$



دستم ۲
فالتورسری

تمرین ۲: مجموع جواب معادلات مثلثاتی زیر را بیابید. (مجموع جواب کلی)

$$* \sin^2 x - \sin x = 0$$

$$* \sqrt{2} \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$* \sqrt{2} \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x + 1 = 0$$

$$* \sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{3} = 0$$

مای درسی
گروه آموزشی عصر

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos x$$

$$\sin(\pi + x) = \sin x$$

تبدیل : یاد آوری

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sin x$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right) = \sin 2x$$

تبدیل

$$* \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$* -\sin 2x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

$$* \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sin x$$

$$* \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2 \sin x \cos x$$

$$* \sin 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$* \sin 2x = \cos 2x$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۳: معادسی زیر در بازه‌سی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$2 \sin x - 1 = 0$$

تمرین ۴: جواب‌های معادسی زیر را در بازه‌سی $[-\pi, \pi]$ مشخص کنید.

$$2 \sin 2x - \sqrt{3} = 0$$

تمرین ۵: معادسی مثلثاتی زیر در بازه‌سی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

۲۱۱

۳۱۲

۴۱۳

۵۱۴

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تعیین ۶: تعداد جواب های معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin^2 x \cos^2 x = 1$ در بازه $[0, \frac{\pi}{4}]$ کدام است؟

(سراسر تجربی خارج ۹۹)

۲ (۱)

۳ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

تعیین ۷: مجموع جواب های معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin x \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(سراسر تجربی ۹۸)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

3π (۲)

4π (۳)

5π (۴)

تعیین ۸: تعداد جواب های معادله مثلثاتی $\sin^2 x + \cos(\frac{\pi}{4} - x) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

(سراسر تجربی خارج ۹۴)

$\frac{14\pi}{3}$ (۱)

4π (۲)

$\frac{9\pi}{2}$ (۳)

5π (۴)

تقاطع خط و فنوار $y = \sin u$:تمرین ۹: خط $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و فنوار تابع $y = \sin 2x$ در کدام نقاط با هم برخورد می کنند؟تمرین ۱۰: خط $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و فنوار تابع $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ را در نقاط با کدام طول قوس قطع می کنند؟تمرین ۱۱: فنوار تابع $y = \sin x$ و خط $y = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 4\pi]$ چند بار با هم برخورد می کنند؟

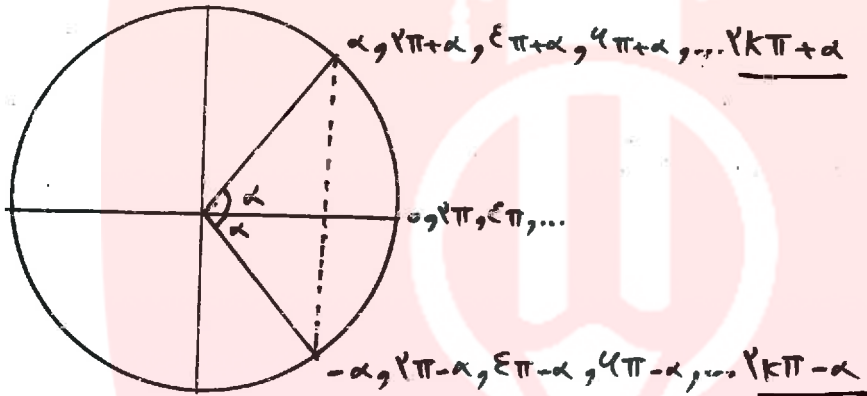
مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

طالت ۲: $\cos x = \cos x$

$x = 2k\pi \pm \alpha$



اگر $\cos \alpha = \cos \beta$ → $\alpha = 2k\pi \pm \beta$

$\cos A = \cos 0$ → $A = 2k\pi \pm 0$

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.

حل: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

* $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha) \rightarrow -\cos \frac{\pi}{4} = \cos(\pi - \frac{\pi}{4})$ یاد داری:

* $-\sin x = \sin(-x) \rightarrow -\sin \frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4})$

تمرین ۱: مجموع عبارات کلی معادلات مثلثاتی زیر را بیابانید.

$$* \cos x = \frac{1}{4}$$

$$* \cos x = \frac{-1}{4}$$

$$* \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$* \cos x = \cos 3x$$

$$* \cos x = -\cos 3x$$

$$* \cos 2x = \cos\left(\frac{2x}{3}\right)$$

$$* 2\cos x - 1 = 0$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$* 2\cos\alpha - \sqrt{3} = 0$$

$$* 2\cos^2\alpha + \sqrt{3} = 0$$

$$* \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{4}$$

$$* 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$* 2\sin^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha$$

$$* \cos^2\alpha - 2\cos\alpha - 1 = 0$$

$$* \cos\alpha(2\cos\alpha - 1) = 0$$

مای درس

↓ در ۲

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$* \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha - 3 = 0$$

$$* \cos^2 \alpha - \cos \alpha + 1 = 0$$

تبدیل ↓

$$* \cos \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) = 0$$

$$* \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 0$$

$$* \sin \alpha + \cos^2 \alpha = 0$$

$$* \cos(\pi - \alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

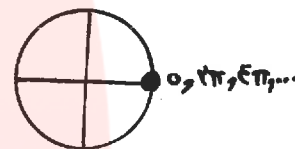
$$\frac{2k\pi}{R} + \alpha$$

نکته: سه حالت خاص در معادله مثلثاتی لیست می‌شود:

$$\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \cos 2\pi \rightarrow x = 2k\pi \pm 2\pi \begin{cases} x = 2k\pi + 2\pi \\ x = 2k\pi \end{cases}$$

در چهار ربع در واقع برابرند

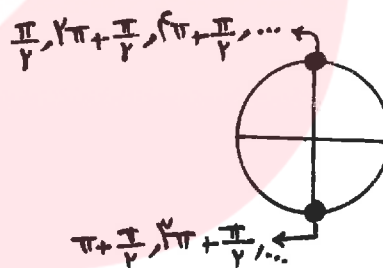
① $\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$ (مضارب زوج 2π)



$$\cos x = 0 \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

در چهار ربع در واقع برابرند

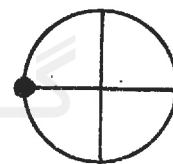
② $\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$



$$\cos x = -1 \rightarrow \cos x = \cos \pi \rightarrow x = 2k\pi \pm \pi \begin{cases} x = 2k\pi + \pi = \pi(2k+1) \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

در چهار ربع برابرند

③ $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi(2k+1)$ (مضارب فرد π)



تمرین ۲: مجموعه جواب کلی هر یک از معادلات مثلثاتی زیر را بیابید.

$$* \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$* 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$$

$$* \cos x (\cos x - 1) = 2$$

تمرین ۳: معادله $2 \cos x - 1 = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟ ضرایب مشخص کنید.

مای دزرس
گروه آموزشی عصر

تمرین ۴: مجموعه جواب معادله مثلثاتی زیر در بازه $[0, 2\pi]$ را بیابید.

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0$$

تربیت ۵: مجموع جیب‌های مابین معادلات روبه‌رو در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

۱) صفر

۲) $\frac{7\pi}{3}$

۳) $\frac{9\pi}{3}$

۴) 2π

تربیت ۶: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ کدام صورت است؟

۱) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{2k\pi}{3}$

۳) $\frac{4k\pi}{5}$

۴) $k\pi$

تربیت ۷: جواب کلی معادله مثلثاتی $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1$ کدام صورت است؟

(دراسه‌ی تعریف ۹۴)

۱) $\frac{k\pi}{7} - \frac{\pi}{8}$

۲) $\frac{k\pi}{7} + \frac{\pi}{8}$

۳) $k\pi - \frac{\pi}{8}$

۴) $k\pi + \frac{\pi}{8}$

www.my-dars.ir

تمرین ۸: جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$ کدام است؟ (بر اساس تعریف ۹۴)

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۲) $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۴) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

تمرین ۹: جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin(\frac{3\pi}{4} + x)$ کدام است؟ (بر اساس تعریف ۹۱)

۱) $\frac{k\pi}{3}$

۲) $\frac{2k\pi}{3}$

۳) $2k\pi + \frac{\pi}{3}$

۴) $2k\pi \pm \frac{2k\pi}{3}$

تمرین ۱۰: انتقاسی کدام جواب کلی معادله $\cos 2x = \sin x$ بدروس رابعه مثلثاتی است کلی کدام مثلثات است؟ (بر اساس تعریف ۷۷)

است؟

(بر اساس تعریف ۷۷)

۱) قائم الزامی

۲) متساوی الاضلاع

۳) متساوی الساقین

۴) مختلف الاضلاع

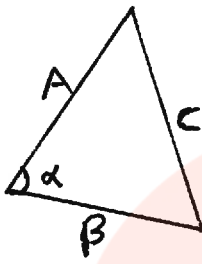
تقاطع خط و نمودار $y = \cos x$:تمرین ۱۱: طول نقاط برخورد خط $y = \frac{\sqrt{3}}{4}$ و نمودار تابع $y = \cos 2x$ را بیابید.تمرین ۱۲: خط $y = \frac{1}{4}$ و تابع $y = \cos x$ در بازه $[\pi, 3\pi]$ چند بار با هم برخورد می کنند؟تمرین ۱۳: خط $y = 1$ و نمودار تابع $y = 2\cos^2 x - \sin^2 x$ در بازه $[0, 2\pi]$ در چند نقطه تقاطع اند؟

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

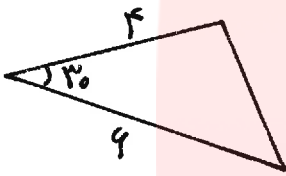
مساحت مثلث:



$$S = \frac{1}{2} A \cdot B \cdot \sin \alpha$$

$S = \frac{1}{2} (\text{ضلع بیرون دو ضلع}) (\text{حاصل ضرب دو ضلع به هم چسبیده})$

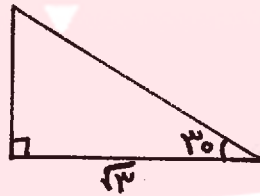
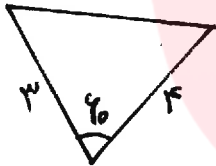
مثال در مثلث مقابل مساحت را بیابانید.



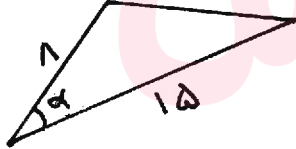
$$S = \frac{1}{2} (4)(4) \sin 30 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$$

حل:

تمرین ۱: در دو مثلث زیر مساحت مثلث را بیابانید.



تمرین ۲: اگر $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ باشد مساحت مثلث مقابل کدام است؟



گروه آموزشی عصر

تمرین ۳: مساحت مثلثی که ساقش ۵ سانتیمتر است اگر اندازه‌ی دو ضلع به هم چسبیده این مثلث به ترتیب ۲، ۵

سانتیمتر باشد اندازه‌ی زاویه بیرون این دو ضلع کدام است؟

تمرین ۴: مثلث با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است که اندازه‌های دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۲ باشد. \hat{C} ه
ضلع مثلث با این خاصیت متزان ساخته؟

تمرین ۵: مثلث با مساحت ۴۲ داریم که دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۸ واحد است. ضلع مثلث با این خاصیت
وجود دارد؟

تمرین ۶: ضلع مثلث متزان ساخته که اندازه دو ضلع آن ۴ و ۳ مساحت آن ۱۲ واحد باشد؟

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوالک امتحان نهایی

① درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

دس ۱۴۱

الف: مقدار عددی عبارت $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. □

② معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید.

دس ۹۹ $\cos x (2 \cos x - 1) = 1$

دس ۹۸ $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$

دس ۱۴۰ $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$
شماره ۹۸

دس ۹۷ $\sin x - \cos 2x = 0$

شماره ۱۴۱ $\cos 2x - 2 \sin x + 1 = 0$

دس ۹۸ $\cos 2x - \sin x + 1 = 0$

شماره ۹۹ $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{3}$

شماره ۹۸ $2 \sin^2 x + \sqrt{2} = \sqrt{2}$

شماره ۱۴۰ $\cos^2 x - \sin^2 x + 1 = 1$

شماره ۱۴۰۱ $\sin^2 x = \sin x$

شماره ۹۹، ۶ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

شماره ۱۴۰۱ $2 \sin^2 x - \sqrt{2} = 0$

شماره ۱۴۰۲ $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

شماره ۱۴۰۲

تربیت ۳ صاحب‌فلسفه معاد مثلثاتی $\cos^2 x - \cos x = 0$ ، (از بازه $(0, \pi)$) $\cos x = 0$ کسر

www.my-dars.ir

۴) مثلث با مساحت ۸۴ سانتی متر مربع و عرض ۷ سانتی متر است. اگر اندازه در ضلع این مثلث ۲ برتیب ۴ سانتی متر

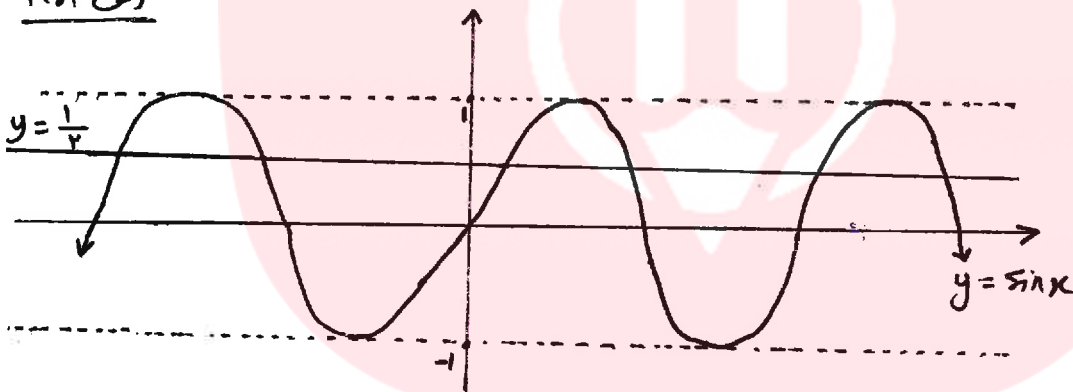
سهم بود ۱۴۰۰

باشد؟ کدام ضلع این مثلث با این خاصیت بر تری ساخته؟

۵) ضرایب تابع باضابطی $y = \sin x$ و ضرایب معادلی $y = \frac{1}{4}$ رسم شده است. دلیل تقاطع بدخوردی (نقطه)

رسم ۱۴۰۱

را بیابید.



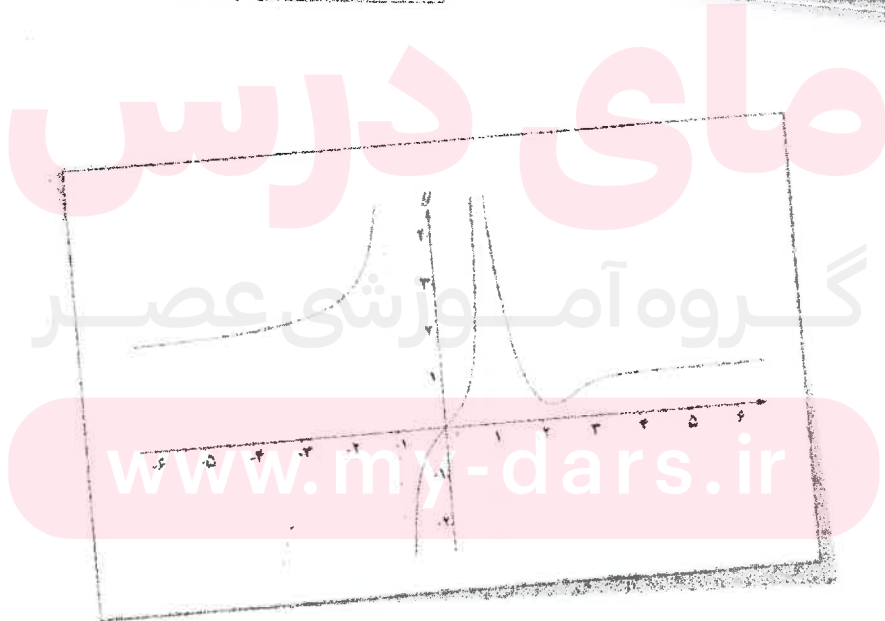
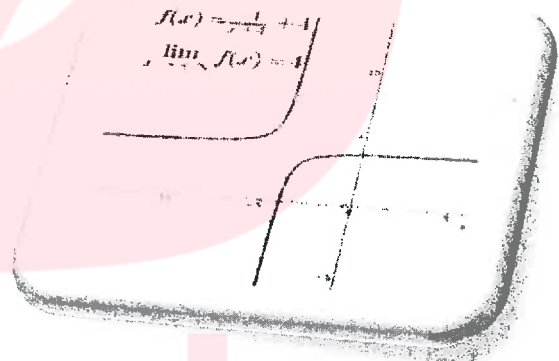
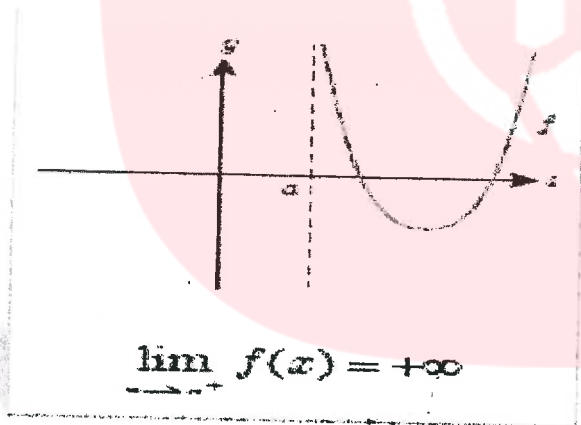
مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

• فصل سوم

حد بی نهایت و حد در بی نهایت



- ۱) بخش پذیرین چند جمله‌ای $(x-a)$ ۱۴۵
- ۲) حد توابع $f(x)$ در $x=a$ (نوع اتمام \pm) ۱۵۱
- ۳) حد نامتناهی (حد بی نهایت) ۱۶۳
- ۴) حد در بی نهایت ۱۷۳

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

صفحه ۵۱ و ۵۲ کتاب درسی

بخش ندرین چند جمله‌ای ما به $(x-a)$:

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x + 1 \mid x - 3 \\ \underline{x^2 - 4x} \\ x + 1 \\ \underline{x - 3} \\ 4 \end{array}$$

تقسیم علیه / تقسیم
خارج قسمت
باقی مانده

$$\begin{array}{r} f(x) \mid x - a \\ \vdots \\ \hline R \end{array}$$

در تقسیم، راجع بیت پارامترها را بالا به صورت زیر است

$$f(x) = (x-a)Q(x) + R$$

if $R=0 \rightarrow f(x) = (x-a)Q(x)$

$f(x)$ برابر حاصل ضرب عامل ما

تعیین: هر یک از تقسیم‌های زیر را حل کنید و راجع تقسیم را با این هر کدام بنویسید.

$$3x^2 - 5x - 2 \mid x - 3$$

$$2x^3 + x^2 + 1 \mid x + 1$$

$$-x^3 + 5x - 2 \mid x + 1$$

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

نکته ۱: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر درجه‌ای $(x - \alpha)$ همیشه باقی مانده برابر $f(\alpha)$ است.

مثلاً در تقسیم $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ بر $(x - 4)$ ، باقی مانده برابر $f(4)$ است $\leftarrow f(4) = 18$

و همچنین در تقسیم $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ بر $(x + 1)$ ، باقی مانده برابر $g(-1)$ است $\leftarrow g(-1) = -2$

نکته ۲: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر درجه‌ای $(x - \alpha)$ اگر $f(\alpha) = 0$ باشد $\leftarrow f(x)$ بر $(x - \alpha)$ بخش پذیر است.

مثلاً در تقسیم $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ بر $(x - 3)$ داریم $f(3) = 0$ $\leftarrow f(x)$ بر $(x - 3)$ بخش پذیر است.

و در تقسیم $g(x) = -x^2 - 4x + 1$ بر $(x + 2)$ داریم $g(-2) = -7$ $\leftarrow g(x)$ بر $(x + 2)$ بخش پذیر نیست.

تمرین ۱: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای‌های زیر را بر عبارت داده شده پیدا کنید.

الف: $f(x) = x^3 - 4x^2 - x - 1$ بر $(x - 1)$

ب: $g(x) = -x^3 - x^2 - x + 1$ بر $(x + 1)$

تمرین ۲: آیا عبارت $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 3$ بر $(x - 2)$ بخش پذیر است؟ چرا؟

تمرین ۳: مقدار m را طوری پیدا کنید که عبارت $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + m$ بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

تمرین ۴: چندجمله‌ای $f(x) = 2x^2 - 4x - k$ بر $x - 2$ بخش پذیر است. مطلوب است:

باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x + 2$ را پیدا کنید.

تمرین ۵: نشان دهید چند جمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر درجه‌های $x+2$ بخش پذیر است؟

(کار در کلاس ۳ صفحه ۵۵)

تمرین ۴: چند جمله‌ای $f(x) = 2x^2 - x - 3$ مفروض است، اگر $f(-1) = 0$ باشد چند جمله‌ای $f(x)$ را

۳ صورت حاصل ضرب عوامل ماست بنویسید.

نکته ۳: برای تجزیه عبارت طری پیچیده ابتدا باید یک از ریشه‌های آن را پیدا کنیم ($f(\alpha) = 0$) و سپس عبارت را بر $(x - \alpha)$ تقسیم کنیم تا تجزیه شود. برای پیدا کردن ریشه‌ها عدد $1, 2, 3, \dots$ را امتحان می‌کنیم.

تمرین ۱: عبارت زیر را تجزیه کنید و ۳ صورت حاصل ضرب عوامل ماست بنویسید.

$$f(x) = 2x^3 + 4x^2 + x - 8$$

تمرین ۲: چند جمله‌ای $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ چند جمله‌ای را در ؟

www.my-dars.ir

نکته ۴: اگر α ریشه چندجمله‌ای $f(x)$ باشد $\leftarrow f(\alpha) = 0$ به $(x-\alpha)$ بخش پذیر است، $f(\alpha) = 0$ حاصل می‌گیریم:

اگر α و β ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)$ باشند $\leftarrow f(x)$ به $(x-\alpha)(x-\beta)$ بخش پذیر است و

مثلاً وقتی x ریشه چندجمله‌ای $f(x) = 3x^3 - \alpha x^2 - \beta$ به $(x+1)(x-3)$ بخش پذیر است یعنی این که

$$f(-1) = 0, f(3) = 0, f(x) \text{ همواره}$$

تربیت ۱: اگر $f(x) = \alpha x^3 - x^2 - \beta$ به $(x-1)(x-2)$ بخش پذیر باشد حاصل $\alpha + \beta$ کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{5}$
- ۲) $\frac{-2}{5}$
- ۳) $\frac{1}{5}$
- ۴) $\frac{-1}{5}$

تربیت ۲: اگر چندجمله‌ای $f(x)$ به $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد حاصل $f(2) + f(-2)$ کدام است؟

- ۱) صفر
- ۲) ۱
- ۳) $\frac{3}{4}$
- ۴) -۲

تربیت ۳: چندجمله‌ای $f(x)$ به $x^2 - x - 2$ بخش پذیر است. اگر $g(x) = f(x-4) + 2f(x-1)$ باشد

باقی مانده تقسیم $g(x)$ به $x-3$ کدام است؟

www.my-dars.ir

- ۱) صفر
- ۲) -۲
- ۳) -۴
- ۴) ۲

تمرین ۴: فرض کنید چند جمله‌ای $f(x)$ به $x^2 - 1$ بخش پذیر است و $Q(x) = f(x-1) + f(1-x)$ ،
(سازمان تعزیرات ۹۹)

آنگاه باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

۱) -1

۲) صفر

۳) 1

۴) 2

تمرین ۵: عبارت $x^4 + 4ax^3 + 2bx + 1$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر است. $a+b$ کدام است؟
(سازمان تعزیرات ۸۹)

۱) $-\frac{15}{8}$

۲) $-\frac{17}{14}$

۳) $\frac{17}{14}$

۴) $\frac{15}{8}$

تمرین ۶: 2 از این مقادیر از α چند جمله‌ای $f(x) = x^4 + \alpha x^3 - 8x^2 + x + 2$ بخش پذیر است
(سازمان تعزیرات ۹۴)

کوچکترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟

۱) $1 - \sqrt{3}$

۲) $1 - \sqrt{5}$

۳) $-1 - \sqrt{3}$

۴) $-1 - \sqrt{5}$

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوالات امتحان نهایی

① درستی یا نادرستی عبارت مای زیر را مشخص کنید.

۹۹ سی

الف: در تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - c$ ، باقی مانده برابر $P(c)$ است.

۹۸ سی

ب: چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$ بر درجه‌ای $x + 2$ بخش پذیر است.

② جاسی خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

خرداد ۹۹ خارج

الف: باقی مانده تقسیم $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر با است.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

صفحه ۵۵ تا ۵۳ کتاب درسی

۲) عدد تابع لگاری (رفع اجماع):

اگر عدد تابع f در نقطه $a=1$ برابر ۲۴ و عدد تابع g در نقطه $a=1$ برابر ۸ باشد؟ نگاه عدد تابع $\frac{f}{g}$ برابر $\frac{24}{8} = 3$ می باشد.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 24 \\ \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{24}{8} = 3$$

مثال دیگر، اگر $f(x) = 2x + 1$ ، $g(x) = x^3 + 5$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ را محاسب کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x^3+5} = \frac{2(2)+1}{(2)^3+5} = \frac{5}{13}$$

اما هیچ وقت جنبه سوال ساده‌ای را با مانع ذهنی بایک جایگزینی ساده به جواب برسیم. در همه‌ی سوالات بیست از جایگزینی به حالت $\frac{0}{0}$ می‌رسیم و باید حالت «مجهول» می‌گویند و باید رفع اجماع کنیم.

مثال: حاصل عدد زیر را محاسب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\Delta x - 10} \xrightarrow{\text{حل}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\Delta x - 10} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{رفع اجماع: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\Delta x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\Delta(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} x+2 = 4$$

چگونه رنج اجماع کنیم؟

وقتی x سمت 2 میل کند، در واقع عبارت $(x-2)$ عامل مضرب کشته ماست، باید از صورت و مخارج حذف شود.

* عامل مضرب کشته ما تکیه و پیوسته در صورت و مخارج حضور را نشان ندهد. است که باید آن را بیرون کشیم و از صورت و مخارج حذف کنیم. بدین این کار را نشان یار آرد، ماس زیر از ناک شب واجب تداست.

یار آرد: فاکتورگیری

$$3x - 6 = 3(x - 2)$$

$$2x - 4 = 2()$$

$$4x - 4 = 4(x - 1)$$

$$-2x - 9 = -2()$$

$$-2x + 6 = -2(x - 3)$$

$$-x^2 + x = -x()$$

$$-2x + 4 = 2(-x + 2)$$

$$x^2 + x = x()$$

$$5x^2 + 10x = 5x(x + 2)$$

$$x^3 + 2x = x()$$

$$-3x - 3 = -3(x + 1)$$

$$x^3 + 4x^2 - 4x = x()$$

انتظار زوج

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

یار آرد: انتظاری

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$x^2 - 34 = (x - 4)(x + 4)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

$$x^2 - 24x = x(x^2 - 24) = x(x - 4)(x + 4)$$

$$x^2 - 25 =$$

$$x^2 - 4x =$$

$$x^2 - x =$$

انتارهای مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$x^2 + 5x + 4 = (x+2)(x+3)$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$x^2 + 7x - 8 = (x-2)(x+4)$$

$$-x^2 - x + 2 = -(x^2 + x - 2) = -(x-1)(x+2)$$

حامل مشترک
حامل مربع

$$x^2 - 3x - 4 =$$

$$x^2 + x - 4 =$$

$$x^2 + 5x - 24 =$$

$$-x^2 - x + 12 =$$

حلقه و لانگر

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مادر جمع لانگر جمع حلقه

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$x^3 - 8 \Rightarrow x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^3 - 1 = (\dots)(\dots)$$

$$x^3 + 8 \Rightarrow x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$x^3 + 1 = (\dots)(\dots)$$

$$(\sqrt[3]{x} + 2)(\dots) = x - 8$$

$$5\sqrt[3]{x} - 10 = 5(\sqrt[3]{x} - 2) = 5(\dots)(\dots)$$

$$(\sqrt[3]{x} - 1)(\dots) = x - 1$$

$$3\sqrt[3]{x} + 3 = 3(\sqrt[3]{x} + 1) = 3(\dots)(\dots)$$

تمرین ۱: حامل حرکت از عداسی زیر را مطالعه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^2 - 25} =$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} =$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} =$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 + 3x + 10}{x^2 - 4} =$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{5x} =$$

تذکره: اگر هیچ جوره نتوانیم عبارت را تجزیه کنیم ← عبارت را در بر عامل تقسیم کنیم تا عبارت تجزیه بشود.

$$۶) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 2}{x^2 - 4} =$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} =$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{-5x^3 + 10x^2 + x - 2} =$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9} =$$

برای رفع ابهام تقاضای که صورت یا مخرج را در یکان دارد ← باید صورت و مخرج را در صورتی که عبارت را یکسان دارند ضرب کنیم

مثال: عامل حد $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4}$ را ساده کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{3x-2} + 2}{\sqrt{3x-2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-2) - 4}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{(x^2 - 4)(\sqrt{3x-2} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{3x-2} + 2)} = \frac{3}{(4)(4)} = \frac{3}{16}$$

یادآوری: در مخرج عبارت طس زیر را بنویسید

$$\sqrt{x} - 3 =$$

$$2 + \sqrt{3x-1} =$$

$$\sqrt{x+1} - 3 =$$

$$-\sqrt{3x-5} + 1 =$$

یادآوری: مخرج عبارت طس زیر را بنویسید
www.my-dars.ir

$$* \frac{2x^2 - 2x}{\sqrt{x+1} - 3}$$

$$* \frac{2x^2 - x + 2}{\sqrt{3x+2}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{3x+6} - 2}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

تذکره: وقتی هم در صورت و هم درخرج را یکسان داریم ← یک بار در صورت و یک بار درخرج صورت و یک بار درخرج مخرج

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{5x+4} - 3}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{2x}}{\sqrt{x+7} - 3}$$

تذکره: گاهی در اکیال های تدریس مجبوریم ۲ یا چند بار فرجه در جزوه می کنیم.

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3x+5}} - 2}{x^2 + 3x - 4}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\sqrt{2x+7} + 4} - 3}{3x - 3}$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

تذکره: برای رفع ابهام عبارت های رادیکالی با فرم ۳ ← از اعداد حلق و لایحه استفاده می کنیم

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{9x - 3} - 3}{x^2 - 9}$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2x+2} - 2}{x^2 - 5x + 4}$$

$$۲۳) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{1-x} - 1}$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

تذکره: گاهی هم رادیکال با قدرجه ۲ داریم و هم با قدرجه ۳.

www.my-dars.ir

تذکره: گاهی قدر مطلق را با چیزی صیغیح داریم که باید آنرا حذف کنیم و بعد رفع ابهام کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3x-1|-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)-2}{x^2-1}$$

قدر مطلق درون آن \oplus باشد \leftarrow منور نش میروند \leftarrow می آید

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3|-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-3)-2}{x^2-4}$$

درون آن \ominus باشد \leftarrow قیمنش بیرون می آید \leftarrow

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - [x]}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x+1}$$

چیزی صیغیح \leftarrow و جابجایی باید مقدار عددی این را قرار دهیم \leftarrow

$$۲۴) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|-2x+1|-3}{x^2-2x}$$

$$۲۵) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2+|x^2-3|}{x^3+1}$$

$$۲۶) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - [x]}{x^2 + 3x + [4x]}$$

$$۲۷) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x[x] - 2}$$

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

(سازش تعیین خارج ۸۵)

تعیین ۲، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-7}{3}$

۲) $\frac{-1}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{5}{3}$

(سازش تعیین خارج ۹۷)

تعیین ۳، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3-\sqrt{x}} - 1}$ کدام است؟

۱) -۱۱۲

۲) -۹۶

۳) -۸۴

۴) -۷۲

(سازش تعیین خارج ۸۸)

تعیین ۴، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۱) -۴

۲) -۲

۳) ۲

۴) ۴

(سازمان سنجش ۹۰)

تذکره ۵: حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 7|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

-۳ (۱)

-۲ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

(سازمان سنجش ۹۸)

تذکره ۶: حد عبارت $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 14}{12 + 4x^3}$ وقتی $x \rightarrow -8$ کدام است؟

-۲۴ (۱)

-۱۸ (۲)

-۱۲ (۳)

-۴ (۴)

(سازمان سنجش ۱۴۰۱)

تذکره ۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]}$ کدام است؟

۱ (صفر)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۳)

$+\infty$ (۴)

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

(خیل منبر دوازدهم)

تقریب ۸، اند $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax+3a}{1-\sqrt{2x+14}} = 2$ باشد؟ a کدوم است؟

- ۵ (۱)
- ۳ (۲)
- ۳ (۳)
- ۵ (۴)

تقریب ۹، اند $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{ax+1}-3}{\sqrt{x}-2} = b$ باشد؟ a و b کدوم است؟ (خیل منبر دوازدهم)

- ۲ (۱)
- ۲ (۲)
- ۵ (۳)
- ۵ (۴)

تقریب ۱۰، اند $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد؟ a و b کدوم است؟ (سازمان آزمون خرداد ۹۵)

- ۲ (۱)
- ۱ (۲)
- ۱ (۳)
- ۲ (۴)

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

صفحه ۵۳ تا ۵۷ کتاب درسی

حد نامتناهی (عربی تعریف)

همسایگی: هر بازه‌ی باز شامل عدد حقیقی α را یک همسایگی α می‌گویند.

به عبارتی دیگر اگر $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ باشد آنگاه بازه (α, β) یک همسایگی α است.

۱ بازه‌ی $(1, 4)$ یک همسایگی برای عدد ۲ است چون $2 \in (1, 4)$ این بازه است.

۲ بازه‌ی $(-2, 2)$ یک همسایگی برای عدد ۳ است چون $3 \notin (-2, 2)$ درون این بازه است.

۳ بازه‌ی $(0, 3)$ یک همسایگی برای عدد ۵ نیست چون $5 \notin (0, 3)$ درون این بازه جایی ندارد.

تعریف ۱: اگر بازه‌ی $(m-2, m+2)$ یک همسایگی برای عدد m باشد عدد m را مشخص کنیم.

تعریف ۲: برای کدام مجموعه مقادیر x بازه‌ی $(x-1, x+1)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد؟

(سازمان ریاضی ۹۸)

گروه آموزشی عصر

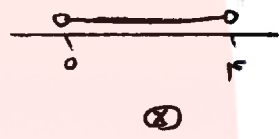
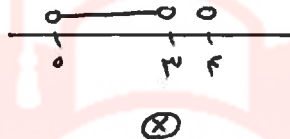
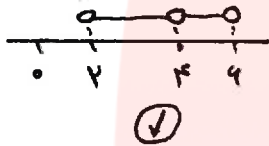
مای درسی

www.my-dars.ir

همسایگی محذوف: اگر a را از بازه‌ی (a, b) حذف کنیم آنگاه مجموعه‌ی $\{a\}$ - (a, b) را یک همسایگی محذوف برای a می‌گویند.

همسایگی محذوف عدد a را به صورت مقابل نشان می‌دهیم $\leftarrow (a, b) - \{a\} = (a, a) \cup (a, b)$

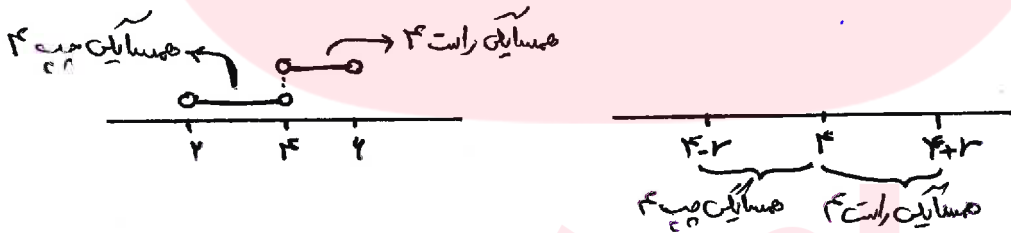
- {4} - (2, 4) یک همسایگی محذوف برای عدد 4 است، چون عدد 4 در این بازه بوده و حذف شده است.
- {4} - (0, 3) یک همسایگی محذوف عدد 4 نیست، چون 4 اصلاً در این بازه نبوده است.
- {4} - (0, 4) یک همسایگی محذوف عدد 4 نیست چون 4 اصلاً در این بازه نبوده است.



همسایگی چپ و راست: اگر 2 عددی مثبت باشد آنگاه $(x_0, x_0 + 2)$ یک همسایگی راست x_0 است.
 $(x_0 - 2, x_0)$ یک همسایگی چپ x_0 است.

مثال: چندتا همسایگی راست برای عدد 4 بنویسیم: $(4, 5)$ - $(4, 7)$ - $(4, 100)$ - $(4, 17)$

مثال: چندتا همسایگی چپ برای عدد 4 بنویسید: $(2, 4)$ - $(-2, 4)$ - $(0, 4)$ - $(3, 4)$ - $(-100, 4)$



- (2, 7): همسایگی عدد 4 ← محذوف است
- (4, 7): همسایگی راست عدد 4 ← محذوف نیست
- (2, 4): همسایگی چپ عدد 4 ← محذوف نیست
- {4} - (2, 7): همسایگی محذوف عدد 4 ← محذوف نیست

نکته: هر همسایگی محذوف x_0 شامل یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ x_0 است.

تمرین ۱: درست یا نادرست هر عبارت را مشخص کنید.

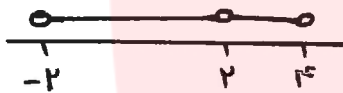
الف: بازه $(-3, 2)$ یک همسایگی راست عدد ۲ می باشد.

ب: $\{3\} - (2, 1)$ یک همسایگی محذوف عدد ۳ می باشد.

ج: بازه $(1, 4)$ و $(-1, 4)$ به ترتیب همسایگی راست و چپ عدد ۱ هستند.

د: $(1, 4) \cup (-2, 1)$ یک همسایگی محذوف برای عدد ۱ است.

تمرین ۲: شکل زیر مربوط به همسایگی محذوف چه عددی است؟



ب: چند همسایگی راست برای عدد ۲ می توان نوشت؟

ب: چند همسایگی چپ برای عدد ۲ می توان نوشت؟

تمرین ۳: اگر $(1, m-2) \cup (-2, 2m+1)$ یک همسایگی محذوف عدد α باشد، α را بیابید.

تمرین ۴: اگر $(\alpha+3, 3\alpha) \cup (-2, 2\alpha-1)$ یک همسایگی محذوف عدد b باشد، حاصل $b+a$ کدام است؟

۲۱

۳۲

۵۳

۶۴

تمرین ۵: اگر مجموعه $(-1, m^2-3) \cup (1, m)$ همسایگی محذوف ۱ باشد، m کدام است؟

-۱۱

۲۵

-۲۳

± 2

حالات همسانی و انواع اون رو یاد گرفتن بدیم سلف اصل مطلب:

حد نامتناهی (حد بی نهایت):

در حد تابع کسری (در سنامه $\frac{0}{0}$) همیشه به $\frac{0}{0}$ میخوره بدین صورت و پس از رفع ابهام یک عدد منبسط میخوره:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$

ولی در این جا جواب ما عدد نیست و جواب ما همیشه $\pm \infty$ است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$$

یعنی در این جا همیشه به $\frac{عدد}{0^+}$ یا $\frac{عدد}{0^-}$ میخوره و جواب هم $\pm \infty$ است.

۴ حالت ممکن ←

$$\frac{0^+}{0^+} = +\infty \quad \frac{0^+}{0^-} = -\infty \quad \frac{0^-}{0^+} = -\infty \quad \frac{0^-}{0^-} = +\infty$$

مثال ۱

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = \frac{+3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = \frac{+3}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

نکته مهم: در حد تابعی بالا فقط در صورتی جواب $\pm \infty$ میخوره که مخارج منفرد باشند و اگر هم از مطلق باشند

عبارت تعریف نشده میخوره.

$$\frac{عدد \oplus 0}{عدد} = \pm \infty$$

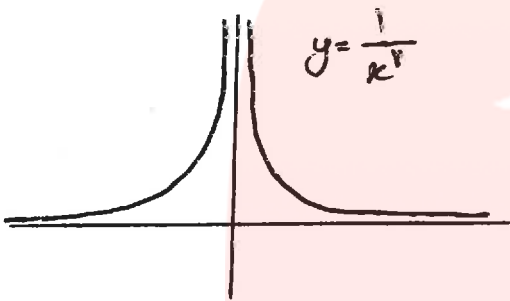
$$\frac{مطلق 0}{مطلق 0} = 0$$

$$\frac{عدد}{مطلق 0} = 0$$

$$\frac{عدد 0}{مطلق 0} = 0$$

نکته: وقتی حد تابع برابر $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود یعنی تابع در آن نقطه حد ندارد

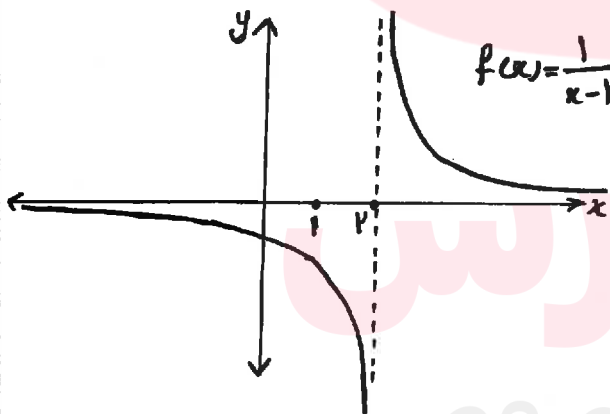
بررسی حد به نهانیت روش نورانی



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

در جیب و حد راست این تابع در نقطه $x=0$ برابر $+\infty$ است پس لیم حد این تابع در نقطه $x=0$ برابر $+\infty$ است

عبارتی این تابع در همسایگی $+\infty$ میل می‌کند



$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

گروه آموزشی عصر

نکته: اندک مخرج درون قدر مطلق یا راسی توان زیرج باشد ← مخرج 0^+ من شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{+3}{0^+} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{+3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-3}{|x-1|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-3}{|x-1|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

نکته: اندر وجه مخرج بیشتر از! باشد بیای تعیین 0^+ یا 0^- بودن مخرج ← تجزیه می کنیم
عدد توان من کنیم ←

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{+2}{(+)(0^-)} = \frac{+2}{0^-} = +\infty$$

نکته: د چون حاصل $\sin x$ و $\cos x$ همواره عدس در بازه $[-1, 1]$ است:

* حاصل $1 + \sin x$ ، $1 + \cos x$ همواره عدس نامنفی است.

* معبار عبارت مایع مانند $1 - \cos x$ را اینگونه ماسع می کنیم

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -1 \leq 1 - \cos x \leq 2$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۱: حاصل حرکت از عددی زیر را تعیین کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{x-4}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{2x-2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x^2}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{(x-2)^2}$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{|x-\frac{1}{2}|}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2-[x]}{1-2x}$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-[x]}{x+2}$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{1-[x]}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-[x]}{\frac{1}{2}[x]-1}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{|x-2|}$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{[x]+2}{x^2+3x}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+2}{x^2-9}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x^2+2x-3}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x^2+3x+1}{x^2+x}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[2-x]-1}{x^2-4x+9}$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{-2}{1+\cos x}$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+3}{\sin x}$$

$$۱۹) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{2}{\cos x}$$

$$۲۰) \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-2\sin x}{1+\cos x}$$

$$۲۱) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$$

$$۲۲) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\cot x + \sqrt{2}}{\cot x - \sqrt{2}}$$

تقریب ۲، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{1-x^2}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۱

(آب تله)

تقریب ۳، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{x[x]}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) -1

(آب تله)

تقریب ۴، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{[x+1]}{|x+1|}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) ۱

(سراسری تجربی ۹۹)

تقریب ۵، حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x]-3}{x+2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ۴) ۱

(آب تله)

تقریب ۶، حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{[\sin x]}{x-\pi}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) ۱

(سراسری ریاضی ۷۲)

تقریب ۸، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{\tan x}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) $-\infty$

(کانون)

تقریب ۹، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sin x - 1}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

(سراسری تجربی ۸۹)

تقریب ۱۰، حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x}{1+\cos x}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

تذکره: گاهی اوقات بست از جا بگذارد \div به معنای ∞ باشد. یعنی اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$ باشد $\pm \infty$

تمرین ۱۱، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x-2]}{\sqrt{x+4} - x}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) -1 (۳) $+\infty$ (۴) $-\infty$

تمرین ۱۲، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(1-x)^2 (x^2 - 2x + 1)}$ کدام است؟

(۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

تمرین ۱۳، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^3 + x - 2|}{x^3 - x^2 - x + 1}$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) $+\infty$ (۳) $-\infty$ (۴) $\frac{1}{4}$

تمرین ۱۴، در صورتی که $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ کدام بیان درست است؟ (ساده و تعبیر ۹۸)

(۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

تمرین ۱۵، در صورتی که $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ کدام بیان درست است؟ (ساده و تعبیر ۹۸)

(۱) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = +\infty$ (۲) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = -\infty$ (۳) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$ (۴) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$

(خند سبز)

تقریب ۱۴: اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{ax+b}{a+\cos x} = +\infty$ باشد مقدار b کدام است؟

- ۱-۱
- ۲-۲
- ۳-۱
- ۴-۲

(خند سبز)

تقریب ۱۷: اگر $\lim_{x \rightarrow L^+} \frac{x+1}{x^2-x-4} = +\infty$ باشد مقدار L کدام است؟

- ۱-۲
- ۲-۳
- ۳-۴
- ۴-۱

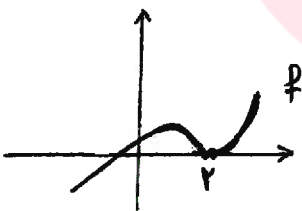
(خند سبز)

تقریب ۱۸: نمودار تابع $f(x) = \frac{\cos x}{\tan^2 x - 1}$ را در اطراف $x = \frac{\pi}{3}$ چگونه است؟



(خند سبز)

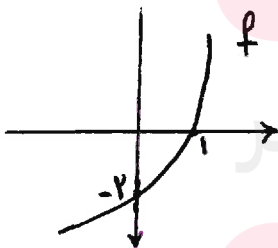
تقریب ۱۹: با توجه به نمودار f حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{f(x)}$ کدام است؟



- ۱-۱
- ۲-+∞
- ۳-∞-
- ۴-∞+

(خند سبز)

تقریب ۲۰: اگر نمودار تابع f در شکل زیر باشد، حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f}{f-1}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

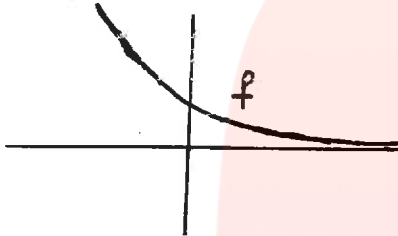


- ۱-∞+
- ۲-∞-
- ۳-∞+
- ۴-۱

صفحه ۵۸ تا ۶۴ نام درس

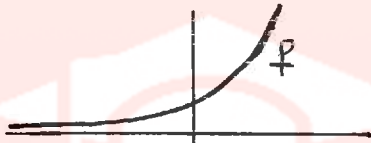
۴۴ عدد بی نهایت

عدد بی نهایت ۲ حالتی لغت می شود که x نسبت به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند ($\pm \infty$)



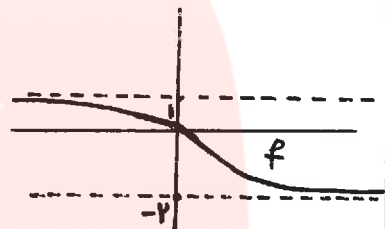
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

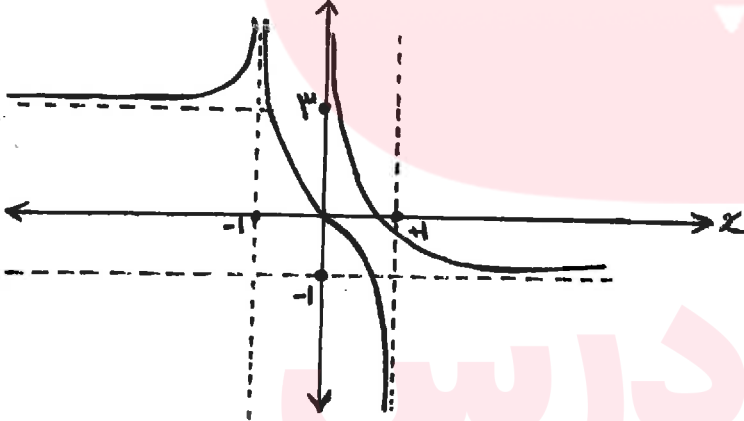
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

توجه! ۱. نمودار مقابل مربوط به تابع f باشد. حاصل حرکت از هر یکی از دو طرف منتهی را ببینید.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{undefined}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \text{undefined}$$

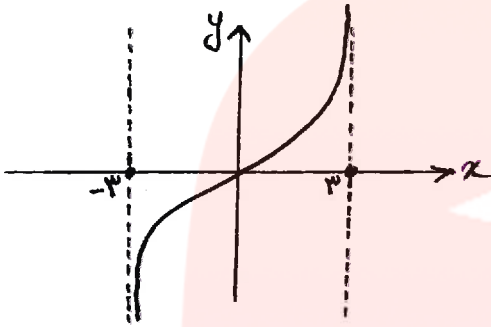
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{undefined}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \text{undefined}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{undefined}$$

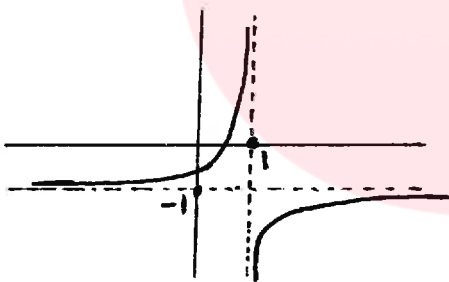
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x-2) = \text{undefined}$$

تجرب ۲: با توجه به رفتار تابع f اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$ باشد حاصل $[a] + [b]$ کدام است؟



- ۱) منفی
- ۲) -1
- ۳) -2
- ۴) 1

تجرب ۳: مشخص کنید تابع $f(x)$ در صورتی که $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow (-b)^-} f(x)$ (نتیجه)



- ۱) L
- ۲) -1
- ۳) $-\infty$
- ۴) $+\infty$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

حالاتی که در آن ضابطه:

در حل سوالات «حد در بی نهایت» فقط به نامی پیدتان را در نظر بگیرید و بقیه جمله‌ها را نادیده بگیرید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 - x + a - 1}{-x^2 - 2x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2}{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + 2}{x^4 - 2^x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1^x}{4x^5 - 2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{4x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x^5 - 1) \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (a - x^2) \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2)$$

بعد از اینکه به جواب نامی پیدتان را نوشتیم +∞ یا -∞، x و ثابت آن می‌ماند. این را جایگزین می‌کنیم و هر یک از حالات نامی زیر ممکن است رخ دهد: (نیازی به استفاده از نقطه تفکر)

$(+\infty)(+\infty) = +\infty$	$(+\infty)^2 = +\infty$	$0 \times (\pm\infty) = 0$	$(\pm عدد) + (+\infty) = +\infty$
$(+\infty)(-\infty) = -\infty$	$(-\infty)^2 = +\infty$	$(+ عدد)(+\infty) = +\infty$	$(\pm عدد) - (-\infty) = -\infty$
$(-\infty)(+\infty) = -\infty$	$(+\infty)^3 = +\infty$	$(- عدد)(+\infty) = -\infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(-\infty)(-\infty) = +\infty$	$(-\infty)^3 = -\infty$	$(- عدد)(-\infty) = +\infty$	$\frac{\pm عدد}{\infty} = 0$

نکته ۱: در تابع کسری ۳ حالت زیر ممکن است پیش آید:

① ∞ / ∞ صورت = ∞ یا $-\infty$ ← جواب ∞ یا $-\infty$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x - x}{2x^2 + x^2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{3x - 2} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

② ∞ / ∞ صورت < ∞ یا $-\infty$ ← جواب $+\infty$ یا $-\infty$ است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + 1} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2} = \frac{3(+\infty)}{2} = +\infty$$

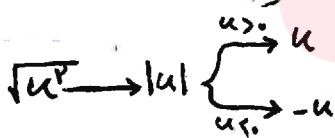
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x}{2x + x^3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1(-\infty) = +\infty$$

③ ∞ / ∞ صورت > ∞ یا $-\infty$ ← جواب 0 است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2x^2}{1 - x^3} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3}{2x^4 - x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x} = \frac{-1}{2(+\infty)} = \frac{-1}{-\infty} = 0$$

نکته ۲: اگر بار اولی جواب $0/0$ باشد، به معنی آنکه در صورت تقسیم توان بار اولی از زیر را با توان بار اولی صورت $0/0$ است.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 4x}}{18x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |2x|}{18x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{18x} = \frac{1}{9}$$

نکته ۳: آرد با برآکت مواجه شدیم ۲ حالت داریم:

① درون برآکت عدوس غیر صفر است ← در این حالت می‌توان راحت است

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+1}{5x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{5x} \right] = \left[\frac{2}{5} \right] = \left[0.4 \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x+1}{2+3x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-4x^2}{3x^2} \right] = \left[\frac{-4}{3} \right] = \left[-1.33 \right] = -1$$

② درون برآکت عدوس صفر است (مثل ۲) ← باید مشخص کنیم درون برآکت ۲+ است یا ۲- یا ۰ یا بی‌نهایت است

یک عدد بزرگ مانند ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ مشخص می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x-1}{x+4} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{x} \right] = [3] = ? \rightarrow \left[\frac{3(100)-1}{100+4} \right] = \left[\frac{299}{104} \right] = [2.87] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x+5}{x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x}{x} \right] = [2] = ? \rightarrow \left[\frac{2(100)+5}{100-1} \right] = \left[\frac{205}{99} \right] = [2.07] = 2$$

نکته ۴: گاهی اوقات ۲ حالت $\infty - \infty$ داریم که بی‌معنی است و باید رفع ابهام کنیم

بسیار رفع ابهام از حالت $\infty - \infty$ ← آرد عبارت را یکی می‌بورد ← $\infty - \infty$
 ← آرد یا حتی کسر با مخرج صفر بورد ← مخرج مشترک

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |2x|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2x = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 4x} \times \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 + 4x)}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 4x}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x + \sqrt{4x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} \rightarrow \infty - \infty \text{ بی‌معنی}$$

$$\text{رفع ابهام: } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - 2(x+2)}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1 - 2x - 4}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-2x - 3}{(x-2)(x+2)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \right) = \frac{-2}{2} = -1$$

نتیجه ۵:

$$\left[\frac{1}{+\infty} \right] = \left[\frac{1}{1 \dots} \right] = [0^+] = 0$$

$$\left[\frac{-1}{+\infty} \right] = \left[\frac{-1}{1 \dots} \right] = [0^-] = -1$$

$$\left[\frac{1}{-\infty} \right] = \left[\frac{1}{-1 \dots} \right] = [0^-] = -1$$

$$\left[\frac{-1}{-\infty} \right] = \left[\frac{-1}{-1 \dots} \right] = [0^+] = 0$$

نتیجه ۶: به ازای هر قدری که x را بزرگتر کنیم، باز هم x را بزرگتر کنیم...

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 - (x+2)^2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 4)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x - 3}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x} = -4$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۱: عامل صفای باز سه را مناسب کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - 2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + x - 2}{x + 2}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x + x^2}{2 - x}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 2x - 2x^3}{-x^2}$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3x}{x^2} \right)$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{3}{x^2}}{-\frac{1}{x} + 2}$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 5x + 2)$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2x^2}{3} - x - 1 \right)$$

$$۹) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - |5x|}{x - 1}$$

$$۱۰) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|-2x + 1| - x}{x^2 - 2}$$

$$۱۱) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - |x|)$$

$$۱۲) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 1| + |-2x^2 + 1|}{|-x - 2|}$$

$$۱۳) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + \sqrt{9x^2 - 1}}{2x - 2}$$

$$۱۴) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + \sqrt{3x^2 - x}}{2\sqrt{2}}$$

$$۱۵) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5x + x^2} + x}{x(x+1)}$$

$$۱۶) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$۱۷) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{2x - 2} \right]$$

$$۱۸) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} \right]$$

$$19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+1} \right]$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x+1}{-2x} \right]$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x+1}{x-3} \right]$$

$$22) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+2) \left[\frac{4x-1}{2x+1} \right]$$

تمرین ۲، عبارت $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ترتیب ۲ صحیح است؟

ب) تابع f را به دو نیمی رسم کنید هر دو شرط بالا را داشته باشد.

تمرین ۳ مقدار a , b را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^3+bx^2+c}{4x^2-2} = -\frac{2}{3}$ باشد.

تمرین ۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید پس $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را بیابید.

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تربیت ۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}} + 4x - 3}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴) منفی (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

تربیت ۶: حد تابع $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 - 5x}{-2x + 1}$ در $+\infty$ و $-\infty$ ترتیب کدام است؟

$+\infty, -\infty$ (۴) $-\infty, +\infty$ (۳) $-\infty, -\infty$ (۲) $+\infty, +\infty$ (۱)

تربیت ۷: حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1)^2 - (x^2-3)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2}$ در $+\infty$ و $-\infty$ کدام است؟

$-\infty$ (۴) -2 (۳) 2 (۲) 1 (۱)

تربیت ۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}$ کدام است؟

منفی (۴) 2 (۳) $-\infty$ (۲) $+\infty$ (۱)

تربیت ۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x+4| - 3|x-1|}{|2-x| - 3x}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۱)

(صفتی سنج)

تربیت ۱۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+7x} - \sqrt{9x^2+11x}}{|x| + \sqrt{4x^2+10x}}$ کدام است؟

-1 (۴) 1 (۳) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۱)

(سازمان تعریف خارج ۹۸)

تربیت ۱۱: دانسته $f(x) = x - \sqrt{4x^2+x}$ با استفاده از $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

3 (۴) 2 (۳) -1 (۲) -2 (۱)

تمرین ۱۲: مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ کدام است؟ (سازش تجربی ۱۴۰۰)

۱۴۰۰
 $\sqrt{2}$ ۱۴
 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۱۳
 ۱۲
 صفر ۱۱

تمرین ۱۳: اگر $f(x) = \frac{-1}{x+1}$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x)$ کدام است؟ (سازش ریاضی ۷۳)

۱۴
 $\frac{1}{2}$ ۱۳
 $-\frac{1}{2}$ ۱۲
 -۱ ۱۱

تمرین ۱۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 2^x}{4x + 3^x}$ کدام است؟ (خلاق سبز)

۱۴
 $\frac{9}{4}$ ۱۳
 صفر ۱۲
 $\frac{2}{3}$ ۱۱

تمرین ۱۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4x - 2}{x + 1} \right]$ کدام است؟

+∞ ۱۴
 صفر ۱۳
 ۴ ۱۲
 ۵ ۱۱

تمرین ۱۶: اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-ax^2 - 4x + 2x}{5x^2 - x^2 - 1} = 2$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + x)$ کدام است؟

-۴ ۱۴
 ۴ ۱۳
 -۱۴ ۱۲
 ۱۴ ۱۱

تمرین ۱۷: در تابع $f(x) = \frac{ax^2 - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد $f(-1)$ کدام است؟

(سازش تجربی خارج ۹۱)

۳ ۱۴
 ۲ ۱۳
 $\frac{2}{3}$ ۱۲
 -۲ ۱۱

تمرین ۱۸: اگر $n > 3$ و n زوج و m با $n - 2$ است $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+n} + 2x + m}{x^{n-2} - mx + n - 1}$ کدام است؟

(سازش تجربی ۱۴۰۰)

۵ ۱۴
 $\frac{5}{2}$ ۱۳
 ۴ ۱۲
 $\frac{5}{2}$ ۱۱

تمرین ۱۹: هندار تابع با تابعی $f(x) = \frac{\alpha x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ از نقطه $(2, 1)$ میگذرد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

(سازمان تعجب ۹۶)

۱۴

$\frac{2}{3}$ ۱۳

$\frac{1}{3}$ ۱۲

$-\frac{1}{3}$ ۱۱

تذکره: بعضی مرتبه‌ها نیاز به وضع ارقام داریم یا بدون است که \leftarrow بیسیم \leftarrow بیسیم \leftarrow بیسیم

⊗ خروج - مغز مغز

تمرین ۲۰: هندار تابع با تابعی $f(x) = \frac{3x - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^2 + 4}$ است. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ باشد. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

(سازمان تعجب ۹۰)

$\frac{1}{3}$ ۱۴

$\frac{2}{3}$ ۱۳

$\frac{2}{3}$ ۱۲

$\frac{2}{3}$ ۱۱

تمرین ۲۱: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax - x + 2} = -1$ باشد. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ کدام است؟

(سازمان واضح ۹۰)

$\frac{4}{3}$ ۱۴

$\frac{2}{3}$ ۱۳

$-\frac{2}{3}$ ۱۲

$-\frac{4}{3}$ ۱۱

تمرین ۲۲: تابع با تابعی $f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ باشد. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

(سازمان تعجب ۹۹)

$-\frac{4}{11}$ ۱۴

$-\frac{5}{12}$ ۱۳

$-\frac{4}{12}$ ۱۲

$-\frac{4}{12}$ ۱۱

www.nay-dars.ir

تعیین ۲۳: تابع باضابطه $f(x) = \frac{\alpha x - \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\epsilon x^2 - 12}$ را در نظر بگیرید. آن را $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{4}$ باشد. آن زمان $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- (سازنده: تجربی ۹۹)
- ۱) $\frac{1}{24}$
 ۲) $\frac{1}{18}$
 ۳) $\frac{1}{12}$
 ۴) $\frac{5}{34}$

تعیین ۲۴: آن را $f(x) = 2x + \sqrt{\epsilon x^2 + x}$ باشد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

- (سازنده: تجربی ۹۸)
- ۱) $\frac{1}{2}$
 ۲) $-\frac{1}{2}$
 ۳) $-\frac{1}{\epsilon}$
 ۴) منفی

تعیین ۲۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{\epsilon x - 8} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$ کدام است؟

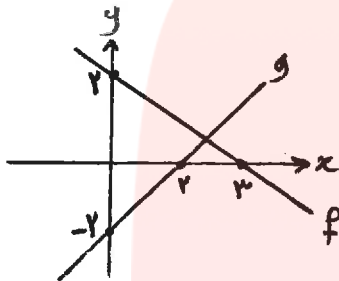
- (سازنده: تجربی ۸۵)
- ۱) $\frac{3}{8}$
 ۲) $\frac{3}{14}$
 ۳) $\frac{1}{8}$
 ۴) $\frac{1}{14}$

تعیین ۲۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟

- (سازنده: تجربی ۹۴)
- ۱) $-\frac{5}{2}$
 ۲) $-\frac{2}{2}$
 ۳) $\frac{1}{2}$
 ۴) $\frac{3}{2}$

تذکره: گاهی اوقات به جای ضابطه، مقدار را مامی (صندک) باید از درس مقدار تابع را پیدا کنیم و باز هم تقیه بپردازان...

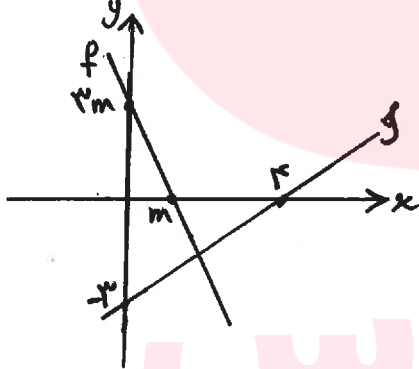
تعمیر ۲۷: اگر مقدار تابع f و g صورت زیر باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟ (به تالیفی)



- ۱
- ۲
- ۳
- ۴

تعمیر ۲۸: شکل زیر در مقدار تابع f و g را نشان می‌دهد حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟

(سابقه تعمیر ۱۴۰۲)



- ۲ ۱
- ۳ ۲
- ۴ ۳
- ۴ ۴

مای داریس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سؤالات امتحان نهایی

① حد تابع زیر را به دست آورید. (دس ۹۷)

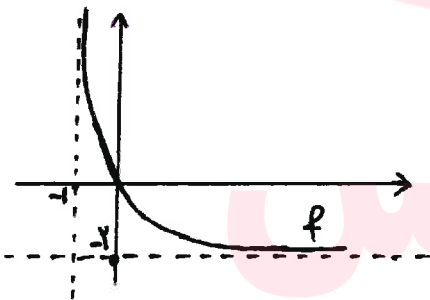
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$$

② حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

با استفاده از نمودار تابع f ، حد های خواسته شده را بنویسید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

③ حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. (مهر ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 14}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

www.my-dars.ir

④ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دس ۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x+3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$$

⑤ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (فدراد ۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x+4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

⑥ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شعبده ۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x] - 3}{|2x-1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{4x^3 - 11x^2 - 3}$$

⑦ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دس ۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$$

۸) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{p}} \frac{[x]}{|2x+1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x-5}}$$

۹) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (سفریور ۱۴۰۰)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x^3 + 2x^2}{2x^3 + 9}$$

۱۰) حد تابع زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (ب ۱۴۰۰)

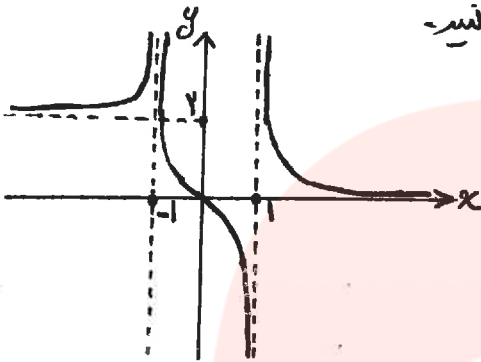
$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{2x^2 - x}{e2x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$$

۱۱) حاصل حد زیر را در صورت وجود محاسب کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 - \sqrt{x+3}}$$

یپ: نمودار تابع f صورت شکل مقابل است. حد در نقاط زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

۱۲) الف: درست یا نادرست عبارات زیر را مشخص کنید. (استدلال در ۱۴.۱)

* بازه $(2, 5)$ یک همبستگی است

یپ: حد در زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

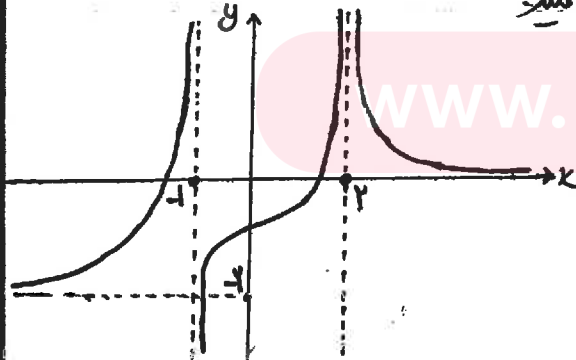
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x}{2x + 4}$$

۱۳) الف: حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (در ۱۴.۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

یپ: نمودار تابع f به صورت شکل زیر است. حد های زیر را محاسبه کنید.



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

۱۴) حد های زیر را در صورت وجود مناسب کنید. (شماره ۱۴۰۲)

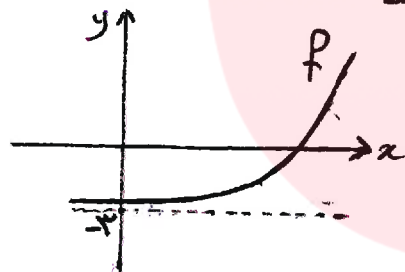
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{|\sin x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x^{\Delta}}{x^2 - x}$$

ب) آیا مقدار $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟

۱۵) با توجه به نمودار تابع f ، حاصل حد های زیر را بدست آورید. (شماره ۱۴۰۲)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

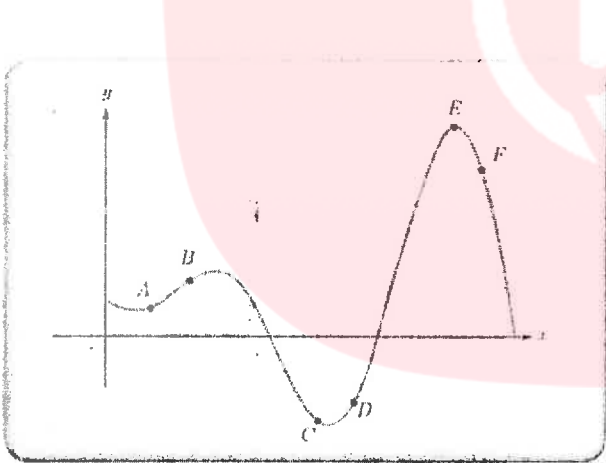
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

ب) حد های زیر را در صورت وجود مناسب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{|x-x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-1}$$

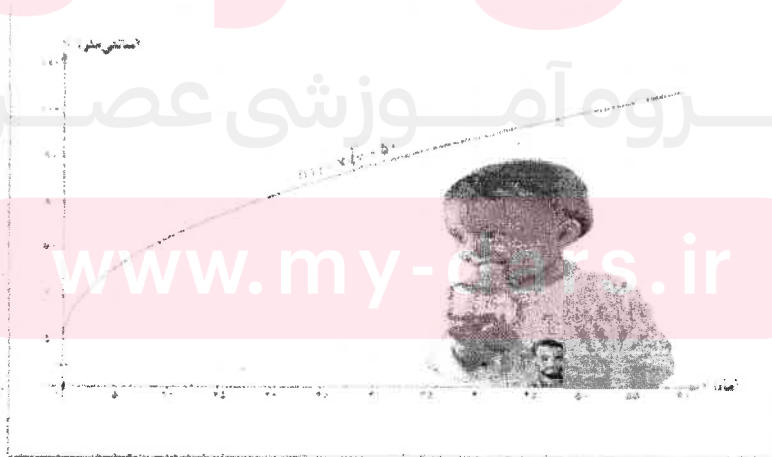
مستوفی



مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir





۱۹۳

آشنایی با مفهوم مشتق

مای درس

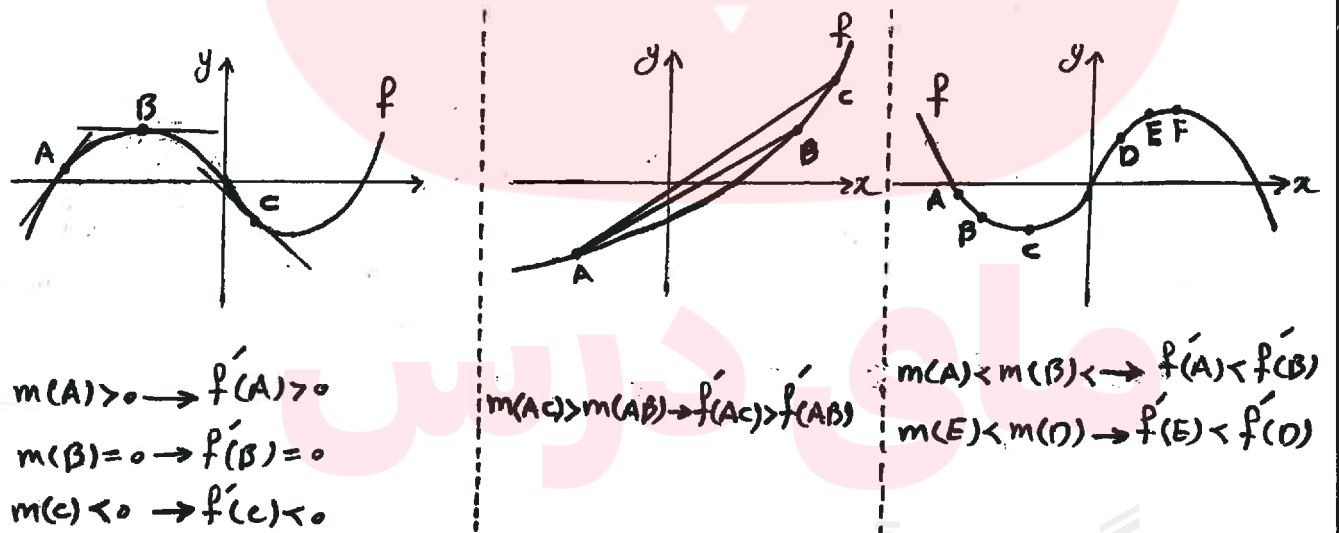
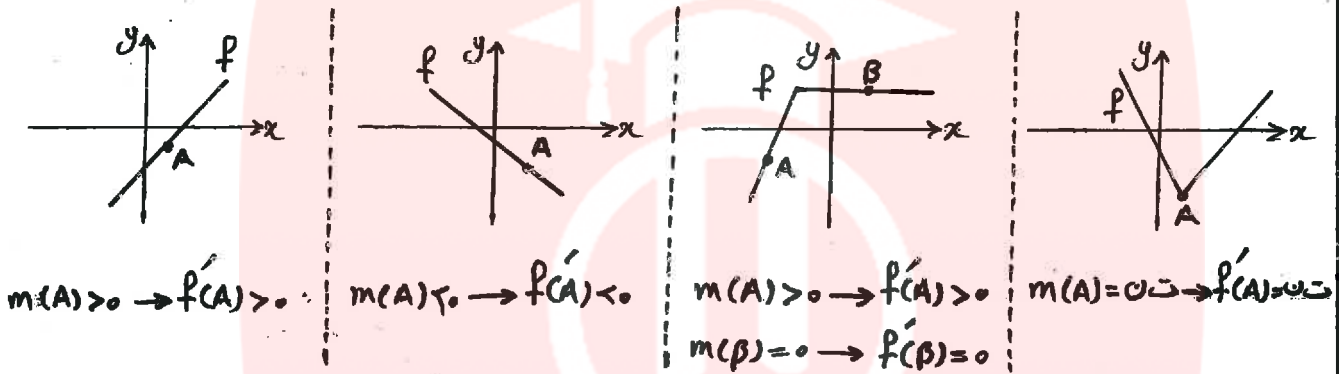
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

آشنایی با مفهوم مشتق:

صفحه ۷۴ تا ۷۶ کتاب درسی

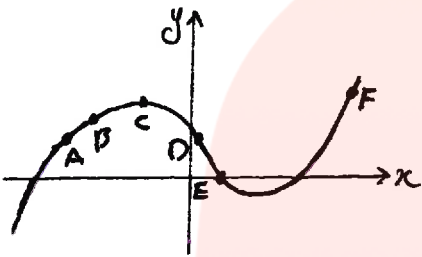
مشتق نقطه A = شیب خط مماس بر نمودار در نقطه $A = f'(A)$



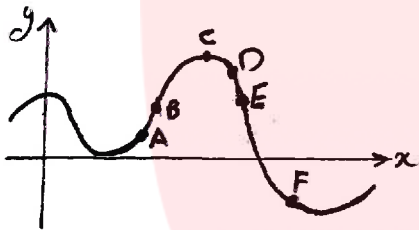
نکته: در توابع خطی شیب تمام نقاط باهم برابر است ← پس مشتق تمام نقاط نیز باهم برابر است.
 ولی در توابع غیر خطی (منحنی ها) این گونه نیست.

تمرین ①: در شکل مقابل که مربوط به تابع f است شیب نقاط مشخص شده را از کوچک ترین به بزرگ ترین

رتب کنید.

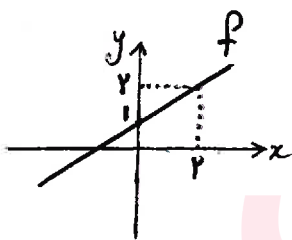


تمرین ②: در نمودار زیر، نقاط داده شده را با شیب هاس از آن شده نقلیه کنید.



-3	-2	$-\frac{1}{3}$	صفر	+1,5	$+\frac{5}{2}$	شیب
						نقطه

تمرین ③: یا توجه به نمودار f ، سوالات زیر پاسخ دهید.



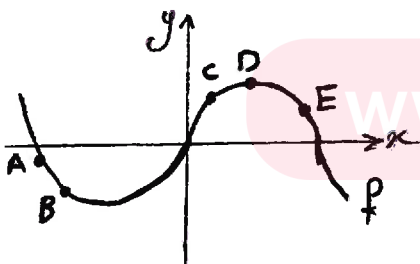
الف: مقدار $f'(3)$ را محاسبه کنید.

ب: آیا منتهای این نقطه درسی این نمودار یافت که شیب معاف مناسب به نمودار

در آن نقطه برابر -1 باشد؟ چرا؟

تمرین ④: با توجه به نمودار زیر درستی و نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

تذکره: $f(x)$ یا $f'(x)$ مثبت دارد!!!



* $f'(A) > f'(B)$

* $f'(C) > f'(D)$

* $f(D) > 0$

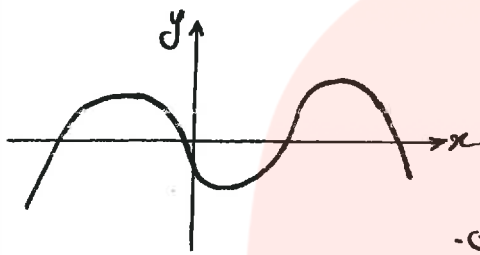
* $f'(E) > f(E)$

* $\frac{f'(D)}{f(E)} > 0$

* $f(A) + f(E) < 0$

تمرین ۵: با توجه به نمودار زیر نقاط خواسته شده را روی آن مشخص کنید.

* A نقطه‌ای است که مقدار تابع و مقدار مشتق هر دو منفی است.



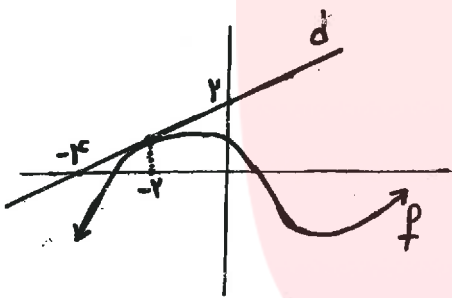
* B نقطه‌ای است که مقدار تابع منفی و مقدار مشتق برابر صفر است.

* C و D دو نقطه‌ای که این نمودار هستند که مقدار مشتق آنها قرینه هم است.

تمرین ۶: در شکل زیر خط d در نقطه $x = -2$ به نمودار f مماس شده است.

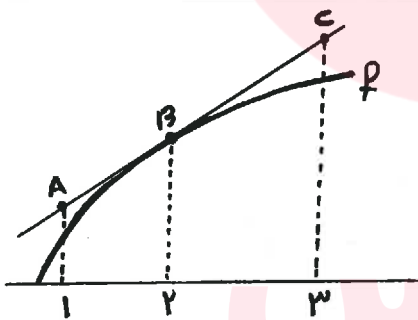
الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = -2$ محاسبه کنید.

ب) نقطه‌ای با طول $+3$ روی این خط مماس را بیابید و عرض آن را بیابید؟



تمرین ۷: معادله خط مماس به خط d در نقطه B به نمودار f مماس شده است.

اگر $f'(x) = 5$ ، $f(x) = 4$ باشد، مختصات نقاط A ، B ، C را بیابید.



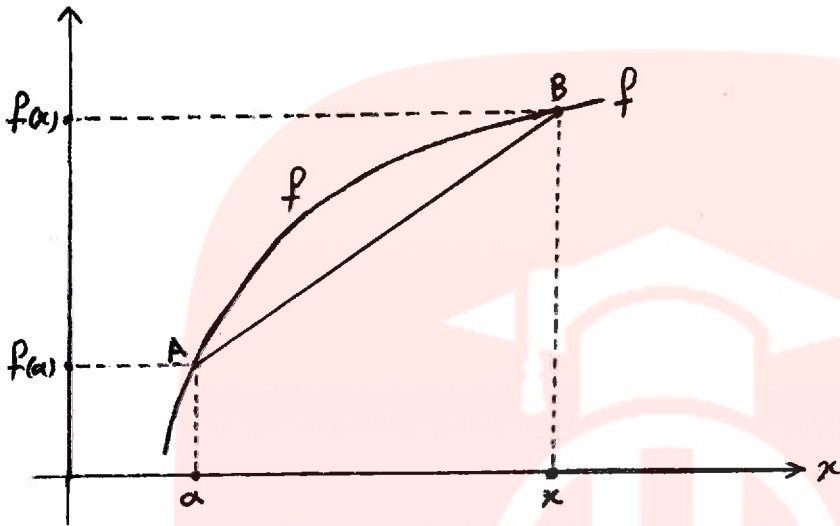
تمرین ۸: تعدادی از مقادیر تابع f در بازه $[۱, ۵]$ در جدول زیر آمده است. نمودار f در این بازه کدام است؟

x	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$	۸	۱۰	۱۹	۲۸	۴۷

www.my-dars.ir

۱) ۲) ۳) ۴)

تعریف مشتق ①:



AB یاره خط $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

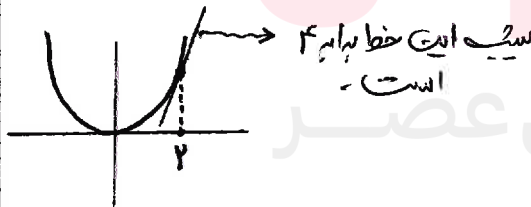
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۱، اگر $f(x) = x^2$ باشد حاصل $f'(2)$ را بیابید.

حل: $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2 = 4$$

پس $f'(2) = 4$ باشد یعنی اینک $\frac{0}{0}$ سبب خطا است برقرار $x=2$ در نقطه $x=2$ باید است.



مثال ۲: سبب خطا است برقرار $f(x) = x^2 + 4x + 1$ در نقطه $x = -1$ حاصل کنید.

حل: $f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 1 - (-2)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = -1 + 3 = 2$$

تذکره: در حل مسائل تعریف مشتق همیشه پس از جایگزینی عدد در $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ به معجم منقسم و برای رفع ابهام از اتحاد مزدوج، تجزیم، اتحاد ملحق در جمله اس، فاکتورگیری، * مزدوج و تقسیم استفاده می‌کنیم.

تربیت ①: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقاط منفرجه سره محاسبه کنید.

$$۱) f(x) = 2x - 4$$

$$f'(1) =$$

$$۲) f(x) = -5x - 1$$

$$f'(3) =$$

$$۳) f(x) = x^2$$

$$f'(-2) =$$

$$۴) f(x) = x^2 - 5$$

$$f'(-1) =$$

$$۵) f(x) = x^2 + 3x - 2$$

$$f'(3) =$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$4) f(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$f'(-2) =$$

$$7) f(x) = -x^2 + x + 5$$

$$f'(-1) =$$

$$8) f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'(2) =$$

$$9) f(x) = -2x^2 + x + 10$$

$$f'(-2) =$$

$$10) f(x) = x^3 - 2$$

$$f'(-1) =$$

$$11) f(x) = \sqrt{x} - 2$$

$$f'(4) =$$

مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تمرین ۲: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ را در نقطه $x = -3$ محاسبه کنید.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

یاری درس: معادله خط

برای پیدا کردن معادله خط، شیب و یک نقطه نیاز داریم. مثلاً $m = 2$ و $(-1, 4)$

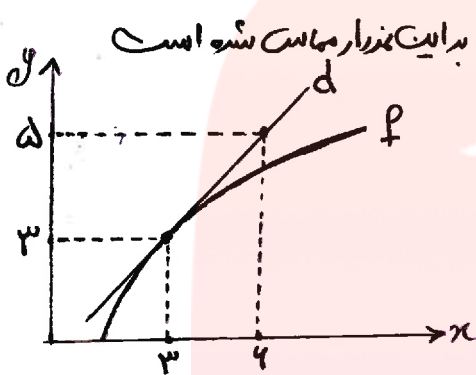
تمرین ۳: معادله خط مماس به نمودار $f(x) = 2 - 3x^2$ را در نقطه $x = 1$ پیدا کنید.

تمرین ۴: معادله خط مماس به نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x = 5$ محاسبه کنید.

تمرین ۵: معادله خط مماس به منحنی $y = \frac{1}{x}$ در نقطه $(1, 1)$ پیدا کنید.

تمرین ۶: عرض از مبدا و معادله خط مماس به نمودار $f(x) = \frac{1}{1-x}$ را در نقطه $x = -1$ پیدا کنید.

تمرین (۷): اگر $12 = 3f'(2)$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟



تمرین (۸): نمودار زیر مربوط به تابع f می باشد و خط d در نقطه $x = 3$ بر این نمودار مماس شده است

الف: حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ کدام است؟

ب: حاصل $3f'(3) - f'(3)$ کدام است؟

تذکره: گاهی ۲ عبارت $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ و عدد یا عبارتی را اضافه می کنند که این عدد یا عبارت اضافی را باید جدا کنیم

مثال: اگر $f'(2) = 5$ باشد حاصل هر یک از عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \rightsquigarrow = f'(2) = 5$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3x - 6} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{3(x - 2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{3} f'(2) = \frac{5}{3}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{4} f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \rightsquigarrow = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 4}{f(x) - f(2)} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{f(x) - f(2)} = 5 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} = 5 \times \frac{1}{f'(2)} = 1$$

تمرین ۹: اگر $f'(1) = 3$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 2f(1)}{x^2 - 1}$ را محاسبه کنید.

تمرین ۱۰: اگر $f(3) = -1$ و $g(3) = 1$ باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)g(x) - g(x)}{x - 1}$ چند برابر $f'(3)$ است؟

تمرین ۱۱: اگر $f(-2) = 2$ مقدار $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{f(t) - f(-2)}{2(t+2)}$ کدام است؟
 (مدرسه تجربی ۷۴)

$1(1)$ $-1(2)$ $2(3)$ $1(4)$

تمرین ۱۲: اگر مشتق تابع f در نقطه $x=2$ موجود باشد آنگاه حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4}$ کدام است؟ (گزینه)

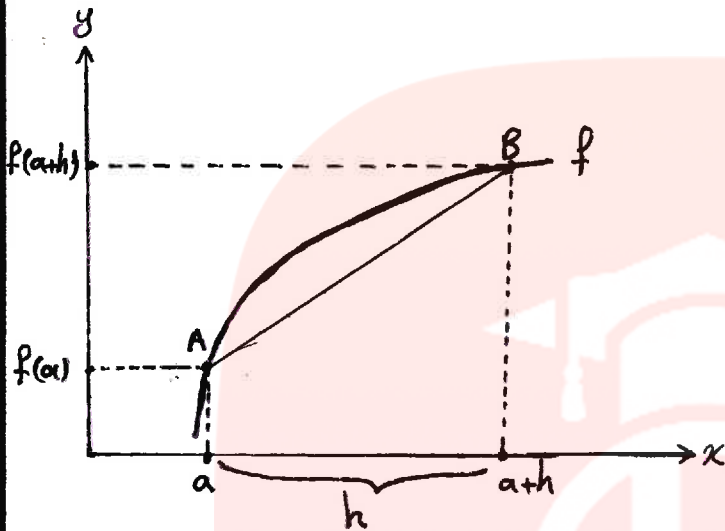
$1) \frac{1}{4} f'(2)$ $2) -\frac{1}{4} f'(2)$ $3) -\frac{1}{4} f'(2)$ $4) \frac{1}{4} f'(2)$

تمرین ۱۳: اگر خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = -1$ به خط $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ عمود باشد حاصل

عبارت $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x^2 + 3x - 4}$ کدام است؟

$1) \frac{-3}{5}$ $2) \frac{3}{5}$ $3) -3$ $4) 5$

تعریف مشتق (۷):



AB شیب = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

تذکره: h می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \rightarrow f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

تذکره: برای بدست آوردن مشتق با استفاده از تعریف، فقط از رابطه (۱) استفاده می‌کنیم چون ساده‌تر است.

نکته ۱: خاصه اوقات h را از این فریب است که در این صورت از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{kh} = \frac{(\text{ضریب } h \text{ اول}) - (\text{ضریب } h \text{ دوم})}{\text{ضریب } h \text{ مخرج}} \times f'(a) = \frac{m-n}{k} f'(a)$

نکته ۲: خاصه اوقات h را از این بدان است که چون $h \rightarrow 0$ توان h را نادیده می‌گیریم.

تمرین ①: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 3x + 2} = 3$ باشد حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ را محاسبه کنید.

تمرین ②: اگر $f'(-1) = 2$ باشد حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+3h) - f(-1+h)}{h}$ را محاسبه کنید؟

$2(1) \quad -2(2) \quad 4(3) \quad -4(4)$

تمرین ③: اگر $f'(2) = 3$ باشد حاصل عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$ را محاسبه کنید؟

$\frac{9}{2}(1) \quad \frac{2}{9}(2) \quad \frac{3}{2}(3) \quad \frac{2}{3}(4)$

تمرین ④: اگر شیب خط مماس به نمودار f در نقطه $\alpha = -2$ برابر $\frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+3h) - f(-2)}{-h}$ را محاسبه کنید؟

کدام است؟

$-3(1) \quad 3(2) \quad -2(3) \quad 2(4)$

تمرین ⑤: اگر نمودار f به نمودار f در نقطه α با 3 باشد، $y = -2x + 5$ موازی باشد حاصل

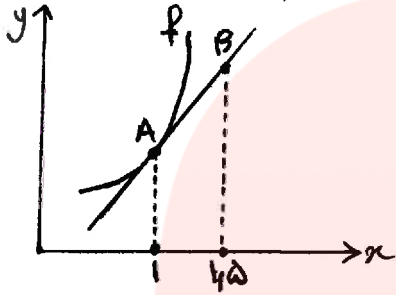
عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h+3) - f(3)}{2h^2}$ را محاسبه کنید؟

$-1/4(1) \quad -1/4(2) \quad 1/8(3) \quad -1/8(4)$

تمرین ⑥: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 5$ باشد حاصل $f'(x) + f'(x)$ را محاسبه کنید؟

$2(1) \quad 3(2) \quad 5(3) \quad 1(4)$

تست ۷: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2$ باشد عرض نقطه B در شکل زیر کدام است؟ (خند سبزه)



۳، ۵ (۱)

۴، ۵ (۲)

۴ (۳)

۵ (۴)

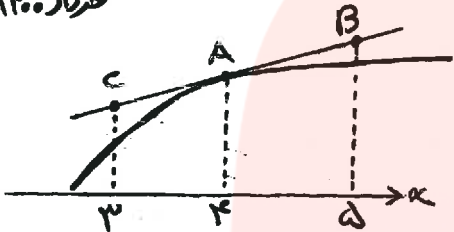
مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوالات امتحان نهایی

۱) برای تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ در $x=2$ ، $f'(2) = 1.5$ ، $f(2) = 24$ با توجه به شکل منتهای نقاط A, B, C را بیابید. (۹۷ رتبه) شماره ۱۴۰۰



۹۷ رتبه

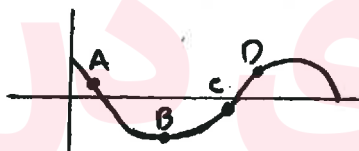
۲) اگر $f(x) = 1 - 2x^2$ باشد ، $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

۳) مشتق تابع $f(x) = x^3 - 2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقاطی که طول $x = -1$ بیابید. (۹۸ رتبه)

شماره ۹۸

۴) نقاطی که در آن مشتق صاف می‌شود را با شیب‌های $1, 0, \frac{1}{4}, -2$ در جدول نظیر کنید.

شیب	1	0	$\frac{1}{4}$	-2
نقطه				

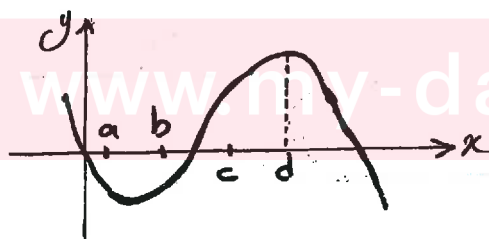


۹۸ رتبه

شماره ۱۴۰۰

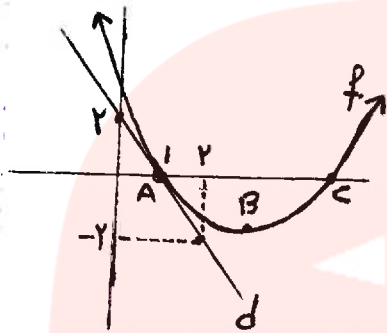
۵) با در نظر گرفتن نمودار f در شکل ، نقاطی که طول a, b, c, d را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.

x	$f'(x)$
	0
	$1/5$
	2
	$-1/5$



خرداد ۹۹

۶) در شکل زیر خط d در نقطه $a=1$ به نمودار f مماس شده است:

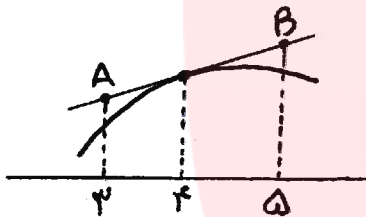


الف: مشتق تابع f را در نقطه $a=1$ محاسبه کنید.

ب: شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.

شهریور ۹۹

۷) برای تابع f در شکل زیر دو برابریم: $f'(4) = \frac{3}{4}$ ، $f'(5) = 2$ با توجه به شکل مشتقات



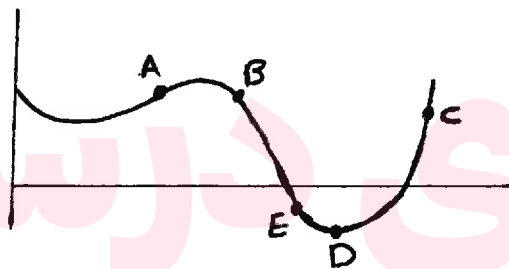
نقاط A ، B ، C را بیابید.

دی ۹۹

۸) نقاط a ، b ، c ، d ، e روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نقلیه کنید.

(کیت نقطه اضافی است)

شیب	نقطه
-۳	
-۱	
۰	
۱	

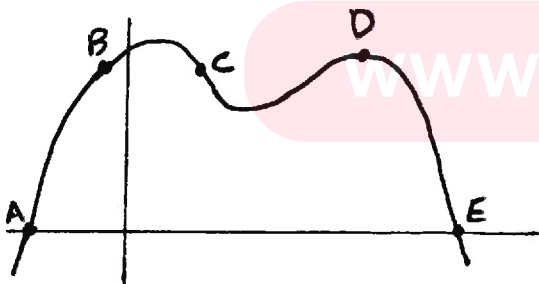


شهریور ۱۴۰۱

۹) از بیت نقاط مشخص شده A ، B ، C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:

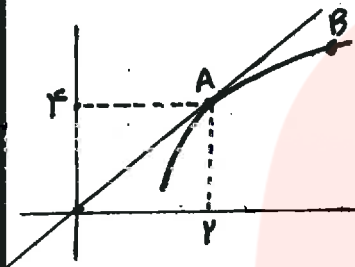
الف: مقدار تابع صفر و مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب: مقدار تابع مثبت و مقدار مشتق آن منفی است؟



مس ۱۴۰۱

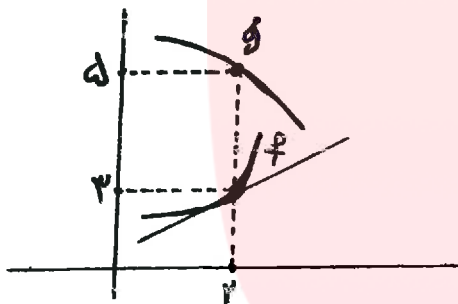
۱۰) نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطه A به نمودار f مماس باشد:



الف: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب: نسبت خط مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.

۱۱) با توجه به نمودارهای تابع f و g حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)g(x) - 3g(x)}{x - 2}$ چند برابر $f'(2)$ است؟ نمودار ۱۴۰۲



مای درس

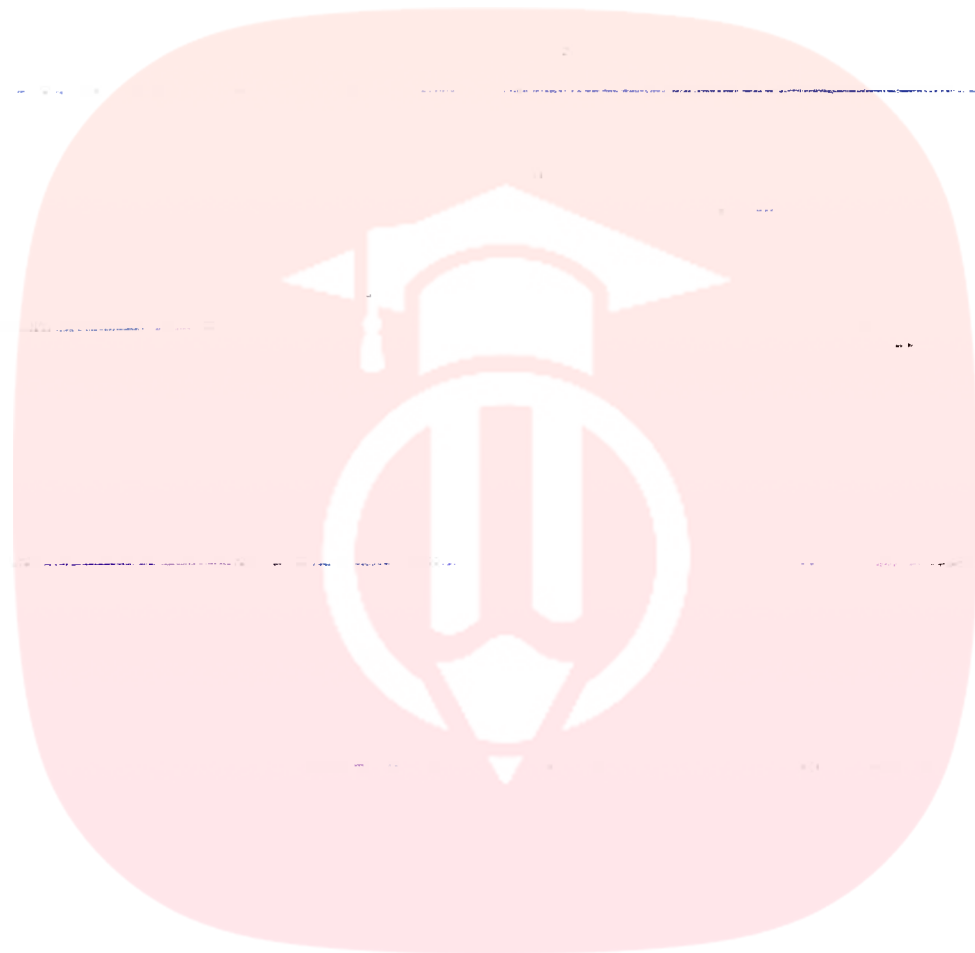
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

دوازدهم تجربی

فصل چهارم: مشتق

مدرس: مهدی سپهوند



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir