

ریاضیات

فتم

آمار

www.mydars.ir

کنکور

انواع متغیر تصادفی :

اسمی : رنگ چشم افراد ، گروه خونی

کیفی

ترتیبی : مراحل زندگی (خردسال، کودک، ...)

گسسته (شمارشی) : تعداد فرزندان یک خانواده ،

کمی

پیوسته : وزن افراد ، سن افراد ، قد افراد

www.my-dars.ir

۱- میزان تحصیلات افراد یک شهر ، کدام نوع متغیر است ؟

۱) کیفی ترتیبی ۲) کیفی اسمی ۳) کمی پیوسته ۴) کمی گسسته

۲- میزان آلودگی هوا ، کدام نوع متغیر است ؟

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته ۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

۳- نوع آلودگی هوا چگونه متغیر است ؟

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته ۳) کیفی اسمی ۴) کیفی ترتیبی

۴- خطای اندازه گیری در کدام نوع متغیرها ، وجود دارد ؟

۱) کمی گسسته ۲) کمی پیوسته ۳) کیفی ترتیبی ۴) کیفی اسمی

۵- از چه نوع متغیری ، برای شماره گذاری صندلی های شرکت کنندگان

در امتحانات ، استفاده می شود ؟

www.my-dars.ir

۱) پیوسته ۲) اسمی ۳) ترتیبی ۴) گسسته

میانه

میانه

مرکزی : محل تمرکز داده‌ها را مشخص می‌کند

شاخص‌های آماری

پراکندگی : پراکندگی داده‌ها را حول شاخص مرکزی بیان می‌کند

دامنه تغییرات

واریانس

انحراف معیار

ضریب تغییرات

مای درسی

گروه آموزشی عصر

میانه

www.my-dars.ir

اصلی‌ترین شاخص مرکزی است و آن را با \bar{x} نشان می‌دهند.

نکته ۱ - میانگین n داده آماری از رابطه زیر بدست می آید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

نکته ۲ - میانگین در هر جامعه آماری منحصر بفرد است.

نکته ۳ - میانگین همواره عددی است بین کوچکترین داده و بزرگترین داده

نکته ۴ - اگر همه داده های آماری با هم برابر باشند، میانگین آن ها

برابر یکی از داده هاست.

نکته ۵ - اگر تمام داده های آماری را با عددی جمع کنیم، میانگین نیز با

آن عدد جمع می شود.

نکته ۶ - اگر همه داده های آماری را در عددی ضرب کنیم، میانگین نیز

در آن عدد ضرب می شود.

سؤال ۶ - میانگین چند داده آماری برابر ۵۷ است. ابتدا از هر داده ۱۲ واحد کم و سپس داده های حاصل را سه برابر کرده ایم. میانگین داده های نهایی کدام است؟

۴۵ (۱) ۷۰ (۲) ۱۳۵ (۳) ۱۵۹ (۴)

$$\bar{x}' = (57 - 12) \times 3 = 45 \times 3 = 135$$

سؤال ۷ - میانگین داده های آماری زیر کدام است؟

۹, ۹, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۸, ۱۸, ۲۲

۱۲,۲ (۱) ۱۲,۴ (۲) ۱۲,۶ (۳) ۱۲,۸ (۴)

x_i	۹	۱۰	۱۴	۱۸	۲۲
f_i	۳	۴	۵	۲	۱

x_i	-۸	-۴	۰	۴	۸
f_i	۳	۴	۵	۲	۱

$$\bar{x}' = \frac{-24 - 16 + 8 + 8}{15} = \frac{-24}{15} = -1,6$$

$$\bar{x} = -1,6 + 14 = 12,4$$

سوال ۸ - اگر میانگین داده‌های $3x_1 + 5, 3x_2 + 5, \dots, 3x_n + 5$ برابر ۲۹ باشد، میانگین داده‌های $5x_1 - 2, 5x_2 - 2, \dots, 5x_n - 2$ برابر کدام عدد است؟

۳۳ (۱) ۲۸ (۲) ۳۸ (۳) ۴۳ (۴)

میانگین : (Q_2)

میانگین یک تعداد داده، عددی است که نصف داده‌ها از آن بزرگتر و نصف داده‌ها از آن کوچکتر می‌باشند. برای بدست آوردن میانگین، ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم که دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول ۱) اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار

۱۰ , ۱۲ , ۱۷ , ۲۰ , ۲۵

↓
میانگین

می‌گیرد میانگین است. مثال :

حالت دوم) اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده‌ای که در

وسط قرار گرفته‌اند، برابر میانۀ است. مثال:

۵, ۹, ۸, ۱۰, ۲۱, ۲۸۰

$$\text{میانۀ } (Q_2) = \frac{۸+۱۰}{۲} = ۹$$

نکته ۱- در هر جامعه آماری نقطه یک میانۀ وجود دارد.

نکته ۲- اگر در بین داده‌ها، داده‌ای پرت وجود داشته باشد، از

میانۀ به عنوان شاخص مرکزی استفاده می‌کنیم.

چارک‌ها: چارک‌ها، جامعه آماری را به چهار قسمت تقسیم می‌کند. اگر

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم، میانۀ، چارک دوم است (Q_2) .

میانۀ نیمی اول داده‌ها را چارک اول (Q_1) و میانۀ نیمی دوم

داده‌ها را چارک سوم (Q_3) می‌نامند.

برای مثال :

$$4, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 21, 25$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}} \downarrow Q_1 = 7.5$

 $\downarrow Q_2 = 15$

 $\underbrace{\hspace{1.5cm}} \downarrow Q_3 = 20.5$

(میانه)

مثال ۹- در داده‌های آماری زیر، داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم. میانگین داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

۳۱, ۳۴, ۳۵, ۳۷, ۳۸, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۵, ۴۶, ۵۲, ۵۳, ۵۶, ۵۶, ۵۷

۴۳, ۴ (۱)

۴۳, ۲ (۳)

۴۲, ۹ (۲)

۴۲, ۷ (۱)

$$31, 34, 35, 37, \textcircled{38}, 38, 39, 40, 40, 44, 45, 45, 46, \textcircled{52}, 53, 56, 56, 57$$

$\downarrow Q_1$

 $\downarrow Q_2 = 42$

 $\downarrow Q_3$

$$\bar{x} = \frac{38 + 38 + 39 + 40 + 40 + 44 + 45 + 45 + 52 + 57}{10}$$

www.my-dars.ir

$$\bar{x} = 42, 7$$

دامنه تغییرات :

ساده ترین شاخص پراکندگی است.

اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین داده‌ها را نشان می‌دهد.

$$R = x_{max} - x_{min}$$

نکته ۱- اگر همه داده‌های آماری با هم برابر باشند، دامنه تغییرات

صفر است و برعکس، یعنی اگر دامنه تغییرات صفر باشد، همه داده‌ها

با هم برابرند.

نکته ۲- اگر تمام داده‌ها را با عددی جمع کنیم، دامنه تغییرات تغییری نمی‌کند.

نکته ۳- اگر تمام داده‌ها را در عددی ضرب کنیم، دامنه تغییرات در آن عدد

ضرب می‌شود. www.my-dars.ir

نکته ۴- واحد دامنه تغییرات، همان واحد داده‌های آماری است.

واریانس:

نکته ۱ - واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ از رابطه‌ی

زیر بدست می‌آید.

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

نکته ۲ - چرا به توان ۲ می‌رسانیم؟

همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلافات داده‌ها

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$$

از میانگین برابر صفر است.

مثلاً برای ۵ داده داریم:

$$= x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + x_3 - \bar{x} + x_4 - \bar{x} + x_5 - \bar{x}$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_5)} - 5\bar{x} = 5\bar{x} - 5\bar{x} = 0$$

نکته ۳ - اگر همه داده های آماری برابر باشند، واریانس صفر است و

برعکس، اگر واریانس صفر باشد، تمام داده ها با هم برابرند.

نکته ۴ - اگر داده ها را با عددی ثابت جمع کنیم، واریانس تغییر نمی کند.

نکته ۵ - اگر داده ها را k برابر کنیم، واریانس داده های جدید k^2

برابر می شود.

نکته ۶ - واحد واریانس برابر با توان دوم واحد داده مورد نظر

است.

نکته ۷ - اگر مجموع مجذوران داده ها $(\sum_{i=1}^n x_i^2)$ ، معلوم

باشد، واریانس از رابطه زیر بدست می آید.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

انحراف معیار :

جذر مثبت واریانس را انحراف معیار گویند و آنرا با δ نمایش می دهند.

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2}$$

نکته ۱- اگر تمام داده ها با هم برابر باشند، انحراف معیار صفر

است و برعکس، اگر انحراف معیار صفر باشد، تمام داده ها

با هم برابرند.

نکته ۲ - اگر تمام داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع کنیم، انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

نکته ۳ - اگر تمام داده‌ها را در عدد k ضرب کنیم، انحراف معیار آنها در $|k|$ ضرب می‌شود.

نکته ۴ - واحد انحراف معیار با واحد داده‌ها، یکی است.

مثال ۱۰ - واریانس داده‌های ۹، ۱۲، ۱۰، ۹، ۱۱، ۱۰، ۷، ۱۲ کدام است؟

۱) ۱،۷۵ ۲) ۲ ۳) ۲،۲۵ ۴) ۲،۵

$$\bar{x} = \frac{۸۰}{۸} = ۱۰$$

$$s^2 = \frac{۲ + ۴ + ۹ + ۰ + ۱ + ۱ + ۰ + ۴ + ۱}{۸} = \frac{۲۰}{۸} = ۲،۵$$

مثال ۱۱ - در داده‌های آماری ۱۱، ۹، ۵، ۱۳، ۸، ۷، ۱۰، ۷، ۱۳

داده‌های کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده
چقدر است؟

۱۱ ۲، ۸ ۲، ۳ ۳، ۴ ۳ ۴، ۵ ۱۴

۱۳، ۱۳، ۱۱، ۱۰، ۸، ۷، ۷، ۹، ۵
میان

کافی است واریانس داده‌های زیر را بدست آوریم:

۱۳، ۱۱، ۱۰، ۸
-۱۱
۲، ۰، -۱، -۳

با کم کردن ۱۱ واحد از داده‌ها، واریانس تغییر نمی‌کند.

$$\bar{x} = 0$$

$$S^2 = \frac{9 + 1 + 4 + 4}{5} = \frac{18}{5} = 3,6$$

مثال ۱۲ - دو نفر در یک آزمون ۵ روزه امتحانی شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آنان، مطابق جدول زیر است. دقت کاری کدام بیشتر است؟

۱) نفر اول

۲) نفر دوم

۳) یکسان

۴) نیاز به اطلاعات بیشتر

نفر اول	۷	۹	۸	۹	۷
نفر دوم	۱۰	۸	۶	۷	۹

$$\bar{x} = \frac{7+9+8+9+7}{5} = 8$$

نفر اول:

$$s^2 = \frac{1+1+0+1+1}{5} = 0.8$$

$$\bar{x} = \frac{10+8+6+7+9}{5} = 8$$

نفر دوم:

$$s^2 = \frac{4+0+4+1+1}{5} = 2$$

چون واریانس امتیازات نفر اول کم تر است پس دقت کاری او بیشتر است.

شان ۱۳ - اگر واریانس قیمت‌ها در سال گذشته ۱۰۰۰ واحد بوده و
امسال ۱۰ درصد به قیمت‌ها افزوده شود، واریانس قیمت‌های جدید،
کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۱ ۳) ۱۰۰۰ ۴) ۱۲۱۰

شان ۱۴ - انحراف معیار بین چارک اول و چارک سوم داده‌های آماری زیر
را بدست آورید.

۹ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۵ , ۱۵ , ۱۶ , ۱۷ , ۱۸

Q_1 Q_2 Q_3

داده‌های بین چارک اول و سوم : ۱۲ , ۱۴ , ۱۴ , ۱۵ , ۱۵

$$\bar{x} = \frac{70}{5} = 14$$

$$s^2 = \frac{4+1+1}{5} = 1,2 \Rightarrow s = \sqrt{1,2} \sim 1,09$$

شال ۱۵ - اگر انحراف معیار داده‌ها $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_n - 1$ برابر ۴ باشد، واریانس داده‌های $3x_1 + 5, 3x_2 + 5, \dots, 3x_n + 5$ برابر کدام عدد می‌باشد؟

۱۸ (۱) ۳۶ (۲) ۹ (۳) ۴۵ (۴)

شال ۱۶ - انحراف معیار ۲۶ داده آماری برابر ۲ است. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است از بین آن‌ها حذف شود، واریانس ۲۵ داده دیگر کدام است؟

۳,۹۶ (۱) ۴,۰۸ (۲) ۴,۱۲ (۳) ۴,۱۶ (۴)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{26} (x_i - \bar{x})^2}{26} \Rightarrow \sum_{i=1}^{26} (x_i - \bar{x})^2 = 4 \times 26 = 104$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2}{25} = \frac{104}{25} = 4,16 \quad (\text{جدید})$$

شان ۱۷ - میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ محاسب شدند.
اگر داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸ به آن‌ها افزوده شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

۱) ۹,۲۵ ۲) ۹,۳۶ ۳) ۹,۵۲ ۴) ۹,۶۳

با افزودن داده‌های ۲۰، ۲۷ و ۲۸، تغییری در میانگین داده‌های جدید ایجاد نمی‌شود.

$$\sigma^2 = 9 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})^2}{18} = 9 \Rightarrow \sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})^2 = 162$$

$$\sigma_1^2 = \frac{162 + 25 + 4 + 9}{21} = \frac{200}{21} \sim 9,52$$

شان ۱۸ - واریانس ۱۱ داده آماری صفر است. اگر داده‌های ۱۴، ۲۴ و ۲۶ به آن‌ها اضافه شود، میانگین داده‌ها تغییری نکند. انحراف معیار ۱۴ داده‌ی حاصل کدام است؟

۱) ۱,۷۵ ۲) ۱,۲۵ ۳) ۱,۵ ۴) ۲

داریانس ۱۱ داده صفر است \Leftrightarrow ۱۱ داده با هم برابرند. \Leftrightarrow میانگین برابر

یکی از داده‌هاست. مثلاً داده‌ها اینگونه است. a, a, a, \dots, a

وقتی ۳ داده ۲۴، ۱۹ و ۲۹ اضافه شود، میانگین تغییر نمی‌کند.

داده‌ها جدید:

$$\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{11 \text{ تا}} + 24 + 19 + 29$$

میانگین داده‌ها جدید $\rightarrow a = \frac{11a + 94}{14} \Rightarrow a = 22$

$$s_1^2 = \frac{\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{11 \text{ تا}} + 4 + 39 + 14}{14} = 4 \Rightarrow s_1' = 2$$

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

ضرب تغییرات :

اگر بخواهیم پراکندگی بین داده‌های دو یا چند کمیت را با هم تعالیه کنیم که واحد اندازه‌گیری آنها یکسان نباشد، از ضرب تغییرات استفاده می‌کنیم.

نکته ۱- ضرب تغییرات برای داده‌های مثبت از رابطه زیر تعیین می‌شود :

$$C_v = \frac{\delta}{\bar{x}}$$

نکته ۲- شاخص پراکندگی بدون واحد است.

نکته ۳- اگر تمام داده‌ها برابر باشند، ضرب تغییرات صفر است و بالعکس.

نکته ۴- اگر تمام داده‌ها را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، ضرب تغییرات، تغییر

نی‌کند.

نکته ۵- اگر از تمام داده‌ها، یک عدد ثابت مثبت کم کنیم به طوری که هیچ

یک از داده‌ها منفی نشود، ضرب تغییرات داده‌های جدید، بزرگتر از ضرب

تغییرات داده‌های اولیه است.

مثال ۱۹ - ضریب تغییرات داده های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۱, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴, ۱۴
------	--

۱۸٪ (۴)

۱۷٪ (۳)

۱۵٪ (۲)

۱۲٪ (۱)

$$\bar{x} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{5 \times 4 + 4 \times 1 + 7 \times 4}{14} = \frac{52}{14} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{13}}{2} \sim 1,8$$

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,8}{12} = 0,15$$

مثال ۲۰ - در یک نمونه گیری آماری، مجموع ده داده آماری برابر ۵۰ و ضریب

تغییرات آنها $\frac{1}{5}$ است. مجموع مربعات این داده ها کدام است؟

۲۹۰ (۱) ۲۹۰ (۲) ۲۹۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۲۲۰

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{50}{10} = 5$$

$$c.v = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{5} \xrightarrow{\bar{x}=5} \sigma = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$1 = \frac{\sum x_i^2}{10} - 25$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = 290$$

شان ۲۱ - اگر ۲ داده آماری را دو برابر کرده و سپس ۷ واحد از هر کدام کم کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید، ۵ را برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی می‌شود. مجموع داده‌های قبلی کدام است؟

۲۱۰ (۱) ۲۸۰ (۲) ۳۵۰ (۳) ۴۲۰ (۴)

$$(C.V.)' = \frac{r}{p} (C.V.)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\delta'}{\bar{x}'} = \frac{r}{p} \times \frac{\delta}{\bar{x}} \xrightarrow[\text{۷ واحد کم شده}]{\text{داده‌ها ۲ برابر شده}} \frac{2\delta}{2\bar{x} - 7} = \frac{r}{p} \times \frac{\delta}{\bar{x}}$$

$$\bar{x} = \frac{21}{2} \Rightarrow \frac{\sum x_i}{n} = \frac{21}{2} \xrightarrow{n=2} \sum x_i = 21.$$

شان ۲۲ - >> ۱۲ داده آماری مجموع تمام داده‌ها ۷۲ و مجموع مجذور آنها ۴۸۰ می‌باشد، ضریب تغییرات این داده‌ها کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{72}{12} = 6 \quad C.V. = \frac{\delta}{\bar{x}}$$

$$\delta^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \delta^2 = \frac{480}{12} - 36 = 4 \quad C.V. = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال ۲۳ - در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم، آ داده‌های جدیدی حاصل شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های مبدی است؟

$$\frac{1}{9} (K) \quad \frac{7}{8} (۳) \quad \frac{5}{7} (۲) \quad \frac{7}{9} (۱)$$

$$(C.۱۴)' = K \times (C.۱۴)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sigma'}{\bar{x}'} = K \times \frac{\sigma}{\bar{x}} \xrightarrow{\substack{\text{داده‌ها را ۲ برابر کرده} \\ \text{و ۳ واحد اضافه می‌کنیم}}} \frac{2\sigma}{2\bar{x} + 3} = K \times \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$\xrightarrow{\bar{x} = 12} \frac{2}{27} = \frac{K}{12} \Rightarrow K = \frac{1}{9}$$

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir