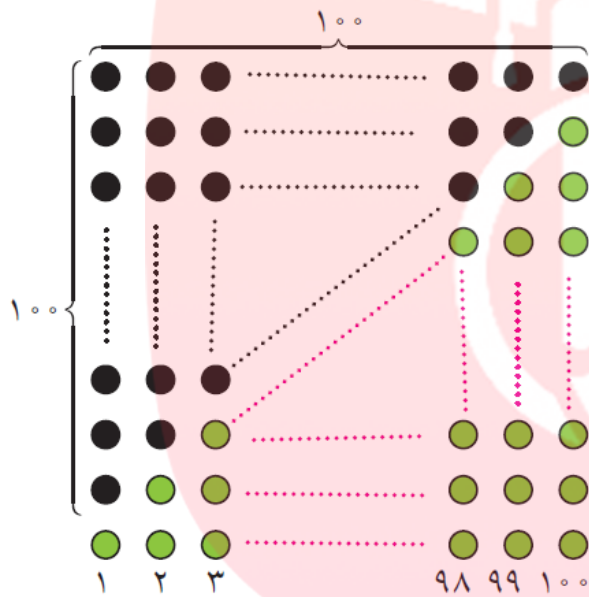


در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله های حسابی و هندسی آشنا شدید و می دانید که مجموعه اعداد طبیعی  $1, 2, 3, \dots$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می باشد. چگونگی به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی  $1$  تا  $n$  می تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله حسابی برسیم.



گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش آموزان از آنها می خواهد اعداد  $1$  تا  $100$  را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند. در حالی که دانش آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به دست می آورد و به معلم ارائه می کند.

آیا شما هم می توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل مقابل می تواند ایده ای برای این کار به شما بدهد.

به روش گاوس نشان دهید:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

# مای درس

## فرمول مجموع جملات دنباله حسابی

دنباله حسابی زیر را، که در آن  $a$  جمله اول،  $d$  قدر نسبت و  $n$  تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-2)d, a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را  $S_n$  می نامیم و می نویسیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

www.my-dars.ir

انبات :

❖ مثال : مجموع صد جمله اول دنباله حسابی  $3, 7, 11, 15, \dots$  را به دست آورید.

❖ مثال : روی محیط دایره ای  $20^\circ$  نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

کاردکلاس

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر  $a_1$  و  $a_n$  به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

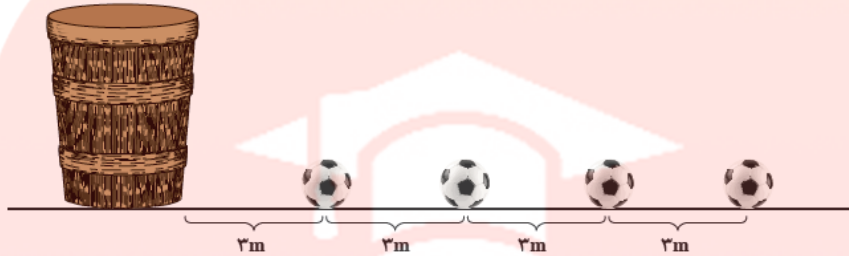
# مای درس

## گروه آموزشی عصر

۲ مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

❖ مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



$$\text{نشان دهید } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی هفتم برابر ۳ و جمله‌ی دهم برابر ۹ است. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول را بیابید.

# مای درس

رواه ورزشی عصر

ایستگاه آموزشی

نکته : مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی به صورت  $S_n = \alpha n^2 + \beta n$  است. برای یافتن جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی از طریق  $S_n$  کافی

$$\begin{cases} S_1 = a_1 & (*) \\ S_2 = a_1 + a_2 \end{cases} \Rightarrow S_2 - S_1 = a_2 \xrightarrow{(*)} d = a_2 - a_1 = S_2 - 2S_1 \quad (**)$$

است  $S_1$  و  $S_2$  را به دست آوریم. داریم:

نکته : روش دیگر برای یافتن جمله‌ی عمومی از روی  $S_n$ ، استفاده از رابطه‌ی  $a_n = S_n - S_{n-1}$  است.

تمرین :

اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی و جمله‌ی دوم آن ۶ باشد و داشته باشیم  $S_n = 2(1 + S_{n-1})$  جمله‌ی اول و مجموع ۲۰ جمله‌ی اول دنباله را به دست آورید.

تمرین : اگر  $S_n = 2n^2 - 4n$  باشد، جمله‌ی عمومی دنباله را تعیین کنید.

## ویژگی‌های مجموع جمله‌های دنباله‌های حسابی

۱) مجموع  $n$  عدد طبیعی متوالی که از عدد ۱ شروع شده باشد برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲) مجموع  $n$  عدد طبیعی فرد متوالی که از عدد ۱ شروع شده برابر است با:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

۳) مجموع  $n$  عدد طبیعی زوج متوالی که از عدد ۲ شروع شده برابر است با:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

۴) اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله‌ی اول تصاعد حسابی و  $S_{n-1}$  مجموع  $n-1$  جمله‌ی اول همان

تصاعد باشد، جمله‌ی  $n$  ام یا همان  $a_n$  برابر است با:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

۱- در دنباله حسابی  $10, 6, 2, \dots$  حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

۲ - در یک دنباله حسابی مجموع یازده جمله اول با مجموع پانزده جمله اول برابر است. مجموع بیست و شش جمله ی اول را بدست آورید.

۳ - مجموع اعداد دو رقمی بخشپذیر بر ۶ را بیابید.

۴ - حداقل چند جمله از دنباله  $7, -12, -17, \dots$  را باید جمع کنیم تا حاصل از  $100$  بیشتر شود.

# مای دررس

۵ - مجموع  $n$  عدد زوج متوالی شروع از ۲ را بیابید.

## گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۶ - نشان دهید :  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$ .

۷ - مجموع چند جمله دنباله حسابی  $12, 10, \dots$  برابر صفر است.

۸ - مجموع چند جمله از دنباله حسابی  $5, a-9, 7a-9, 2a-1, \dots$  برابر ۱۶۸ است.

۱۰ - نشان دهید :  $n \in \mathbb{N}$  ,  $4 + 7 + 10 + \dots + (3n + 1) = \frac{n(3n + 5)}{2}$

۱۱ - حاصل  $11 + 13 + 15 + \dots + 29$  را بیابید.

۱۲ - در یک دنباله حسابی مجموع  $n$  جمله اول،  $S_n = n(n - 3)$  می باشد. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۱۳- حاصل  $۹۹^۲ - ۱۰۰^۲ + \dots + ۵^۲ - ۶^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + ۱^۲ - ۲^۲$  را بدست آورید.

• مجموع چند جمله از دنباله‌ی زیر ۸۷ می‌شود؟

... و ۱۲ و ۷ و ۲

### مجموع جمله‌های دنباله‌ی هندسی

مجموع  $n$  جمله‌ی اول یک تصاعد هندسی را با  $S_n$  نمایش می‌دهیم.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1q + \dots + a_1q^{n-1}$$

اگر  $a$  جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی و  $q$  قدرنسبت همان دنباله باشد، مجموع  $n$  جمله‌ی

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

اول این دنباله‌ی هندسی برابر است با:

نشان دهید در حالت  $q \neq 1$  مجموع  $n$  جمله اول این دنباله برابر است با  $a \frac{1-q^n}{1-q}$

**اثبات:**

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

الف) این جایزه چند گرم می شود؟

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد.

مجموع چند جمله از دنباله ی  $6, 12, 24, \dots$  برابر  $1026$  است.

در دنباله هندسی  $1, 3, 9, \dots$  حداقل چند جمله را باید جمع کنیم (با شروع از جمله اول) تا مجموع آن از  $1000$  بیشتر شود.

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

مجموع هشت جمله ی اول یک دنباله هندسی ۱۷ برابر مجموع چهار جمله اول آن است قدرنسبت دنباله را بیابید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



**مثال:** برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیواکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

### نکته آموزشی

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله ی اول  $a$  و قدرنسبت  $q$  که در آن  $|q| < 1$  است، مجموع تمام جمله های دنباله از رابطه ی  $S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$  محاسبه می شود.

تویی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه ی یک چهارم ارتفاع اولیه خود بالا می رود. فرض کنید :  
الف) این توپ را از زمین به هوا پرتاب کنیم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می کند؟

ب) این توپ را از ارتفاع ۵ متری رها کنیم تا به زمین برسد. می خواهیم بدانیم پس از شروع تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می کند؟

www.my-dars.ir

حد مجموع ...  $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \dots$  را حساب کنید.

## معرفی چند اتحاد

## نکته :

اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، داریم:اگر  $n$  عددی فرد باشد، داریم:

## حالت کلی تر:

اگر  $n$  عددی طبیعی باشد، داریم:اگر  $n$  عددی فرد باشد، داریم:

$$(x^n - 1) = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$$

$$(x^n + 1) = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} - \dots + 1)$$

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$$

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + \dots + a^{n-1})$$

## مثال :

برای یک عدد حقیقی  $a$  و عدد طبیعی  $n$  عبارت  $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}$  را در نظر بگیرید.  
 ۱- عبارت  $aS - S$  را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

# مای دررس

۲- اگر  $n$  عددی فرد باشد، با تبدیل  $a$  به  $-a$  نتیجه بگیرید:

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

به کمک اتحاد  $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$  اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

عبارت زیر را ساده کنید.

$$A = \frac{x^{10} - 1}{(x^4 - x^2 + x - 1)(x^4 + x^2 + x + 1)}$$

$$B = \frac{x^4 - 1}{(x^2 + x + 1)}$$

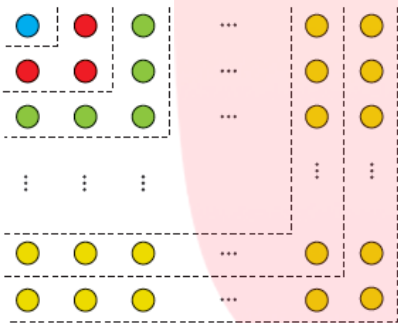
$$C = \frac{(1-t+t^2-t^3+t^4)(t+1)}{(x^{10} - 1)}$$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۱ در دنباله حسابی  $\dots, 11, 8, 5$  حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟



۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) =$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

مای دزرس  
گروه آموزشی عصر

۴ در  $2^\circ$  جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد  $1, 3, 5, \dots$  و مجموع جملات شماره‌های زوج  $2, 4, 6, \dots$  می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = 2^{n-1}$  است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۷ برای عدد حقیقی  $a (a \neq 1)$  و عدد طبیعی  $n$  :

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$



## معادلات درجه دوم

درس

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است ( $a \neq 0$ ) که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطه  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  به دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

## کاردکلاس

۱ معادله  $3x^2 = 5x - 2$  را حل کنید.

۲ اگر  $x = -1$  یک ریشه معادله  $4x^2 - mx - 7 = 0$  باشد، ریشه دیگر کدام است؟

## روش تغییر متغیر برای حل معادله

در کلاس دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادله درجه ۲ آموختیم. یک جنبه اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادله درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که در درس بعدی به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل معادله آشنا می‌شویم که یک شیوه کارآمد و نسبتاً متداول برای حل انواع معادله است.

## معادلات دو مجزوری

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

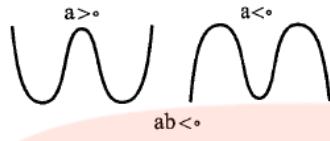
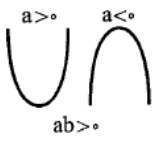
معادلاتی به فرم  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  که در آن  $a, b, c$  اعداد حقیقی هستند را معادله دو مجزوری می‌گوییم.

روش حل: برای حل معادله دو مجزوری از تغییر متغیر  $t = x^2$  استفاده می‌کنیم که در این صورت خواهیم داشت.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0 \xrightarrow{x^2=t} at^2 + bt + c = 0$$

پس معادله دو مجزوری، تبدیل به معادله درجه‌ی دوم فوق می‌شود که با حل این معادله، به ریشه‌های معادله دو مجزوری می‌رسیم.

◀ نمودار تابع دو مجذوری:  $y = ax^4 + bx^2 + c$



◀ اگر بخواهیم معادله‌ی دو مجذوری دارای دو ریشه باشد، باید  $\frac{c}{a} < 0$  باشد.

◀ اگر بخواهیم معادله‌ی دو مجذوری دارای چهار ریشه باشد، باید معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه مثبت باشد، یعنی:

•  $\Delta > 0$

•  $-\frac{b}{a} > 0$

•  $\frac{c}{a} > 0$

$(3x^2 - 1)^2 - 13(3x^2 - 1) + 22 = 0$

مثال : معادله‌ی مقابل را حل کنید.

۱ معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف  $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

ب  $(x + \frac{1}{x})^2 + 2(x + \frac{1}{x}) = 8$

# مای درسی

گروه آموزشی عصر

www.may-dars.ir

- ۲ الف) یک معادله‌ی درجه‌ی چهار بنویسید که ریشه نداشته باشد.
- ب) یک معادله‌ی درجه‌ی چهار بنویسید که تنها یک ریشه داشته باشد.
- پ) یک معادله‌ی درجه‌ی چهار بنویسید که تنها دو ریشه متمایز داشته باشد.
- ت) یک معادله‌ی درجه‌ی چهار بنویسید که دقیقاً سه ریشه متمایز داشته باشد.
- ث) یک معادله‌ی درجه‌ی چهار بنویسید که چهار ریشه متمایز داشته باشد.
- ج) آیا معادله‌ی درجه چهار می‌تواند بیش از چهار ریشه داشته باشد؟

معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$x^4 - 1 \cdot x^2 + 9 = 0$$

معادله‌های مقابل را حل کنید.

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \text{ (الف)}$$

$$x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \text{ (ب)}$$

مثال : معادله  $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$  را حل کنید.

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

مثال : معادله  $(x^3 - 2)^2 - 5(x^3 - 2) + 4 = 0$  را حل کنید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



تابع درجه دو ، معادله درجه دو و روابط بین ریشه های آن

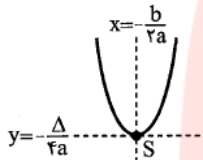
فرم کلی تابع درجه دو به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  می باشد که دارای ویژگی های زیر است.

● نمودار تابع درجه دو یک سهمی قائم است.

● اگر  $a > 0$  باشد سهمی رو به بالا و دارای می نیم است و اگر  $a < 0$  باشد سهمی رو به پایین و دارای ماکزیم است.



● مختصات نقطه ی ماکزیم یا می نیم همان رأس سهمی می باشد که به صورت زیر است:



معادله ی محور تقارن :  $x = -\frac{b}{2a}$  و رأس سهمی :  $S = (-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

◀ مختصات رأس سهمی در خود منحنی صدق می کند.

◀ اگر خط افقی  $y = k$  بر نمودار تابع درجه دو مماس باشد می توان نتیجه گرفت که عرض رأس سهمی برابر با  $k$  می باشد.

◀ فرم استاندارد تابع درجه دو به صورت  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  می باشد که نقطه ی  $S(x_0, y_0)$  رأس سهمی می باشد.

مختصات رأس سهمی به صورت  $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$  است که  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

فرم کلی معادله ی درجه دو به صورت  $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$  می باشد که حالت های خاص آن به صورت زیر می باشند.

● اگر در معادله ی درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع ضرایب صفر باشد آن گاه یکی از ریشه ها ۱ و دیگری  $\frac{c}{a}$  است.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

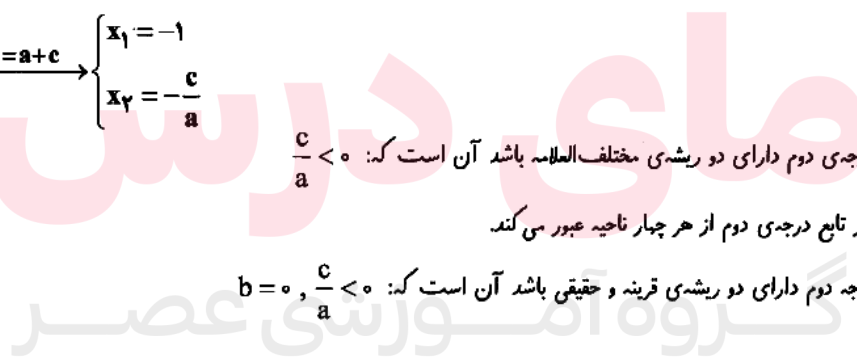
● اگر در معادله ی درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$  ،  $b = a + c$  باشد آن گاه یکی از ریشه ها  $(-1)$  و دیگری  $-\frac{c}{a}$  است.

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{b=a+c} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

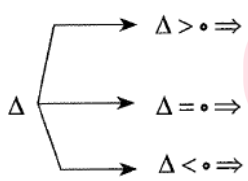
● شرط این که معادله ی درجه دو دارای دو ریشه ی مختلف العلامه باشد آن است که:  $\frac{c}{a} < 0$

◀ یعنی در این حالت نمودار تابع درجه دو از هر چهار ناحیه عبور می کند.

● شرط این که معادله ی درجه دو دارای دو ریشه ی قرینه و حقیقی باشد آن است که:  $b = 0, \frac{c}{a} < 0$



www.my-dars.ir



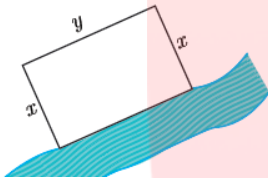
$\Delta > 0 \Rightarrow$  معادله دارای دو ریشه ی حقیقی متمایز است.  
 $\Delta = 0 \Rightarrow$  معادله دارای یک ریشه ی حقیقی مضاعف است.  $x = -\frac{b}{2a}$   
 $\Delta < 0 \Rightarrow$  معادله ریشه ی حقیقی ندارد.

مثال :

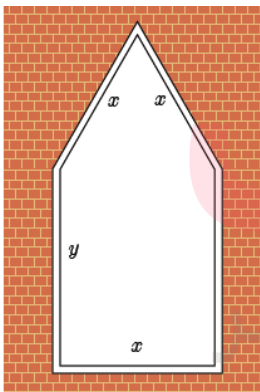
۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف)  $g(x) = -(x+1)^2 + 3$

ب)  $h(x) = x^2 - 4x + 9$



۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینه ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.



۳ پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع در بالای آن می‌باشد. اگر محیط پنجره ۴m باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

تابع درجه‌ی دوم  $f$ ، با ضابطه‌ی  $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$  مفروض است. مختصات رأس سهمی و مقدار مینیمم تابع  $f$  را بیابید.

تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = x^2 - 4x - 4$  مفروض است. مقدار مینیمم تابع  $f$  را تعیین کنید.

بیشترین مقدار  $f(x) = -x^2 + 5x - 7$  را به دست آورید.

کمترین مقدار  $f(x) = 2x^2 + 8x - 9$  را به دست آورید.

# مای دررس

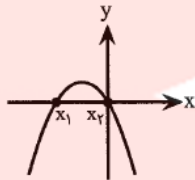
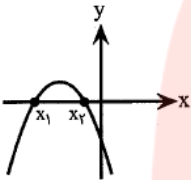
مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری به دست آورید که نقطه‌ی  $S(-1, -4)$  رأس سهمی  $y = ax^2 + 2x + b$  باشد.

www.my-dars.ir

در صورتی که بخواهیم بدانیم منحنی تابع درجه‌ی دوم از چه ناحیه‌ای عبور نمی‌کند. کافی است روی چهار پارامتر  $a, b, c$  و  $\Delta$  بحث نماییم.

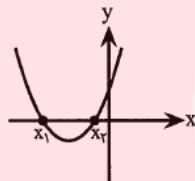
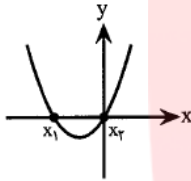
$$y = ax^2 + bx + c = 0 \begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها} & x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} & x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

شرط آن که نمودار تابع درجه‌ی دوم فقط از ناحیه‌ی اول عبور نکند: نمودار این تابع به دو حالت زیر می‌تواند باشد.



$$\begin{aligned} \text{مجموع ریشه‌ها} &= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} b < 0 \\ \text{ضرب ریشه‌ها} &= x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} c \leq 0 \end{aligned}$$

شرط آن که نمودار تابع درجه‌ی دوم فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند: نمودار این تابع به دو حالت زیر می‌تواند باشد.



$$\begin{aligned} \text{مجموع ریشه‌ها} &= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0 \\ \text{ضرب ریشه‌ها} &= x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \geq 0 \xrightarrow{a > 0} c \geq 0 \end{aligned}$$

اگر  $\frac{c}{a} < 0$  باشد، نمودار تابع از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

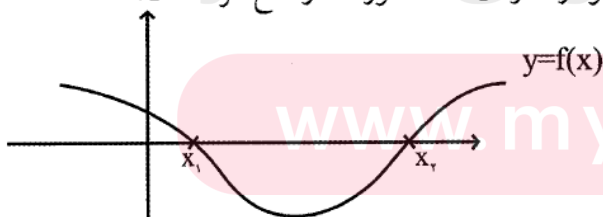
حدود  $k$  چه قدر باشد تا نمودار تابع  $y = kx^2 + (k-3)x + 1$  فقط از ناحیه‌ی سوم محورهای مختصات نگذرد؟

# مای دارس

## صفرهای یک تابع

برای یک تابع با ضابطه  $f(x)$  جواب‌های معادله  $f(x) = 0$  را (در صورت وجود جواب) صفرهای تابع  $f$  یا ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  می‌نامیم، در واقع صفرهای تابع  $f$  مقادیری از دامنه  $f$  هستند که به ازای آن‌ها،  $f(x)$  صفر می‌شود. اگر نمودار  $y = f(x)$  را رسم کنیم، ریشه‌ها طول نقاطی هستند که نمودار  $f$  در آن نقاط محور  $x$ ها را قطع کرده است.

( $x_1, x_2$  صفرهای تابع  $f$  هستند)



۱) برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی تابع درجه ۲ می‌توانیم از علامت  $S$  و  $P$  کمک بگیریم. در توابع زیر، تعداد و علامت ریشه‌های توابع داده شده را (در صورت وجود) مانند نمونه مشخص کنید.

الف)  $y = x^2 + 6x + 5$

ب)  $y = x^2 + 4x - 5$

$\Delta = 16 > 0 \Rightarrow$  سهمی دو ریشه متمایز دارد  $\Rightarrow$

$p = \frac{c}{a} = 5 > 0 \Rightarrow$  ریشه‌ها هم علامت‌اند  $\Rightarrow$

$S = -\frac{b}{a} = -6 < 0 \Rightarrow$  هر دو ریشه منفی‌اند  $\Rightarrow$

پ)  $y = 3x^2 - 7x + 1$

ت)  $y = -2x^2 + 5x - 4$

۲- صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

ب)  $g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)$

الف)  $f(x) = x^3 - 4x$

# مای دررس

❖ مثال: اگر  $x = 2$  یکی از صفرهای تابع  $p(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$  باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

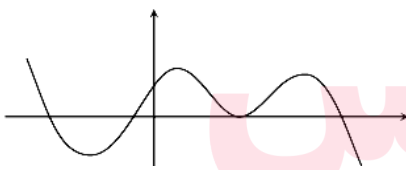
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

مقدار  $k$  را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع  $f(x) = x^2 + kx^2 - x - 2$  برابر  $(-2)$  باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

❖ مثال : صفرهای تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = (x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 2$  را به دست آورید.

شکل زیر نمودار معادله  $y = f(x)$  است ، علامت و نوع معادله  $f(x) = 0$  را تعیین کنید.



حدود  $m$  برای آن که نمودار تابع  $y = (1-m)x^2 + x + m - 2$  از چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات بگذرد.

**بهینه‌سازی:** به عمل ماکزیم یا مینیم نمودن یک کیفیت در اصطلاح بهینه‌سازی می‌گویند. که عبارت‌های درجی دوم را با استفاده از مربع کامل می‌توانیم بهینه‌سازی نماییم.

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$\begin{cases} a > 0 & y \geq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \min(y) = -\frac{\Delta}{4a} \\ a < 0 & y \leq -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \max(y) = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

دو نکته‌ی خیلی مهم در مسائل بهینه‌سازی

❁ اگر  $x + y = k$  باشد آن‌گاه حاصل ضرب آن‌ها یعنی  $xy$  هنگامی ماکزیم می‌شود که  $x = y = \frac{k}{2}$  شود. (k عددی ثابت است)

❁ اگر  $xy = k$  باشد آن‌گاه مجموع آن‌ها یعنی  $x + y$  هنگامی مینیم می‌شود که  $x = y = \sqrt{k}$  شود. ( $k > 0$ )

• بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۰ می‌باشد. آن دو عدد را چنان بیابید که حاصل ضربشان ماکزیم شود.

# مای دارس

کمترین مقدار تابع  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  را برای x های مثبت بیابید.

گروه آموزشی عصر

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \Rightarrow \min(y) = 2\sqrt{ab}$$

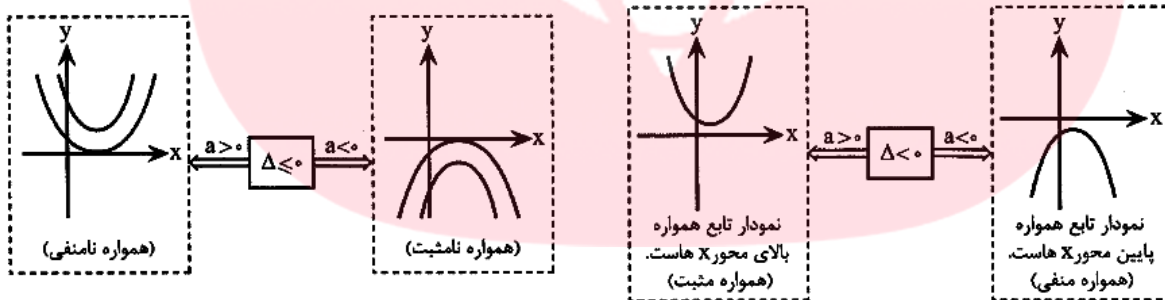
$$f(x) = x + \frac{4}{x} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \min(y) = 2\sqrt{1 \times 4} = 4$$

www.my-dars.ir

**مثال :** استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم  $1500$  متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که  
 الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.  
 ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

● سهمی محور  $x$ ها را قطع نکند به آن همواره مثبت یا همواره منفی گوئیم.

● سهمی محور  $x$ ها را قطع نکند یا بر محور  $x$ ها مماس باشد در این صورت به آن همواره نامثبت یا همواره نامنفی گوئیم.



به ازای چه مقادیری از  $m$ ، عبارت  $mx^2 - 2(m-1)x + m - 1$  همواره منفی است؟

مای درس

گروه آموزشی عصر

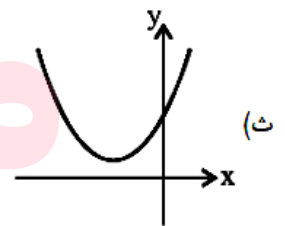
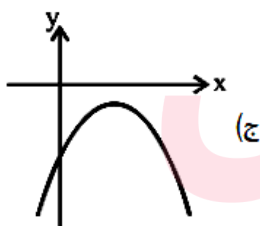
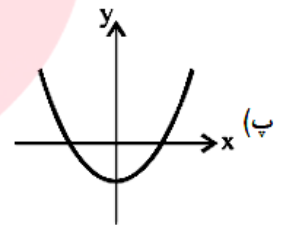
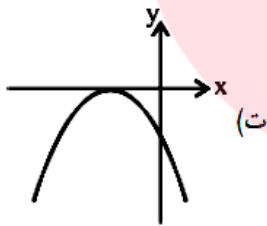
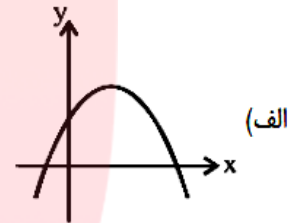
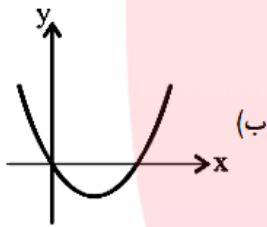
به ازای چه مقادیری از  $m$ ، عبارت  $(m+2)x^2 + 2x + 4 \geq 3$  برقرار می باشد؟

www.my-dars.ir



علامت ضرایب در تابع درجه دوم :

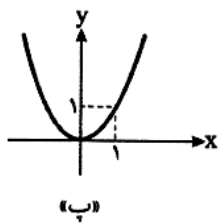
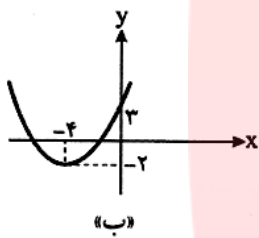
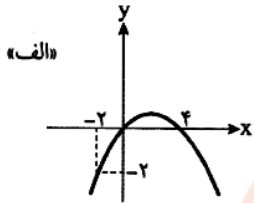
هر یک از نمودارهای زیر مربوط به سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. علامت  $a$  و  $b$  و  $c$  را تعیین کنید.



مای درسی  
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

**مثال :** در تابع درجه دوم  $P(x) = ax^2 + bx + c$  در هر یک از حالت‌های زیر علامت ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را تعیین کنید.



# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن  $S$  و  $P$ 

اگر  $S$  مجموع ریشه‌ها و  $P$  حاصل ضرب ریشه‌ها باشد در این صورت معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت زیر می‌باشد.

$$x^2 - Sx + P = 0$$

اگر در معادله‌ی درجه‌ی دوم با ضرایب گویا، یکی از ریشه‌ها برابر با  $a + \sqrt{b}$  باشد ریشه‌ی دیگر برابر با  $a - \sqrt{b}$  است. و برعکس

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها  $1/5 -$  و حاصل ضربشان  $7 -$  باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط  $11 \text{ cm}$  و مساحت  $6 \text{ cm}^2$  وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

۳ معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  باشند.

# مای درس

گروه آموزشی عصر

معادله درجه دومی را بنویسید که ریشه‌های اعداد زیر باشند.

الف)  $3 \pm \sqrt{2}$

ب)  $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}$

ج)  $5 \pm 2\sqrt{3}$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

## روابط بین ریشه های تابع درجه دوم (مقارن)

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله ی درجه ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند آن گاه داریم:

$$۱ \quad \alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$$

$$۴ \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$۲ \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

$$۵ \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2PS$$

$$۳ \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$۶ \quad \alpha^4 + \beta^4 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$$

# مای دارس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

❖ مثال : اگر  $x = -1$  یک ریشهٔ معادلهٔ  $4x^2 - mx - 7 = 0$  باشد ریشه دیگر و مقدار  $m$  را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به دست آورید.

❖ مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی متر و مساحت آن ۶۵ سانتی متر مربع است. ابعاد مستطیل را به دست آورید.

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 6x + 1 = 0$  باشند، حاصل هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید. ( $\alpha > \beta$ )

الف)  $A = \alpha^4\beta + \alpha\beta^4$

ب)  $B = \beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}$

ج)  $C = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

د)  $D = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

هـ)  $E = \frac{1}{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{\beta^2 + 1}$

و)  $F = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$

ز)  $G = 3\alpha^2 + 5\beta^2$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

**نکته :** هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  یکی از ریشه‌ها  $k$  برابر ریشه‌ی دیگر باشد، بین ضرایب رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

**نکته :** هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  یکی از ریشه‌ها  $k$  واحد از ریشه‌ی دیگر بیشتر یا کم‌تر باشد، داریم:

$$\Delta = k^2 a^2$$

روابط بین ریشه‌های تابع درجه دوم (نامتقارن)

در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 2x - 4 = 0$ ، اگر ریشه‌ها  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، حاصل  $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$  چقدر است؟

در معادله‌ی درجه‌ی دوم  $x^2 - 3x - 10 = 0$ ، اگر ریشه‌ها  $\alpha$  و  $\beta$  باشند، حاصل  $\frac{(\alpha^2 - 10)^2 + 27\beta^3}{2(\alpha\beta + 1)}$  چقدر است؟

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (m-1)x + m = 0$  باشد و داشته باشیم  $(\alpha+1)(\beta+1) = 14$  مقدار  $m$  را تعیین کنید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله  $x^2 + x - 5 = 0$  باشند بدون حل معادله مقدار عددی عبارت زیر را بیابید.

الف)  $\alpha^2 + \beta^2$

ب)  $\alpha^2 \beta + \beta^2 \alpha$

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله درجه دوم  $2x^2 - 8x + 1 = 0$  باشند حاصل  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  را بیابید.

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله  $x^2 - x - 4 = 0$  باشد بدون حل معادله مقدار عددی  $\frac{1}{\alpha^2 \beta} + \frac{1}{\alpha \beta^2}$  را تعیین کنید.

# مای درسی

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله درجه دوم  $x^2 - 3x - 1 = 0$  باشد مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

الف)  $(2\alpha + \beta)(2\beta + \alpha)$

ب)  $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

مقدار  $m$  را طوری بیابید که یکی از ریشه های معادله  $mx^2 - 4x + 1 = 0$  سه برابر دیگری باشد.

در معادله  $4x^2 - 16x + m = 0$  یکی از ریشه ها ۲ واحد بزرگتر از ریشه دیگر باشد  $m$  و هر دو ریشه را بیابید.

مقدار  $a$  را چنان بیابید که رابطه  $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$  میان ریشه های معادله  $x^2 - (a+2)x + a + 1 = 0$  برقرار باشد.

مای درسی  
گروه آموزشی عصر

اگر  $\alpha, \beta$  ریشه های معادله  $3x^2 - 6x - 14 = 0$  باشند معادله ی درجه ی دومی بنویسید که ریشه های آن به صورت  $\frac{1}{\alpha}$  و  $\frac{1}{\beta}$  باشد.



کمترین مقدار تابع  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  را به ازای مقادیر مثبت  $x$  بیابید.

اگر در معادله  $(m+1)x^2 - 2x + m = 0$  اگر یکی از جواب ها برابر ۲ باشد مقدار  $m$  و هر دو جواب را بیابید.

در معادله  $2x^2 - 8x + m = 0$  اگر یکی از جواب ها دو واحد کمتر از جواب دیگر باشد  $m$  چقدر است؟

مای دارس

اگر  $x > 0$ ، کمترین مقدار تابع  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  را  $x$  بیابید.

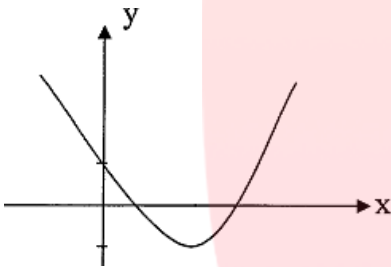
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

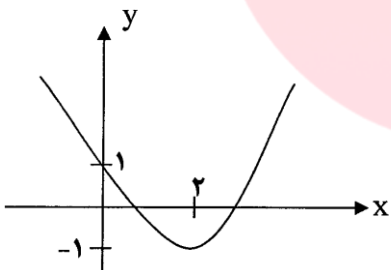
ابعاد مستطیلی را بیابید که محیط آن ۲۶ سانتی متر و مساحت آن ۴۰ سانتی متر مربع باشد.

بیشترین مساحت از بین مستطیل هایی با محیط  $60$  واحد را به دست آورید.

اگر نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  بصورت زیر باشد آنگاه علامت  $a$  و علامت  $b$  را تعیین کنید.

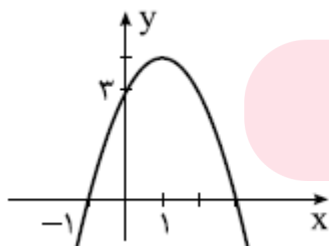


با توجه به نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  مقادیر  $a, b, c$  را بدست آورید.



# مای دررس

با توجه به نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  مقادیر  $a, b, c$  را بدست آورید.

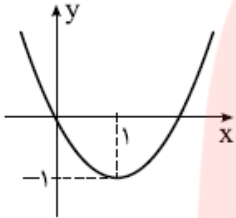


[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

در شکل زیر نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است:

الف) مقادیر  $a$ ,  $b$ ,  $c$  را بدست آورید.

ب) جدول تعیین علامت  $f(x)$  را رسم کنید.

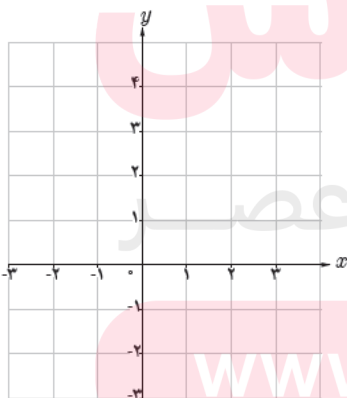


### روش هندسی حل معادلات

اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله  $f(x) = g(x)$  است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامیم.

### فعالیت

۱) معادله  $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$  را حل کنید.



۲) نمودار دو تابع  $y = (x-1)^2$  و  $y = \frac{1}{4}x + 1$  را رسم کنید.

۳) چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله  $(x-1)^2 = \frac{1}{4}x + 1$  و

طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

❖ مثال : به روش هندسی معادله  $|x| = x^2 - 2x$  را حل کنید.

معادله  $\sqrt{2+x} = x+1$  را به روش هندسی حل کنید و در صورت امکان جواب آن را از طریق جبری به دست آورید.

معادله  $|x+1| + |x-1| = 2$  را به روش هندسی و جبری به دست آورید.

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

مجموعه جواب معادله زیر را به روش هندسی بدست آورید.  
[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$|x| = \sqrt{2-x}$$

معادله ی  $2x + 1 = \sqrt{x + 1} - x^2$  را هم به روش هندسی و هم به روش جبری به دست آورید.

معادله زیر را با روش خواسته شده حل کنید.

$$x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x} \quad (\text{روش هندسی})$$

معادله ی  $|x^2 - 2| = 2$  را به روش هندسی حل کنید.

# مای درسی

## گروه آموزشی عصر

معادله ی  $4x + 4 = \sqrt{x + 2} - x^2$  را به روش هندسی یا روش جبری به دست آورید.

[www.maydars.ir](http://www.maydars.ir)

از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله  $\sqrt{x} = x + 1$  جواب ندارد.

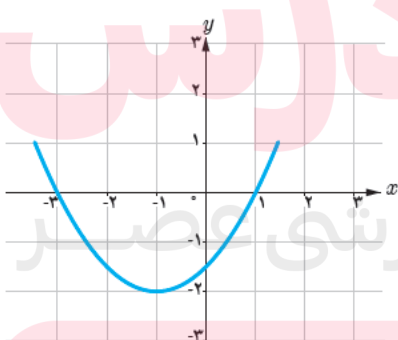
## تمرین

۱ معادله درجه دومی بنویسید که :

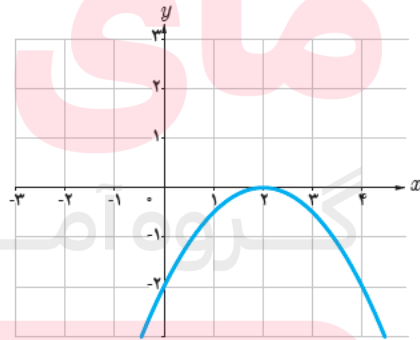
الف) ریشه‌های آن  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{2}{3}$  باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی  $P(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع  $P(x)$  و ضابطه آن را مشخص کنید.



(ب)



(الف)

۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک ( $h$ ) در زمان  $t$ ، از رابطه  $h(t) = -16t^2 + 144t$  به دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به دست آورید.

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف)  $f(x) = x^2 - 4x$

ب)  $g(x) = 2x^2 + x^2 + 3x$

پ)  $h(x) = x^2 + 3x + 5$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف)  $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

ب)  $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

پ)  $(4-x^2)^2 - (4-x^2) = 12$



# مای دررس

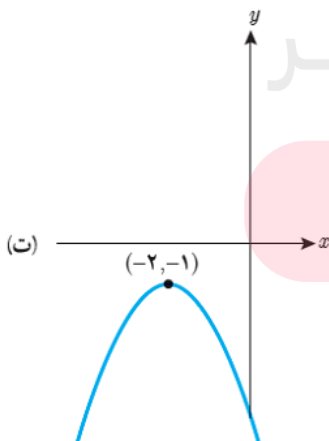
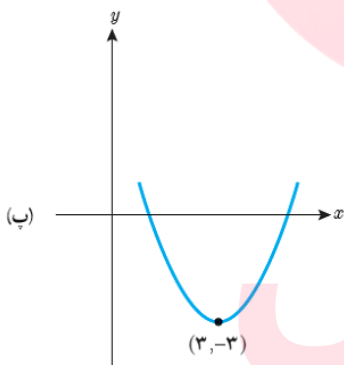
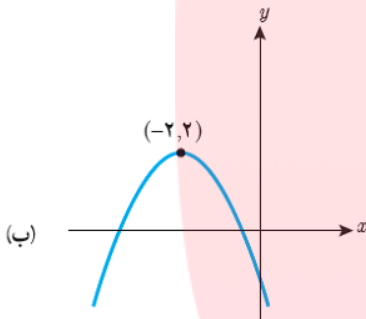
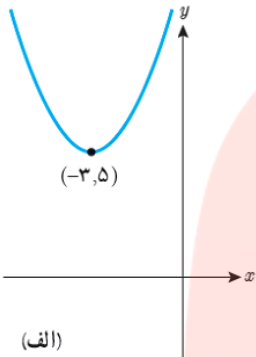
## گروه آموزشی عصر

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله  $|x-1| = x^2 - x - 1$  را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



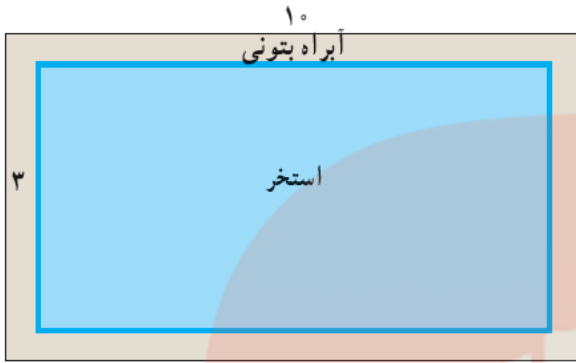
۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است که در آن  $|a| = 1$  است و نقطه رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.



# مای دارس

## گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول  $10$  و عرض  $3$  متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت  $14$  مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت  $52/8$  مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی متر است؟

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



## معادلات گویا و کنگ

## معادلات گویا

الف. معادلات گویا: برای حل این معادلات از مخرج مشترک گرفتن، طرفین وسطین کردن و دیگر خواص کسرها استفاده می‌کنیم.

◀ دقت کنید تنها ریشه‌هایی مورد قبول هستند که مخرج هیچ کسری را صفر نکند.

◀ در حل معادلات به خاطر داشته باشید که جواب معادله در خود معادله صدق می‌کند.

**مثال:** در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

**مثال:** در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

در مسئله ماهی‌های تزئینی حالت سو می هم وجود داشت که نمک به اندازه کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

«ب.م.م» و «ک.م.م» دو عبارت

بزرگ‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های  $P(x)$  و  $Q(x)$  بر آن بخش‌پذیرند را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک (به اختصار ب.م.م)  $P(x)$  و  $Q(x)$  می‌نامند.

کوچک‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های  $P(x)$  و  $Q(x)$  بخش‌پذیر است را کوچک‌ترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م)  $P(x)$  و  $Q(x)$  می‌نامند.

**تذکره:** دو تعریف فوق را می‌توان برای تعداد بیشتری از چندجمله‌ای‌ها نیز تعمیم داد.

# مای دارس

## گروه آموزشی عصر

**مثال:** «ب.م.م» و «ک.م.م» چندجمله‌ای‌های  $P(x) = x^3 + 1$ ،  $Q(x) = x^6 - 1$  و  $R(x) = 4x^2 - 4$  را تعیین کنید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

پاسخ: ابتدا چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$P(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$Q(x) = x^6 - 1 = (x^3 + 1)(x^3 - 1) = (x+1)(x^2 - x + 1)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$R(x) = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) = 4(x-1)(x+1)$$

$$\text{ب.م.م} = (x+1)$$

$$\text{ک.م.م} = 4(x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) = 4(x^6 - 1)$$

۱) معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به دست آمده مورد قبول هستند؟

$$\text{الف) } \frac{3}{x^2} - 12 = 0$$

$$\text{ب) } \frac{2}{k} - \frac{3k}{k+2} = \frac{k}{k^2 + 2k}$$

$$\text{پ) } \frac{3}{x} - \frac{2}{x-3} = \frac{12}{9-x^2}$$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

# مای دررس

گروه آموزشی عصا

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} = 3x \left(1 - \frac{x-1}{x+1}\right)$$

معادلات زیر را حل کنید. (دامنه پیدا گردد)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2+1}$$

$$\frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1} = \frac{2x-5}{x^2-2x-3}$$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

$$\frac{x}{10} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{2x-2}$$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$\frac{6}{4x} = \frac{x+2}{x^2-3x}$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{2x-2} = -\frac{x}{10}$$

$$\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{10x}{x^2-4}$$

$$\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-2}{2x} = \frac{4}{2x^2-2x}$$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

❖ مثال : معادله  $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} = \frac{4x-4}{x^2-4}$  را حل کنید.

کاردر کلاسی

۱ معادله  $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3$  را حل کنید.

۲ اگر در یک مستطیل با طول  $L$  و عرض  $w$  داشته باشیم :  $\frac{L}{w} = \frac{w+L}{L}$  آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

به ازای چه مقدار  $a$ ، معادله‌ی  $\frac{x+a}{x} - \frac{x}{x+a} = \frac{4a}{x+a}$  دارای جواب  $x = 1$  است.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



به ازای چه مقدار  $k$  معادله  $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{k} = \frac{3x}{x+2}$  دارای جواب  $x=1$  است؟

الف)  $a$  را تعیین کنید. (ب) به ازای  $a=0$  ریشه دیگر این معادله را در صورت وجود به دست آورید.  
 اگر  $x=2$  یک جواب معادله  $\frac{2x^2}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$  باشد،

# مای درسی

## گروه آموزشی عصر

### معادلات گنگ

الف. معادلات گنگ: در معادلات گنگ، رادیکال‌هایی شامل  $x$  وجود دارند که برای حل این گونه معادلات دو حالت زیر را داریم.

① اگر معادله شامل یک رادیکال باشد: رادیکال تنها را یک طرف برده و بقیه‌ی مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر معادله می‌بریم، سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

② اگر معادله شامل بیش از یک رادیکال باشد: یک رادیکال را در یک طرف معادله نگه می‌داریم و بقیه رادیکال‌ها و مقادیر و متغیرها را به طرف دیگر معادله می‌بریم، سپس دو طرف معادله را به توان فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم و تا جایی ساده می‌کنیم که دیگر در معادله، رادیکالی نماند.

برخی از معادلات که دارای عبارتهای رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

❖ مثال : معادله  $\sqrt{x+2} = x-4$  را حل کنید.

مثال) نقطه‌ای روی محور  $x$ ‌ها بیابید که فاصله آن از نقطه  $P(2,3)$  برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

کاردز کلاسی

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

# مای درس

۲ معادله  $\sqrt{x^2-4} + 2\sqrt{x} = 0$  را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$(ث) \quad 2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

$$1 \quad \frac{6}{x} = 2 + \frac{x-3}{x+1}$$

$$2 \quad \frac{P}{2-P} + \frac{2}{P} = \frac{-3}{2}$$

$$3 \quad \frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$$

$$4 \quad 2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$۵ \quad \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$$

$$۶ \quad \frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

$$۷ \quad \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$$

۸ پدر بزرگ برای اهدا به مهد کودک چند اسباب بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به پدر بزرگ تخفیف می داد او می توانست با همان پول چهار اسباب بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۹ ماشین  $A$  کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین  $B$  انجام می دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه ای واقع شده اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

ابتدا دامنه‌ی متغیر هر یک از معادله‌های زیر را تعیین کنید و سپس آن‌ها را حل کنید.

الف)  $3 + \sqrt{x-7} = 8$

ب)  $\sqrt{x} - x = -20$

ج)  $5 - 2\sqrt{2x-1} = 1$

د)  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-3} = 0$

ه)  $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$

و)  $\sqrt{x+5} = -\sqrt{2x+1}$

ز)  $3 = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} = 2 \quad (\text{ح})$$

$$\sqrt{x}\sqrt{x} = \sqrt{4} \quad (\text{ط})$$

$$\frac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2 \quad (\text{ی})$$

تمرین : معادله های اصم زیر را حل کنید.

$$\sqrt{4x-4} + \sqrt{x-1} = 3$$

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

$$\sqrt{2+\sqrt{x+3}} = \sqrt{5-x}$$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$x + \sqrt{x} = 6$$

$$\sqrt{x-3} = 3 - \sqrt{x}$$

نقطه ای روی خط  $y = 2x$  بیابید که از دو نقطه ی  $A(1,1)$  و  $B(3,-1)$  به یک فاصله باشد.

بدون حل معادله  $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$  توضیح دهید چرا مجموعه جواب تهی است؟

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)





## قدر مطلق و ویژگی های آن

تعریف: برای هر عدد حقیقی  $x$ ، قدرمطلق  $x$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

**نکته:** برای هر عدد حقیقی  $x$  داریم:

$$|x| = \sqrt[k]{x^k} = \text{Max}\{x, -x\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

## کاردکلاس

۱ حاصل هریک از عبارتهای زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف)  $|-5 - (-3)| =$

ب)  $|\sqrt{3} - \sqrt{5}| =$

پ)  $|1/5 - 1/2| =$

۲ عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1} =$

ب)  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} =$

با فرض  $-1 < x < 0$  حاصل  $A = |2x - 1| + |2 - x|$  چقدر است؟

[www.mydars.ir](http://www.mydars.ir)

در صورتی که  $a < 0 < b$  و  $|a| < |b|$  حاصل  $P = |a+b| + |a-b| + |a| - |b|$  چقدر است؟

ویژگی های قدرمطلق

$$۱) |x| = |-x|$$

$$۲) |x|^n = |x^n| = x^n$$

$$۳) |x-y| = |y-x|$$

$$۴) |x \cdot y| = |x| |y|$$

$$۵) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$۶) |x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$$

$$۷) |x| = a \xleftrightarrow{a > 0} x = \pm a$$

$$۸) |x| = a \xleftrightarrow{a < 0} x \in \emptyset$$

**مثال:** هریک از معادلات قدرمطلق زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را مشخص کنید.

الف)  $|2t-1|-3=0$

ب)  $|y^2-2|=7$

ج)  $|2x-3|=3-2x$

❖ **مثال:** معادله  $|3x-2|=|x-4|$  را حل کنید.

# مای دررس

معادلات قدرمطلق زیر را حل کنید.

الف)  $||x|-1|=5$

## گروه آموزشی عصر

ب)  $x|x| = -4$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$۹) |x| = x \Rightarrow x \in [0, +\infty)$$

$$۱۰) |x| = -x \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$$

$$۱۱) |x| \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$۱۲) |x| > 0 \Rightarrow x \in \phi$$

$$۱۳) |x| < 0 \Rightarrow x \in \phi$$

$$۱۴) |x| \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$۱۵) -|x| \leq x \leq |x|$$

$$۱۶) x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow |x| \leq a \xleftarrow{a>0} -a \leq x \leq a$$

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$۱۷) x^2 > a^2 \Leftrightarrow |x| > a \Leftrightarrow x > a \cup x < -a$$

$$۱۸) |x + y| \leq |x| + |y|$$

نامساوی مثلث

$$۱۹) |x - y| \leq |x| + |y|$$

$$۲۰) |x| - |y| \leq |x - y|$$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

# مای درسی

## گروه آموزشی عصر

اگر  $a$  و  $b$  اعدادی مثبت باشند مجموعه جواب نامعادله  $a < |x| < b$  برابر است با:

۲۱)  $-b < x < -a$  یا  $a < x < b$

۲۲)  $|x+y| \leq |x|+|y|$  (ناساوی مثلثی)  $\Rightarrow$  
$$\begin{cases} xy \geq 0 \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{هم علامت } y, x} |x+y| = |x|+|y| \\ xy < 0 \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{مختلف علامت } y, x} |x+y| < |x|+|y| \end{cases}$$

اگر  $|3x+4| = |x-2| + |-6-2x|$ ، حدود  $x$  چقدر است؟

اگر مجموعه جواب معادله  $|x-2| + |x+7| = |2x+5|$  به صورت  $(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$  باشد، مقدار  $b-a$  چقدر است؟

۲۳)  $|x-y| \geq |x|-|y| \Rightarrow$  
$$\begin{cases} xy \geq 0 \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{هم علامت } y, x} |x-y| = |x|-|y| \\ xy < 0 \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{مختلف علامت } y, x} |x-y| > |x|-|y| \end{cases}$$

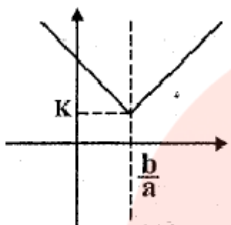
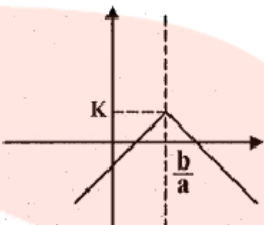
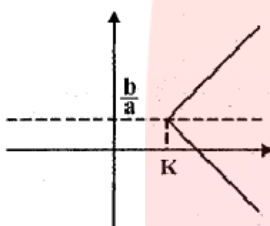
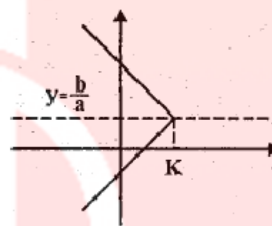
۲۴)  $|x| \leq x \longrightarrow x \in [0, +\infty)$

۲۷)  $|x| < x \longrightarrow x = \emptyset$  [www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۲۸)  $|x| \geq x \longrightarrow x \in \mathbb{R}$

۲۹)  $|x| > x \longrightarrow x \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$

رسم توابع قدر مطلق

<p>۱) <math>y =  ax - b  + k</math> (نمودار هفت)</p>  <p>محور تقارن : <math>x = \frac{b}{a}</math> برد : <math>R_f = [k, +\infty)</math></p>	<p>۲) <math>y = - ax - b  + k</math> (نمودار هشت)</p>  <p>محور تقارن : <math>x = \frac{b}{a}</math> برد : <math>R_f = (-\infty, k]</math></p>
<p>۳) <math>x =  ay - b  + k</math> (نمودار کوچک تر)</p>  <p>تقارن : <math>y = \frac{b}{a}</math> دامنه رابطه : <math>[k, +\infty)</math></p>	<p>۴) <math>x = k -  ay - b </math> (نمودار بزرگ تر)</p>  <p>تقارن : <math>y = \frac{b}{a}</math> دامنه رابطه : <math>(-\infty, k]</math></p>

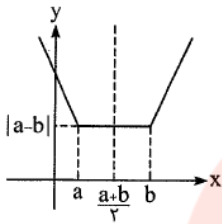
مثال :

مای دارس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

### بررسی نمودار توابع به فرم $y = |x - a| + |x - b|$



نمودار این توابع به نمودار گلدانی معروف هستند و با فرض  $a < b$ ، شکل کلی آن‌ها به صورت مقابل است:

#### ویژگی‌های تابع گلدانی:

- (۱) ریشه‌های درون قدرمطلق، طول نقاط شکستگی نمودار تابع است.
- (۲) تابع در بازه‌ی  $[b, +\infty)$  صعودی اکیداً و شیب آن  $m = 2$  و در بازه‌ی  $(-\infty, a]$  نزولی اکید و شیب آن برابر  $m = -2$  است.
- (۳) خط به معادله‌ی  $x = \frac{a+b}{2}$ ، محور تقارن نمودار تابع است. بنابراین اگر  $a + b = 0$ ، آن‌گاه محور  $y$  ها محور تقارن نمودار تابع است و لذا تابع زوج خواهد بود.
- (۴) مینیمم تابع برابر  $|a - b|$  است و لذا برد تابع برابر است با  $R_f = [|a - b|, +\infty)$ .

**نکته:** برای حل معادله‌ی  $|x - a| + |x - b| = k$  کافی است نمودار  $y = |x - a| + |x - b|$  را با خط  $y = k$  تقاطع دهیم، که در نتیجه یکی

از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

الف) اگر  $k < |a - b|$ ، معادله جواب ندارد.

ب) اگر  $k = |a - b|$ ، معادله بی‌شمار جواب دارد و مجموعه جواب آن بازه‌ی  $[a, b]$  است.

ج) اگر  $k > |a - b|$ ، آن‌گاه معادله دو جواب دارد که عبارت‌اند از  $x = \frac{a+b \pm k}{2}$ .

$$y = |x+1| + |x-2|$$

$$y = |x| + |x+3|$$

$$y = |2x-4| + |x| + |2x+2|$$

# مای دارس

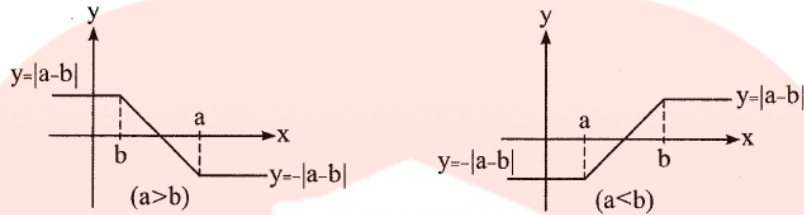
## گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



### بررسی نمودار توابع به فرم $y = |x - a| - |x - b|$

نمودار این توابع به نمودار آبشاری یا شُرشره‌ای معروف هستند و شکل کلی آن‌ها به یکی از دو صورت زیر است:



#### ویژگی‌های تابع آبشاری (سرسره‌ای):

(۱) ریشه‌های درون قدرمطلق، طول نقاط شکستگی نمودار تابع است.

(۲) تابع در بازه‌ی  $[a, b]$  یکنوا با شیب ۲ یا -۲ است. به‌طور کلی این توابع، یکنوا (غیراکید) می‌باشند.

(۳) نقطه‌ی  $w\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$  مرکز تقارن منحنی است. در نتیجه اگر  $a + b = 0$ ، آن‌گاه مبدأ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع بوده و لذا تابع فرد می‌باشد.

(۴) برد تابع برابر  $R_f = [-|a-b|, |a-b|]$  است. یعنی بیشترین مقدار و کمترین مقدار این تابع به ترتیب برابر  $|a-b|$  و  $-|a-b|$  است.

**نکته:** برای حل معادله‌ی  $|x-a| - |x-b| = k$  کافی است نمودار  $y = |x-a| - |x-b|$  را با خط  $y = k$  تقاطع دهیم، که در نتیجه یکی

از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

الف) اگر  $|k| > |a-b|$ ، آن‌گاه معادله جواب ندارد.

ب) اگر  $|k| = |a-b|$ ، آن‌گاه معادله بی‌شمار جواب دارد.

ج) اگر  $|k| < |a-b|$ ، آن‌گاه معادله یک جواب دارد.

$$y = |x - 2| - |x + 1|$$

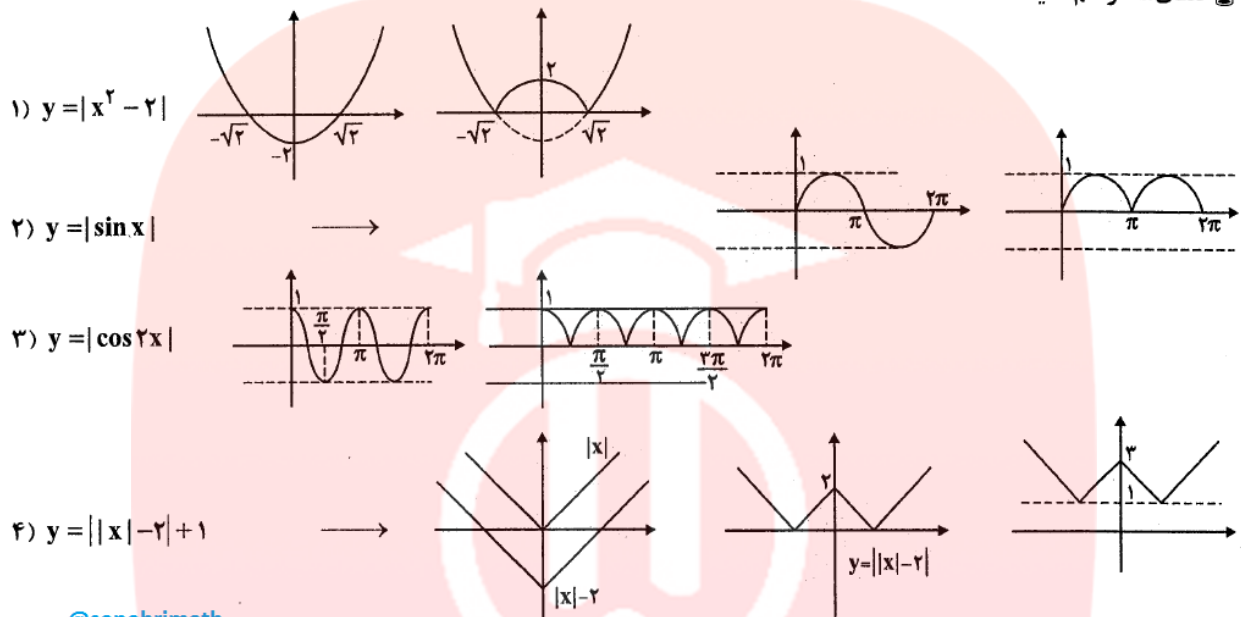
$$y = |x + 2| - |x - 3|$$

محیط ناحیه‌ی تشکیل شده از برخورد نمودار  $y = |x + 1| - |x + 3|$  با محورهای مختصات چقدر است؟

رسم توابع به فرم  $y = |f(x)|$

ابتدا  $f(x)$  را رسم کرده، سپس قسمت زیر محور  $x$  ها را به بالا قرینه می‌کنیم:

مثال‌ها: رسم کنید: ⌚



@sepehrimath

مثال :

مای دارس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

رسم توابع قدر مطلق به فرم :  $y = \pm(ax \pm b) \pm |ax \pm b|$

برای رسم چنین توابعی از تعریف قدر مطلق کمک می گیریم.

مثال :

$$y = x - |x|$$

$$y = x - |x - 2|$$

$$y = x|x|$$

$$y = x - \frac{|x|}{x}$$

$$y = x + 1 + |x|$$

# مای دررس

مساحت محدود به نمودار تابع  $y = 3 - |x + 1|$  و خط به معادله  $y = -1$  چقدر است؟  
گروه آموزشی عصر

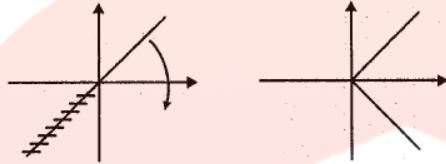
[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

رسم توابع به فرم  $|y| = f(x)$

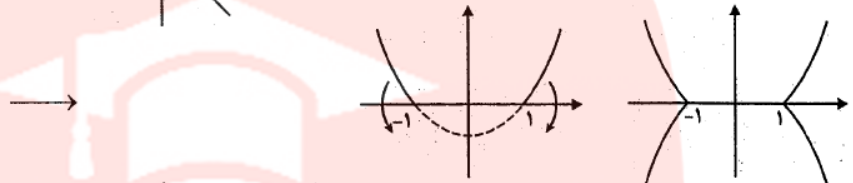
ابتدا  $f(x)$  را رسم کرده و چون باید  $f(x) > 0$  باشد، (زیرا  $|y| > 0$ ) پس قسمت زیر محور  $x$  ها، یعنی  $f(x) < 0$  را حذف کرده. در عوض قسمت بالای محور  $x$  ها را به زیر  $x$  ها قرینه می کنیم.

مثال: رسم کنید: ⌚

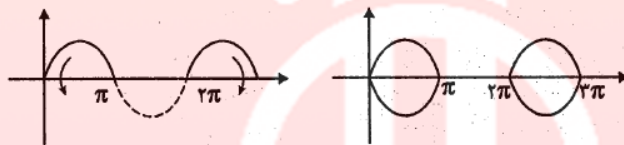
۱)  $|y| = x$



۲)  $|y| = x^2 - 1$



۳)  $|y| = \sin x$



@sepehrimath

مثال :

مای دارس

گروه آموزشی عصر

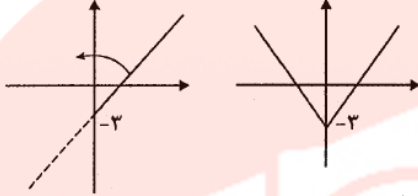
www.my-dars.ir

رسم توابع به فرم  $y = f(|x|)$

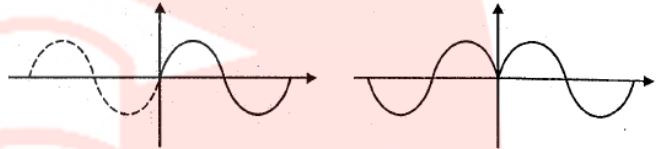
ابتدا  $f(x)$  را رسم کرده و چون دامنه  $f$  مثبت فرض می‌شود، (یعنی:  $|x|$ ) پس نمودار  $f$  در سمت چپ محور  $y$  ها را حذف کرده و قسمت راست محور  $y$  ها را در سمت چپ  $y$  ها قرینه می‌کنیم:

مثال: رسم کنید: ⌚

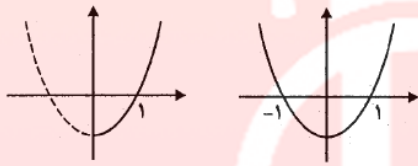
۱)  $y = 4|x| - 3$   
 $f = 4x - 3$



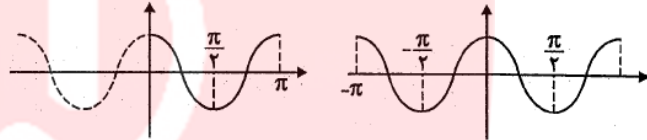
۲)  $y = \sin(|x|)$



۳)  $y = |x|^2 - 1$

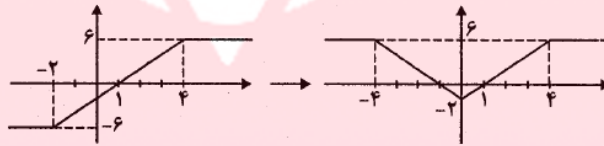


۴)  $y = \cos^2|x|$



نکته: توابع ۳ و ۴ چون زوجند، نمودار  $f(|x|)$  همان نمودار  $f(x)$  خواهد شد.

۵)  $y = ||x| + 2| - ||x| - 4|$   
 پله:  $y_1 = |x + 2| - |x - 4|$

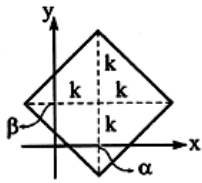


توضیح حل: ابتدا نمودار  $y_1$  (پله) را رسم می‌کنیم و تابع  $y$  تابع زوج شده‌ی  $y_1$  خواهد بود.

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



نمودار  $|x - \alpha| + |y - \beta| = k$  مربعی است به

مرکز  $(\alpha, \beta)$  و طول قطر  $2k$  (قطرهای مربع موازی محورهای مختصات هستند) یعنی مثل شکل روبه‌رو:

در حالت کلی هم نمودار ضابطه‌ی  $|ax + b| + |cy + d| = k$  (با شرط  $a \neq c$ ) یک لوزی است به مرکز  $(-\frac{b}{a}, -\frac{d}{c})$  و به طول قطرهای  $|\frac{2k}{a}|$  و  $|\frac{2k}{c}|$ .

مثال :

محیط نمودار معادله‌ی  $|x + 3| + |y - 2| = 4$  چقدر است؟

مای دارس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف)  $f(x) = x|x|$

ب)  $g(x) = |x^2 - 1|$

پ)  $h(x) = |x - 1| + |x + 1|$

۲ بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های  $-1$  و  $3$  روی محور  $x$ ها برابر  $6$  باشد؟

# مای درسی

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین  $x$  و  $3$  برابر  $7$  است.

ب) دو برابر فاصله بین  $x$  و  $6$  برابر  $4$  است.

پ) فاصله بین  $x$  و  $-3$  بزرگ‌تر از  $2$  است.

۴ دو معادله زیر را حل کنید.

الف)  $\frac{2-x}{|x-3|} = 1$

ب)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای  $y=3$  معادله های به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف)  $y = x - \frac{x}{|x|}$

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

ب)  $y = x^2 - 6x$



۶ نمودار تابع  $f(x) = ||x| - 2|$  را رسم کنید، سپس معادله  $f(x) = 1$  را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.



۷ نمودار تابع  $f(x) = |x^2 - 2x|$  را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله  $|x^2 - 2x| = 2$  را حل نمایید.

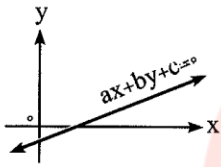
# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



## آشنایی با هندسه تحلیلی



معادله یک خط در دستگاه مختصات دکارتی به شکل  $ax + by + c = 0$  است که در آن  $a$  و  $b$  هم‌زمان صفر نیستند.

اگر  $b \neq 0$  باشد، با تقسیم طرفین معادله  $ax + by + c = 0$  بر  $b$  داریم:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

حواستان باشد که:

<p>اگر <math>ax + by + c = 0 \Rightarrow</math> شیب خط <math>m = -\frac{a}{b} = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y}</math></p> <p>اگر <math>y = ax + b \Rightarrow</math> شیب خط <math>m = a</math></p>
--

**نوشتن معادله خط:** معادله خطی که با شیب  $m$  از نقطه  $P(x_0, y_0)$  می‌گذرد، عبارت است از:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

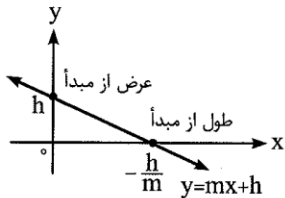
\* شیب خط مستقیمی که از نقاط  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  می‌گذرد، برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی. به عبارتی

می‌توان نوشت:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

بنابراین معادله خطی که از این دو نقطه می‌گذرد، عبارت است از:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A)$$



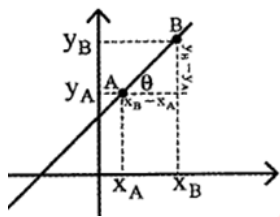
\* عرض نقطه تلاقی خط با محور  $y$ ها را عرض از مبدأ می‌نامیم، پس برای به دست آوردن آن کافی است در معادله

خط به جای  $x$ ، صفر قرار دهید. همچنین طول نقطه تلاقی خط با محور  $x$ ها را طول از مبدأ می‌نامیم و در نتیجه

برای به دست آوردن آن کافی است به جای  $y$ ، صفر قرار دهید.

\* این رو هم بدویندر؛ معادله خطی که از دو نقطه  $A(a, 0)$  و  $B(0, b)$  می‌گذرد، به صورت  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  است.

**مثال:**



شیب خط با استفاده از دو نقطه معلوم A و B از خط :

$$\tan \theta = m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

**مثال :** به ازای کدام مقدار a خط گذرنده از نقاط  $(2, a)$  و  $(2a-1, 7+a)$  با جهت مثبت محور X ها زاویه  $135^\circ$  می سازد؟

**مثال :** نمودار هندسی خطی به معادله  $y = 2x + 4$  را رسم کنید.

**مثال :** معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۷ بوده و محور عرض را در نقطه  $A(0, 4)$  قطع کند.

**مثال :** معادله خطی را بنویسید که شیب آن برابر ۳ و طول از مبدأ آن برابر ۲ باشد.

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

**مثال :** معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $A(4, -1)$  بگذرد و موازی محور طول باشد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی  $A(4, -1)$  بگذرد و موازی محور عرض باشد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی  $A(2, 5)$  و  $B(2, -3)$  بگذرد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی  $A(1, -4)$  و  $B(-1, -4)$  بگذرد.

مثال : معادله‌ی خطی را بنویسید که از دو نقطه‌ی  $A(3, 5)$  و  $B(2, -1)$  بگذرد.

مثال : مساحت مثلثی را حساب کنید که خط  $3x + 4y = 12$  با محورهای مختصات می‌سازد.

مثال : مقدار  $a$  را چنان تعیین کنید که خط زیر از نقطه‌ی  $A(-1, -2)$  بگذرد.

$$(a - 2)x - 3y = 2a - 4$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

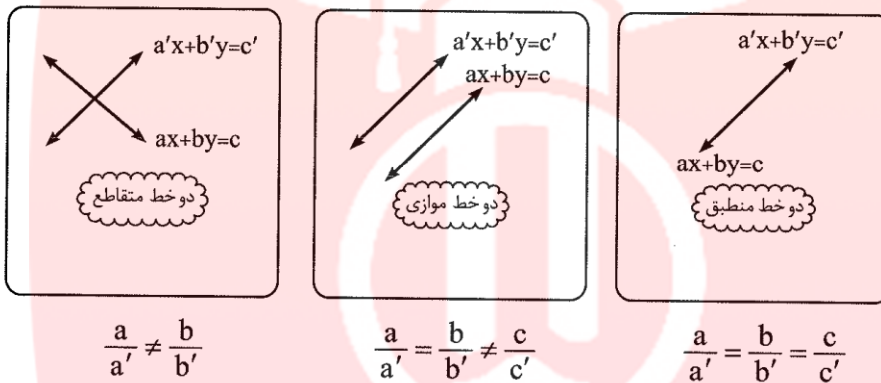
## دو خط موازی و عمود بر هم

غیر موازی با محورهای مختصات با هم موازی اند، اگر و فقط اگر شیب آن‌ها برابر باشد

دو خط برهم عمودند، اگر و فقط اگر حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر  $-1$  باشد.

## وضعیت دو خط نسبت به هم

سه حالت زیر وجود دارد:



$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

\* دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند (دو خطی که شیب‌های برابر ندارند، متقاطع هستند و نقطه تلاقی از حل دستگاه معادلات دو خط به دست می‌آید).

**خطوط عمود برهم:** دو خط  $d$  و  $d'$  برهم عمودند، هرگاه:  $m_d = -\frac{1}{m_{d'}}$  یا  $m_d \times m_{d'} = -1$

\* دو خط  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$  وقتی برهم عمود می‌شوند که  $aa' + bb' = 0$  باشد.

**مثال:** معادله‌ی خطی را بنویسید که از نقطه‌ی  $A(3, -2)$  بگذرد و با

خط  $4x - 2y - 1 = 0$  موازی باشد.

مای دارس

گروه آموزشی عصر

**مثال:** مقدار  $n$  را چنان تعیین کنید که دو خط زیر با هم موازی باشند.

$$D : (n-1)x + ny - 1 = 0$$

$$D' : 4nx + (n-1)y + 2 = 0$$

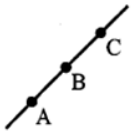
www.my-dars.ir

**مثال :** معادله خط گذرا از نقطه  $P(2, -1)$  را بنویسید که با خط  $y = 3x - 4$  موازی باشد.

به ازای چه مقدار  $m$  دو خط  $(1 + 3m)y = 5 - 3mx$  و  $(m + 1)x + my = 3$  موازی اند؟

شرط اینکه سه نقطه بر روی یک خط راست واقع شوند یا بر یک استقامت باشند و یا بر یک راستا واقع شوند :

اگر بخواهیم سه نقطه  $A(x_1, y_1)$ ،  $B(x_2, y_2)$  و  $C(x_3, y_3)$  بر یک استقامت باشند یعنی بر روی یک خط راست واقع باشند، باید شیب جزء با شیب کل برابر باشد.



$$m_{AB} = m_{AC} = m_{BC}$$

**مثال :** نشان دهید سه نقطه  $A(5, 7)$  و  $B(4, 3)$  و  $C(6, 11)$  روی یک خط راست قرار دارند.

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

**مثال :** سه نقطه  $A(2, 5)$  و  $B(m - 4, m + 6)$  و  $C(2, -9)$  روی یک خط راست قرار دارند.

مقدار  $m$  چه قدر است؟

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

مثال : مقدار  $a$  را چنان تعیین کنید که سه خط زیر در یک نقطه هم‌دیگر را قطع کنند:

$$D_1 : 3x - y - 1 = 0 \quad D_2 : (a - 2)x + 2y - 2a = 0 \quad D_3 : 2x + 3y - 8 = 0$$

سه خط متقارب :

به ازای کدام مقدار  $a$ ، سه خط به معادلات  $y + 2x = 0$ ،  $2y + ax + 4 = 0$  و  $y + 3x = a$  متقارب‌اند؟

(۴) نشدنی

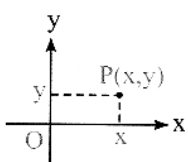
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) -۱

دستگاه محورهای مختصات

نقطه و دستگاه مختصات



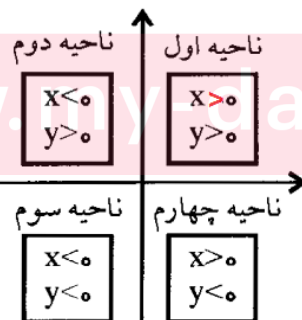
برای تعیین موقعیت یک نقطه در صفحه از دستگاه‌های مختصات استفاده می‌کنند. یکی از این دستگاه‌ها، دستگاه مختصات دکارتی است.

در این دستگاه به هر نقطه‌ی  $P$  از صفحه، یک زوج مرتب  $(x, y)$  از اعداد حقیقی متناظر می‌شود،  $x$  را طول نقطه و  $y$  را عرض آن می‌نامند. محورهای مختصات  $x$  و  $y$  بر هم عمودند. این محورها، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر کدام از آن‌ها را یک ربع می‌نامند.

ربع اول، ناحیه‌ای است که در آن  $x$  و  $y$  نقاط، هر دو مثبت هستند، در ربع دوم،  $x$  نقاط منفی و  $y$  نقاط مثبت است، در ربع سوم،  $x$  و  $y$  نقاط هر دو منفی هستند، بالاخره ربع چهارم متشکل است از نقاطی که  $x$  آن‌ها مثبت و  $y$  شان منفی است.

\* نقطه‌ی  $A(x, 0)$  روی محور  $x$  ها و نقطه‌ی  $B(0, y)$  روی محور  $y$  ها قرار دارد.

\* اگر طول نقطه، مثبت باشد، آن‌گاه نقطه، سمت راست محور  $y$  ها و اگر طول نقطه، منفی باشد، آن‌گاه نقطه، سمت چپ محور  $y$  ها قرار دارد.



فاصله دو نقطه و فاصله مبدا مختصات از یک نقطه

اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات باشند:

$$۱) AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$۲) OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad \text{فاصله نقطه A تا مبدا}$$

$$۳) x_B = x_A \rightarrow AB = |x_B - x_A|$$

$$۴) y_A = y_B \rightarrow AB = |y_B - y_A|$$

مختصات وسط پاره خط AB: اگر M وسط پاره خط AB باشد داریم:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

مثال :

# مای دررس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



تذکره ۱:

تذکره ۲:

اگر  $A(4,4)$  و  $C(1,1)$  دو رأس مقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

۱۸ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

❖ مثال: معادله عمودمنصف پاره خطی را بنویسید که دو نقطه  $A(-2,1)$  و  $B(3,4)$  را به هم وصل کرده است.

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات، از نقطه  $N(-6,8)$  گذشته است. شعاع دایره را محاسبه کنید.

ب) فاصله نقطه  $E(x_1, y_1)$  تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

پ) فاصله نقطه  $N(-6,8)$  تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

نشان دهید نقطه  $P(-12, 11)$  روی عمود منصف پاره خط واصل دو نقطه  $A(0, -3)$  و  $B(6, 15)$  قرار دارد.

**مثال :** الف) نقطه  $N(5, -4)$  وسط پاره خط واصل بین دو نقطه  $A$  و  $B(7, -2)$  است. مختصات نقطه  $A$  را بیابید.

ب) قرینه نقطه  $C(1, 2)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$  را به دست آورید.

پ) قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

نقاط  $A(0, -1)$ ،  $B(3, 2)$  و  $C(-2, 1)$  سه رأس یک مثلث هستند. نوع مثلث را مشخص کنید.

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

مثلثی با رئوس  $A(2, 6)$ ،  $B(-2, 5)$  و  $C(2, 3)$  مفروض است. طول میانه  $AM$  را بیابید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

در مثلثی با رئوس  $A(4,3)$ ،  $B(2,0)$  و  $C(6,-1)$  معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  را بیابید.

مثال: اگر  $A(3,2)$  و  $B(-5,4)$  دو سر یک پاره خط باشند معادله‌ی عمودمنصف پاره خط  $AB$  را بنویسید.

مثال: اگر  $A(-2,3)$  و  $B(3,4)$  و  $C(-7,-2)$  سه رأس یک مثلث باشند، معادله‌ی ضلع  $AC$  و میانه‌ی  $AM$  را بنویسید.

مثال: اگر  $A(3,5)$  و  $B(6,-2)$  و  $C(13,1)$  سه رأس یک مثلث باشند، نشان دهید مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه است و میانه‌ی

نظیر وتر مثلث نصف وتر است.

مای داریس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

مثال : اگر  $A(-4,1)$  و  $B(0,5)$  و  $C(4,-3)$  سه رأس یک مثلث و  $D$  و  $E$  وسط‌های اضلاع  $AB$  و  $AC$  باشند، نشان دهید  $DE$  با ضلع  $BC$  موازی و مساوی نصف آن است.

مثال : اگر  $A(-3,-2)$  و  $B(1,5)$  و  $C(-6,9)$  سه رأس یک مثلث باشند:  
اولاً: نشان دهید مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه است.  
ثانیاً: معادله ارتفاع نظیر وتر مثلث را بنویسید.

دایره‌ای به مرکز  $O(2,1)$  از نقطه  $A(5,3)$  می‌گذرد. شعاع دایره را به دست آورید.

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

اگر  $M(1,-1)$  و  $N(3,1)$  و  $P(-1,2)$  وسط‌های اضلاع یک مثلث باشند، مختصات رئوس مثلث را به دست آورید.

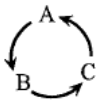
[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

اگر  $A(-1, 2)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(1, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  از رأس  $A$  را بیابید.

در مثلثی با رئوس  $A(4, 3)$ ،  $B(2, 0)$  و  $C(6, -1)$  معادله میانه وارد بر ضلع  $BC$  را بیابید.

مساحت مثلث با معلوم بودن سه رأس :

اگر نقاط  $A(x_A, y_A)$ ،  $B(x_B, y_B)$  و  $C(x_C, y_C)$  سه رأس مثلث  $ABC$  باشند در این صورت مساحت مثلث  $ABC$  از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

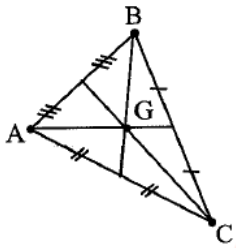


$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

اگر  $A(2, 1)$ ،  $B(3, -1)$  و  $C(3, 2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  باشند، مساحت مثلث را بیابید.

گروه آموزشی عصر

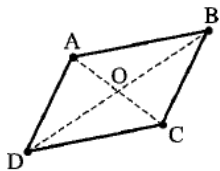
[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



مختصات مرکز ثقل مثلث: مثلث  $ABC$  را با سه رأس  $A(x_A, y_A)$ ،  $B(x_B, y_B)$  و  $C(x_C, y_C)$  در نظر بگیرید. مختصات مرکز ثقل مثلث (محل برخورد سه میانه) از فرمول زیر تعیین می‌شود:

$$G(x_G, y_G) : \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

مثال:



ویژگی مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع

در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$

نقطه  $O$  وسط قطرها است، پس چون وسط  $AC$  بر وسط  $BD$  منطبق شده، داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

مقادیر  $m$  و  $n$  را طوری تعیین کنید که نقاط  $A(2-m, 2n+3)$  و  $B(-2, 4)$  و  $C(n+1, 2m)$  و

$D(m+3n, n-5)$  رئوس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  باشد.

گروه آموزشی عصر

فاصله یک نقطه از یک خط :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  :

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  :

$$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

معادله نیم سازهای زاویه های دو خط  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$  :

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله مبدأ مختصات از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

مثال :

# مای دررس

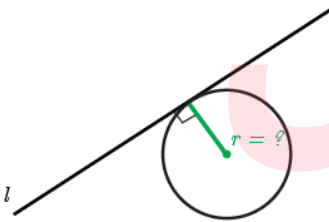
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۱ اگر نقطه  $A(2,3)$  رأس یک مربع و معادله یک ضلع مربع  $3x - 4y = 9$  باشد، مساحت مربع چقدر است؟

۲ دو خط  $3x + 2y = 1$  و  $2x - 3y = 2$  معادله‌های دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه  $A(2,5)$  یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

۳ خط  $3x - 4y = 0$  بر دایره‌ای به مرکز  $W(2,-1)$  مماس است. شعاع دایره را بیابید.  
(راهنمایی: خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است).



گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی  $D_1: 3x + 4y + 1 = 0$  و  $D_2: 6x + 8y - 8 = 0$  را به دست آورید.



مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی  $M(2, -3)$  از خط  $D: 3x - 4y + 2 = 0$  چه قدر است؟

اگر فاصله‌ی نقطه‌ی  $A(1, 2)$  از خط  $3x + my = 1$  برابر ۲ باشد، مقدار  $m$  را بیابید.

مثال: اگر  $A(-2, 3)$  و  $B(4, -4)$  و  $C(-4, 2)$  سه رأس یک مثلث باشند:

اولاً: معادله‌ی میانه‌ی  $AM$  را بنویسید.

ثانیاً: معادله‌ی ارتفاع  $AH$  را بنویسید.

ثالثاً: فاصله‌ی نقطه‌ی  $A$  تا ضلع  $BC$  را به دست آورید.

رابعاً: مساحت مثلث را حساب کنید.

# مای دررس

## گروه آموزشی عصر

معادله‌ی قطر مربعی به صورت  $5x + 12y - 4 = 0$  است. اگر  $A(1, 1)$  یک رأس آن باشد، مساحت مربع چقدر است؟

اگر فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط  $0 = -1 + 2a - 3x + 4y$  برابر ۳ باشد مقادیر  $a$  را حساب کنید.

فاصله‌ی نقطه‌ی  $A(-2, 2)$  را از خط  $1 = \frac{2-3x}{4} - \frac{3+2y}{2}$  به دست آورید.

معادله‌ی یک قطر مربع  $0 = 2 + 4y + 3x$  و یک رأس آن  $A(2, 3)$  است. مساحت مربع را تعیین کنید.

معادله‌ی دو ضلع مجاور یک مستطیل  $0 = 5 - x - y$  و  $0 = 7 - x + y$  می‌باشد. اگر مبدأ مختصات یک رأس مستطیل باشد، مساحت آن را به دست آورید.

مای دارس  
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

دو خط  $0 = -1 - 4y - 3x$  و  $0 = 17 + 6x - 8y$  بر یک دایره مماسند. مساحت دایره را حساب کنید.

## تمرین

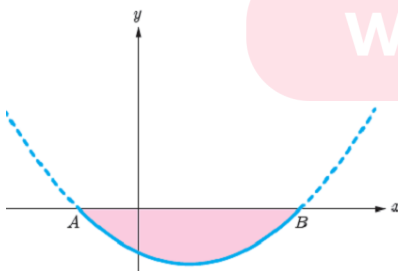
- ۱ مثلث  $ABC$  به رأس‌های  $A(-1, 7)$  و  $B(-6, -2)$  و  $C(3, 3)$  را در نظر بگیرید.
- الف) مثلث را رسم کنید.
- ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.
- پ) معادله عمود منصف ضلع  $BC$  را به دست آورید.
- ت) طول ارتفاع  $AH$  چقدر است؟

- ۲ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

## مای درسی

- ۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله  $y = x^2 - 8x - 20$  مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.
- الف) مختصات نقاط انتهای عدسی  $A$  و  $B$  را به دست آورید.
- ب) اگر  $x$  بر حسب سانتی‌متر باشد طول  $AB$  را به دست آورید.
- پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و  $y$  بر حسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟

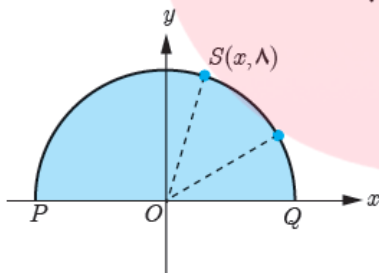
www.my-dars.ir



۴ ثابت کنید فاصله دو خط موازی  $ax+by+c=0$  و  $ax+by+c'=0$  برابر  $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$  می باشد.

۵ خط  $4x+3y=5$  بر دایره  $C$  به مرکز  $O(-1,2)$  مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

۶ نقطه  $S(x,8)$  روی نیم دایره ای به شعاع  $10^\circ$  در شکل روبه رو داده شده است.



الف) مقدار  $x$  را به دست آورید.

ب) شیب خط های  $PS$  و  $SQ$  را به دست آورید.

پ) نشان دهید  $\hat{PSQ}$  قائمه است.

# مای درس

## گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۷ اگر فاصله نقطه  $A(1,2)$  از خط  $ax+4y=1$  برابر ۲ باشد، مقدار  $a$  چقدر است؟

۸ سه رأس مثلث  $ABC$ ،  $A(-11, -13)$ ،  $B(-3, 3)$ ،  $C(3, 1)$  می‌باشند.  
الف) طول عمودی را که از رأس  $B$  بر میانه نظیر رأس  $C$  وارد می‌شود به دست آورید.  
ب) مختصات رأس  $D$  را چنان تعیین کنید که  $ABCD$  یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۹ نقطه‌ای روی خط  $y=2x$  تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه  $A(2, 4)$  برابر ۵ باشد.

۱۰ نقاط  $A(4, 2)$  و  $B(1, -1)$  و  $C(8, -2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. اگر  $H$  و  $M$  به ترتیب پای ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  باشند طول  $MH$  را به دست آورید.

مای داریس  
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)