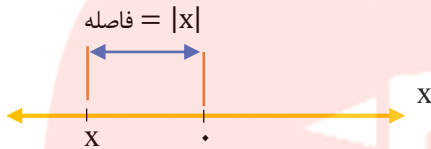


* قدر مطلق و ویژگیهای آن :

قدر مطلق: قدر مطلق هر عدد حقیقی، یعنی فاصله ی آن عدد حقیقی تا مبدا مختصات. قدر مطلق عدد

حقیقی x را با $|x|$ نشان می دهیم.



به عنوان مثال فاصله نقاط به طول های ۲ و -۲ روی محور اعداد حقیقی تا مبدا مختصات برابر ۲ واحد است

$$|-2| = |2| = 2$$

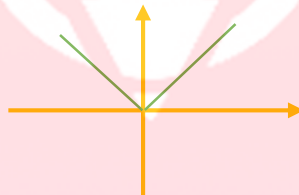
پس:

به طور کلی فاصله ی ۲ عدد a و b روی محور اعداد حقیقی برابر $|a - b|$ است تعریف جبری قدر مطلق عدد

حقیقی x به صورت زیر است:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

قرینه ←



یعنی اگر داخل قدرمطلق مثبت باشد خود آن عدد را بیرون می آوریم و اگر درون قدر مطلق منفی باشد قرینه

ی آن عدد را بیرون می آوریم.

◀ **مثال ۱:** حاصل عبارات زیر را بدون قدر مطلق بنویسید.

الف) $|-12 \div 2 \times 3|$

ب) $|3 - \sqrt{2}|$

پ) $|3 - \pi|$

ت) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$

ج) $|1 - \sqrt{3}| + |\sqrt{3} - 2|$

د) $|-(x - 1)^2 - 3|$

◀ **مثال ۲:** حاصل عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{a^4 + 2a^2 + 1}$

ب) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

◀ **مثال ۳:** اگر $x < 0$ حاصل $\sqrt{x^2 + 1} + 2\sqrt{x^2}$ کدام است.

الف) $-(x - 1)$ ب) $x + 1$ ج) $x - 1$ د) $-(x + 1)$

◀ **مثال ۴:** اگر $a > 0 > b$ حاصل $|a - b| + |a + 1| - |1 - b|$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

◀ **مثال ۵:** اگر $1 < x < 3$ باشد حاصل عبارت $|x - 1| + |x - 3|$ را بدست آورید.

*** روش کلی رسم نمودار توابع شامل قدر مطلق: روش آماری عصر**

۱- ریشه های داخل قدر مطلق را بدست می آوریم و عبارات داخل قدر مطلق را تعیین علامت می کنیم.

www.my-dars.ir

۲- با توجه به جدول تعیین علامت و علامت عبارت داخل قدرمطلق در هر بازه، قدر مطلق را برمی داریم و تابع را به صورت یک تابع چند ضابطه ای می نویسیم.

۳- نمودار هر ضابطه را با توجه به محدوده ی مورد نظر رسم می کنیم.

◀ **مثال ۶:** با استفاده از تعیین علامت، ضابطه ی هر یک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $y = |x - 2| + 1$

ب) $y = x|x|$

پ) $y = |x - 1| + |x + 2|$

ت) $y = |x - 1| - |x + 2|$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$ج) y = |x^2 - 1|$$

$$د) y = 3 - |x + 1|$$

$$ه) y = x + |x|$$

$$ی) f(x) = 2x - |x - 1| + \frac{|x|}{x}$$

نکته:

برای رسم توابع به فرم $y = k|ax + b| + d$ به کمک نقطه یابی ابتدا ریشه ی داخل قدر مطلق را بدست آورده و ریشه ی بدست آمده را همراه با یک عدد در سمت چپ و یک عدد در سمت راست آن را به x می دهیم و y را بدست می آوریم .

x	یک عدد قبل	ریشه	یک عدد بعد
y			

گروه آموزشی عصر

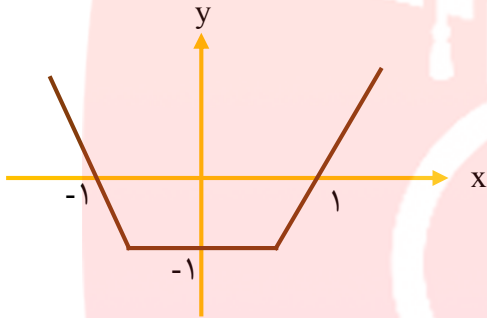
◀ مثال ۷: نمودار تابع $f(x) = -2|x - 3| + 1$ را رسم کنید .

www.my-dars.ir

* رسم توابع به فرم $y = |f(x)|$:

ابتدا نمودار $y = f(x)$ یعنی عبارات داخل قدر مطلق را رسم می کنیم سپس قسمت های بالای محور X ها را نگه می داریم و قرینه ی قسمتهایی که زیر محور X ها هستند را نسبت به محور X ها بدست می آوریم .

◀ مثال ۸ : شکل زیر نمودار تابع با ضابطه ی $y = f(x)$ است نمودار $y = |f(x)|$ را رسم کنید.



◀ مثال ۹ : نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x^2 - 1|$

ب) $y = |\sin x| \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

پ) $y = |\cos x| \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$$ت) y = ||x| - 2|$$

$$ج) y = |x^2 - 2x|$$

$$د) y = ||x + 1| - 1|$$

*** ویژگیهای قدر مطلق:**

۱- قدر مطلق هر عدد حقیقی، مقداری نامنفی است $|x| \geq 0$

۲- قدر مطلق هر عدد حقیقی و قدر مطلق قرینه ی آن عدد با هم برابرند $|x| = |-x|$

۳- $\sqrt{x^2} = |x|$ در حالت کلی $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt[n]{x^n} = |x|$

۴- برای هر دو عدد حقیقی x و y همواره داریم $(y \neq 0)$ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ و $|x \cdot y| = |x||y|$

تمرین: ویژگی ۴ را ثابت کنید. گروه آموزشی عصر

۵- برای هر عدد حقیقی x $|x^2| = |x|^2 = x^2$

www.my-dars.ir

۶- برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y \quad |x| = a \stackrel{a>0}{\Rightarrow} x = \pm a$$

۷- برای هر عدد حقیقی x ، اگر $a > 0$ باشد آنگاه

الف) $|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$

ب) $|x| \geq a \rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$

تمرین: ویژگی ۷ را ثابت کنید.

۸- برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

تمرین: ویژگی ۸ را ثابت کنید.

مثال: برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید (نامساوی مثلث)

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

◀ **مثال ۱۱:** برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید.

الف) $|x - y| \leq |x| + |y|$

ب) $|x| - |y| \leq |x - y|$

*** حل معادلات شامل قدر مطلق:**

الف) معادلاتی که به وسیله ی ویژگی های قدر مطلق حل می شوند:

$$|u| = a \Rightarrow u = \pm a$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = \pm g(x)$$

$$|u|^2 = u^2$$

◀ **مثال ۱۲:** معادلات زیر را حل کنید.

۱) $|2x + 1| - 2 = 5$

۲) $||3x - 1| - 3| = 8$

۳) $|3x - 2| = |x - 4|$

۴) $|x - 1| = 4 - 3x$

۵) $||x^2 - 1| - 2| = 1$

مای درس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

$$۶) ۲x - |x - ۵| = ۱$$

$$۷) |x^۲ - ۳x| + x^۲ - ۳x = ۰$$

ب) معادلاتی که با ویژگی های قدر مطلق حل نمی شوند را با ریشه یابی عبارات درون قدر مطلق و تعیین علامت آنها، حل می کنیم.

◀ مثال ۳: معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) x|x| = -۴$$

$$۲) |۲x - ۱| + |x| = ۷$$

$$۳) |x - ۲| - |x + ۱| = ۳$$

$$۴) |۳x - ۱| - |x| = x + ۲$$

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

◀ **مثال ۱۴:** معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \sqrt{x-1} - |x-1| = 0$$

$$۲) \frac{2-x}{|x-3|} = 1$$

$$۳) \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 2x + 1$$

◀ **مثال ۱۵:** بر روی محور طول ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه به طول های ۱- و ۳ روی محور X ها برابر ۶ باشد.

مای درس

* حل معادلات به روش هندسی:

برای حل معادله $f(x) = g(x)$ کافی است نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنید طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب های معادله $f(x) = g(x)$ خواهند بود.

در این روش حل معادله، تعداد جواب ها و مقدار تقریبی آنها (و گاهی دقیق) قابل تشخیص است.

◀ **مثال ۱۶:** معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

$$۱) \sqrt{x} = -x + ۱$$

$$۲) |x| = x^2 - ۳x$$

$$۳) |x - ۱| = x^2 - x - ۱$$

$$۴) x - ۲ \sin x = ۰$$

$$۵) |x| = \sqrt{۲ - x}$$

$$۶) x^2 - \sqrt{x + ۲} = ۲x - ۱$$

$$۷) |x - ۱| + |x + ۱| = ۲$$

www.my-dars.ir

◀ مثال ۱۷: معادله $|x^2 - 1| = |2x - 1|$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

◀ مثال ۱۸: نمودار تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ را رسم کنید سپس به ازای $y = 3$ معادله را به روش جبری و هندسی حل کنید.

◀ مثال ۱۹: نمودار $f(x) = ||x| - 2|$ را رسم کنید سپس معادله $f(x) = 1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

◀ مثال ۲۰: نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را رسم کنید سپس به دو روش جبری و هندسی معادله $|x^2 - 2x| = 2$ را حل کنید.

مای دارس
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

* حل نامعادلات شامل قدر مطلق به کمک ویژگی های قدر مطلق:

$$|U| \leq a \rightarrow -a \leq U \leq a$$

$$|U| \geq a \rightarrow \begin{cases} U \geq a \\ \text{یا} \\ U \leq -a \end{cases}$$

◀ مثال ۲۱: نامعادلات زیر را حل کنید.

$$۱) |۲ - ۳x| < ۵$$

$$۲) |۲x + ۱| > ۳$$

$$۳) \frac{۱}{|۳x - ۱|} > ۲$$

$$۴) |۲x - ۳| < x$$

$$۵) |x + ۱| < \sqrt{۳x + ۱}$$

$$۶) |۲x + ۱| < |x + ۱|$$

www.my-dars.ir

تمرینات تکمیلی

۱- معادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

الف) $|\sin x| = |\cos x|$ ب) $\sqrt{(x-2)^2} = 2-x$

پ) $\sqrt{x-1} - \sin x = 0$ ت) $\sqrt{x} + 2x = x^2 - 2$

۲- جوابهای معادله $\frac{|2x|}{|x+1|} = 3$ را بدست آورید.

۳- اگر $x^2 \geq 2x$ باشد حاصل $A = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ کدام است.

۱) -2 ۲) 2 ۳) $2-2x$ ۴) $2x-2$

۴- اگر فاصله ی عدد حقیقی x روی محور اعداد حقیقی تا -1 ، کم تر از 2 باشد حاصل $A = |x+3| + |x-1|$ کدام است.

۱) 1 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 5

۵- مجموع جوابهای معادله $|x^2 + x| = |x^2 + 3x - 2|$ کدام است.

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۶- به ازای کدام مقدار k معادله $|x+2| - 2 = k^2 - 7$ دارای 3 جواب است.

۱) ± 1 ۲) ± 3 ۳) ± 5 ۴) ± 9

۷- مساحت ناحیه محدودیه نمودار های دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ کدام است.

۱) 2 ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) 3

