فصل اول حسابان (۱) (یازدهم)

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف: رحیم قهرمان

درسنامه‌ی (۱) مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ مجموع n جمله‌ی اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود.

$$a_1+a_2+\dots+a_n=S_n$$

اگر a_1 جمله‌ی اول، a_n جمله n ام و d قدر نسبت دنباله‌ی حسابی باشد، مجموع n جمله‌ی اول از رابطه‌های زیر حاصل می‌شود:

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n) \quad \text{یا} \quad S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

تست: اگر مجموع ۶ جمله‌ی نخست یک دنباله‌ی حسابی (S_6) برابر ۳۰ و مجموع ۸ جمله‌ی نخست آن (S_8) برابر ۷۲ باشد، جمله‌ی چهارم آن دنباله کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۷ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$$\begin{cases} S_6=\frac{6}{2}(2a_1+5d) \Rightarrow 30=3(2a_1+5d) \Rightarrow 2a_1+5d=10 \\ S_8=\frac{8}{2}(2a_1+7d) \Rightarrow 72=4(2a_1+7d) \Rightarrow 2a_1+7d=18 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله و دو مجهول}}$$

$$a_1=-5,\ d=4 \Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d \xrightarrow{n=4} a_4=a_1+3d=-5+3(4)=7$$

تست: مجموع چند جمله از دنباله‌ی حسابی $a, 2, 5a-2, \dots$ برابر ۵۵ است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱

$$\boxed{\text{یادآوری:}\quad a,b,c \xrightarrow[\text{حسابی}]{\text{دنباله}} 2b=a+c}$$

چون $a, 2, 5a-2$ تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند پس:

$$(a)+(5a-2)=2(2) \Rightarrow 6a-2=4 \Rightarrow a=1$$

حال جملات دنباله‌ی مذبور به صورت $1,2,3,\dots$ در می‌آید و در نتیجه:

$$S_n=55 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)=55 \Rightarrow \frac{n}{2}(2+(n-1))=55 \Rightarrow$$

$$n(n+1)=110 \Rightarrow n(n+1)=10\times 11 \Rightarrow n=10$$

تست: در یک دنباله‌ی حسابی ۲۰ جمله‌ای، اگر به جمله‌ی اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدر نسبت ۲ واحد کم کنیم، مجموع بیست جمله‌ی اول چه تغییری می‌کند؟

۱) ۳۲۰ واحد اضافه می‌شود　　۲) ۱۶۰ واحد کم می‌شود

۳) ۳۲۰ واحد کم می‌شود　　۴) ۱۶۰ واحد اضافه می‌شود

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$(\text{قدیم})\, S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) \Rightarrow (\text{قدیم})\, S_{20}=10(2a_1+19d)$

$\Rightarrow (\text{جدید})\, S_{20}=10(2(a_1+3)+19(d-2))=10(2a_1+19d+6-38)=$

$=\underbrace{10(2a_1+19d)}_{(\text{قدیم})\, S_{20}}-320 \Rightarrow (\text{جدید})\, S_{20} = (\text{قدیم})\, S_{20}-320$

نکات:

۱) اگر تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی فرد باشد، داریم:

$S_n=n\times(\text{جمله وسط})$ یا $S_{2n-1}=(2n-1)\times a_n$

تست: در یک دنباله‌ی حسابی دارای ۲۷ جمله است. اگر مجموع سه جمله‌ی وسط برابر ۱۵ باشد، مجموع جمله‌های این ۲۷ جمله چقدر است؟

۱) ۴۰۵　　۲) ۳۶۰　　۳) ۱۳۵　　۴) ۸۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳ $\Leftarrow$ مجموع سه جمله‌ی وسط $= 3x$ (جمله وسطی) $\Rightarrow 15 = 3x$ جمله وسط $\Rightarrow$

جمله وسط $= 5$

سه جمله‌ی وسط عبارتند از جملات a_{13} و a_{14} و a_{15} بنابراین:

$a_{13}+a_{14}+a_{15}=15 \Rightarrow (a_{13}+a_{15})+a_{14}=15 \Rightarrow 2a_{14}+a_{14}=15$

$\Rightarrow a_{14}=5$ و $S_{27}=\frac{27}{2}(a_1+a_{27})=\frac{27}{2}(2a_{14}) \xrightarrow{a_{14}=5} 135$

۲) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n=\alpha n^2+\beta n$ است. برای یافتن جمله عمومی دنباله حسابی از طریق S_n، کافی است S_1 و S_2 را بدست آوریم، داریم:

$$\begin{cases} S_1=a_1 \ (*) \\ S_2=a_1+a_2 \end{cases} \Rightarrow S_2-S_1=a_2 \xrightarrow{(*)} d=a_2-a_1=S_2-2S_1 \ (**)$$

با داشتن d و a_1، دنباله حسابی مشخص میشود.

تست:

۳) روش دیگر برای یافتن جمله عمومی از روی S_n، استفاده از رابطه $a_n=S_n-S_{n-1}$ است.

تست: مجموع n جمله اول از دنباله حسابی $S_n=\frac{n(2n-3)}{4}$ است. جمله دهم کدام است؟

۱) ۸٫۲۵ ۲) ۸٫۷۵ ۳) ۹٫۲۵ ۴) ۹٫۷۵

پاسخ: گزینه «۲» $a_n=S_n-S_{n-1}$، بنابراین:

$$a_{10}=S_{10}-S_9=\frac{10\times(2\times10-3)}{4}-\frac{9\times(2\times9-3)}{4}=\frac{170}{4}-\frac{135}{4}=8/75$$

تست: مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت $S_n=\frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات، با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم، کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

۱) ۹ ۲) $\frac{29}{3}$ ۳) $\frac{49}{3}$ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینه «۴» اگر جملات دنباله حسابی را با $a_1, a_2, \ldots$ نشان دهیم داریم:

$$a_7+a_8+\cdots+a_{17}+a_{18}=S_{18}-S_6=\frac{18(18-15)}{6}-\frac{6(6-15)}{6}=9+9=18$$

تست: بین دو عدد ۴ و ۶ حداقل چند واسطه حسابی باید درج کرد تا مجموع کلیه این اعداد دنباله بزرگتر از ۵۰ باشد؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲) فرض کنیم m واسطه‌ی بین ۴ و ۶ درج کرده‌ایم، پس از جمع دنباله‌ی تشکیل شده m+2 عضو خواهد داشت و باید جمع همه‌ی این اعضا بزرگتر از ۵۰ باشد، یعنی:

$$S_{m+2} > 50 \Rightarrow \frac{m+2}{2}(\underbrace{a_1}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{a_{m+2}}_{\text{جمله‌ی آخر}}) > 50 \Rightarrow \frac{m+2}{2}(4+6) > 50$$

$$\Rightarrow m+2>10 \Rightarrow m>8 \Rightarrow m\geq 9$$

یعنی باید حداقل ۹ عدد بین ۴ و ۶ اضافه شود.

تست: حداکثر چند جمله از جملات دنباله‌ی حسابی ... و $\frac{3}{2}$ و ۲ و $\frac{5}{2}$ و ۳ را با هم جمع کنیم تا حاصل عددی مثبت گردد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

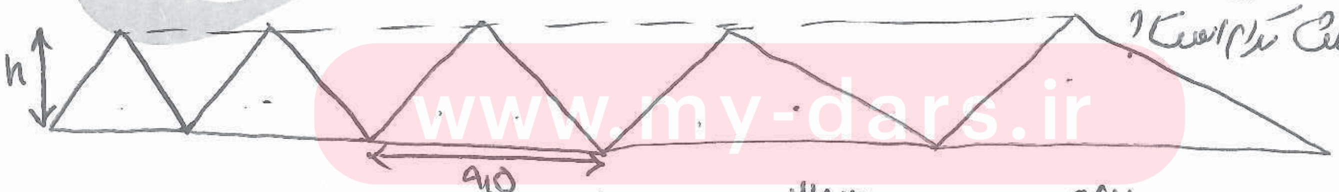
گزینه‌ی ۴) درواقع می‌خواهیم از دنباله‌ی فوق $S_n>0$ باشد، پس داریم:

$$S_n>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)>0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(3)+(n-1)(-\frac{1}{2}))>0 \xrightarrow{\times 2}$$

$$n(6-\frac{(n-1)}{2})>0 \xrightarrow{\times 2} n(12-n+1)>0 \Rightarrow n(13-n)>0 \Rightarrow 0<n<13$$

بنابراین حداکثر مقداری که n می‌تواند اختیار کند تا به ازای آن S_n عددی مثبت باشد برابر ۱۲ است.

تست: ۵ مثلث داریم که هم‌ارتفاع هستند و اندازه‌ی قاعده‌های آنها تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع مساحت‌های این مثلث‌ها برابر ۹۵ و اندازه قاعده‌ی مثلث میانی برابر ۹/۵ باشد، اندازه‌ی ارتفاع این مثلث کدام است؟



۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$\begin{cases} n=5 \\ S_5=95 \\ a_3=\frac{1}{2}(9.5)h \end{cases} \Rightarrow 95=\frac{5}{2}[2a_1+(5-1)(d)] \Rightarrow 95=\frac{5}{2}(2a_1+4d) \longrightarrow$$

$$a_1+2d \xrightarrow{a_3=a_1+2d} \frac{1}{2}(9.5)h=19 \Rightarrow h=4$$

درسنامه (۲) مجموع جملات دنباله هندسی

در دنباله هندسی $\{a_n\}$، مجموع n جمله اول را با S_n نمایش می دهند و تعریف می شود:

$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$

اگر a_1 جمله اول و a_{n+1} جمله (n+1)ام و q قدرنسبت دنباله هندسی باشند $(q\neq 1)$ مجموع n جمله اول از رابطه های زیر به دست می آید:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

تست: حاصل مجموع $1+x+x^2+\cdots+x^{13}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $128+64\sqrt{2}$ ۲) $127+64\sqrt{2}$ ۳) $128+63\sqrt{2}$ ۴) $127+63\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه (۴)

$1+x+x^2+\cdots+x^{13}=$ (مجموع ۱۴ جمله از یک دنباله هندسی با $q=x, a_1=1$) $=\frac{1\times(1-x^{14})}{1-x}$

$$=\frac{1-x^{14}}{1-x}\xlongequal{x=\sqrt{2}}\frac{1-(\sqrt{2})^{14}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1-64\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{1+\sqrt{2}-64\sqrt{2}-128}{-1}$$

$$=127+63\sqrt{2}$$

تست: دنباله هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \ldots$ غیر نزولی است، مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

۱) $\frac{61}{32}$ ۲) $\frac{21}{16}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{23}{16}$

پاسخ: گزینه (۲) در دنباله هندسی فوق $a_3=\frac{1}{2}$ و $a_1=2$ بنابراین:

$$\frac{a_3}{a_1}=q^2\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{2}=q^2\Rightarrow q=\pm\frac{1}{2}$$

به ازای $q=\frac{1}{2}$ دنباله نزولی و به ازای $q=-\frac{1}{2}$ نه نزولی و نه صعودی خواهد بود (زیرا علامت جمله ها مثبت و منفی می شود) پس بر اساس مفروضات این تست باید $q=-\frac{1}{2}$ را انتخاب کنیم:

$$S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{2(1-(-\frac{1}{2})^6)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2(1-\frac{1}{64})}{\frac{3}{2}} = \frac{21}{16}$$

تست: در یک دنباله‌ی هندسی مجموع هشت جمله‌ی اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله‌ی اول آن است. جمله‌ی هفتم چند برابر جمله‌ی اول است؟

۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲)

$$S_8 = \frac{5}{4}S_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4}\left(\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}\right) \Rightarrow$$

$$1-q^8 = \frac{5}{4}(1-q^4) \Rightarrow (1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4) \xrightarrow{q^4\neq 1}$$

$$1+q^4 = \frac{5}{4} \Rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{2}$$

درنتیجه:

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = (q^2)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

دقت داشته باشید که اگر $q^4=1$ آن‌گاه قدر مطلق همه جملات با هم برابر شده و درنتیجه $\frac{a_7}{a_1}=1$ که در گزینه‌ها موجود نیست.

تست: حداقل چند جمله از دنباله‌ی هندسی ... ,۲ ,۱ ,$\frac{1}{2}$ را با شروع از جمله‌ی اول، جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۹۰۰ شود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با ایجاد نامعادله‌ی $S_n>900$ کم‌ترین مقدار n را می‌یابیم.

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right) > 900 \Rightarrow 2^n-1 > 1800 \Rightarrow 2^n > 1801 \Rightarrow n > 10$$

$\Rightarrow$ کم‌ترین مقدار n برابر ۱۱ است.

تست: تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی، عددی زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۴)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ی ۴) فرض کنیم دنباله ی هندسی، $2n$ جمله داشته باشد، بنابه فرض داریم:

$$a_1+a_2+\dots+a_{2n}=3(a_1+a_3+\dots+a_{2n-1})$$

جملات با ردیف فرد، یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت q^2 می دهند. بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=3\times\frac{a_1(1-(q^2)^n)}{1-q^2}\Rightarrow\frac{1}{1-q}=\frac{3}{(1-q)(1+q)}$$

$$\Rightarrow 1=\frac{3}{1+q}\Rightarrow q=2$$

تست: در یک دنباله ی هندسی، مجموع ۶ جمله ی اول، ۵۷ برابر مجموع دو جمله ی اول است. مجموع چهار جمله ی اول این دنباله چند برابر مجموع دو جمله ی اول آن است؟

۱) ۵۰ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینه ی ۳) جمله ی اول را a_1 و قدر نسبت را q می گیریم. طبق فرض $\frac{S_6}{S_2}=57$ بنابراین:

$$\frac{1-q^6}{1-q^2}=57\Rightarrow\frac{(1-q^2)(1+q^2+q^4)}{1-q^2}=57\Rightarrow q^4+q^2-56=0\Rightarrow$$

$$(q^2+8)(q^2-7)=0$$

پس $q^2=7$ حال با نوشتن فرمول های S_4 و S_2 نتیجه می گیریم.

$$\frac{S_4}{S_2}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=8$$

تست: برای محافظت در تابش های مضر مواد رادیواکتیو، لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش دست کم ۹۹ درصد کاهش یابد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

مولف:رحیم قهرمان

پاسخ: گزینه «۳» اولین لایه، مواد مضر را نصف می‌کند، دومین لایه نیز نیمی باقی‌مانده، یعنی نیمی از مواد مضر، نصف $\frac{1}{2}$ مواد مضر را برطرف می‌کند و... دنباله‌ی این اعداد به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ است. بدیهی است که این اعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $q=\frac{1}{2}$ و جمله‌ی اول $a_1=\frac{1}{2}$ است. بنابر فرض باید داشته باشیم:

$$S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2^n} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \geq 7$$

پس تعداد لایه‌ها باید حداقل هفت باشد.

نکته: برای یافتن جمله‌ی عمومی از روی S_n می‌توان از رابطه‌ی $a_n=S_n-S_{n-1}$ استفاده کرد.

همچنین داریم $a_1=S_1$ و $a_2=S_2-S_1$ در نتیجه

$$q=\frac{S_2-S_1}{S_1}$$

تست: اگر مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی به صورت $S_n=3(1-2^{-n})$ باشد، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه «۱»

$$S_n=3(1-2^{-n}) \Rightarrow \begin{cases} S_2=a_1+a_2 \xrightarrow{n=2} \frac{9}{4} \\ S_1=a_1 \xrightarrow{n=1} \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a_1+a_2=\frac{9}{4} \xrightarrow{a_1=\frac{3}{2}}$$

$$a_2=\frac{3}{4} \Rightarrow q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$$

درسنامه‌ی (۳) سه اتحاد مهم

۱) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$، آن‌گاه:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

۲) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ عددی فرد باشد، آنگاه:

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

۳) اگر $x,y\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}$ عددی زوج باشد، آنگاه:

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

حالات خاص

۱) اگر n عدد طبیعی باشد داریم:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$$

۲) اگر n عددی فرد باشد داریم:

$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+1)$$

مثال: به کمک اتحادهای ذکر شده حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $$\frac{(x^2-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{x^{20}-1}$$

ب) $$\frac{(x^5+1)(x^2-x+1)}{x^3+1}$$

پاسخ:

الف) $$\frac{((x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1))((x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1))}{x^{20}-1}=\frac{(x^5-1)(x^5+1)}{x^{20}-1}$$

$$=\frac{x^{10}-1}{(x^{10}-1)(x^{10}+1)}=\frac{1}{x^{10}+1}$$

ب) $\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$

تست: حاصل $A=(x^{21}-1)(1+x^{-1}+x^{-2}+\cdots+x^{-20})^{-1}$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $512(\sqrt{2}-1)$ ۲) $1024(\sqrt{2}+1)$ ۳) $512(\sqrt{2}+1)$ ۴) $1024(\sqrt{2}-1)$

پاسخ: گزینه ۴

$$A=(x^{21}-1)\left(1+\frac{1}{x^1}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^{20}}\right)^{-1}=(x^{21}-1)\left(\frac{x^{20}+x^{19}+\cdots+x+1}{x^{20}}\right)^{-1}$$

$$=(x^{21}-1)\left(\frac{x^{20}}{x^{20}+x^{19}+\cdots+1}\right)=(x-1)(x^{20}+x^{19}+\cdots+1)\times\frac{x^{20}}{x^{20}+x^{19}+\cdots+1}$$

$$=x^{20}(x-1)\implies A=x^{20}(x-1)$$

حال حاصل به دست آمده را به ازای $x=\sqrt{2}$ بدست می‌آوریم:

$$A(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^{20}(\sqrt{2}-1)=1024(\sqrt{2}-1)$$

(درسنامه‌ی شماره‌ی ۴)

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور** معادله‌ی درجه‌ی دوم

مولف: رحیم قهرمان

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم: $P=x_1x_2=\frac{c}{a}$ و $S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

تذکر: حالات دیگر را می‌توان با رابطه‌ای آنها بین S و P تبدیل کرد، به عنوان مثال داریم:

1) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$ 2) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$ 3) $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$

4) $|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$ 5) $\begin{cases}x_1>0\\x_2>0\end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}}+\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}=\frac{S}{\sqrt{P}}$

6) $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4P}$

تست: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-12x+1=0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

(سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

پاسخ: گزینه‌ی ۳

$4x^2-12x+1=0 \Rightarrow S=3,\ P=\frac{1}{4}$ (*)

$$A=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+2\sqrt{P}}}{\sqrt{P}}\overset{(*)}{=}\frac{\sqrt{3+2\times\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4$$

تست: به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می‌باشد؟

(سراسری تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ ۴) -1 و $\frac{9}{5}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=6 \xrightarrow[P=\frac{5}{m}]{S=\frac{m+3}{m}} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2-\frac{10}{m}=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

$$\xRightarrow{\times m^2} 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases}m=1\\m=-\frac{9}{5}\end{cases}$$

از مقادیر به دست آمده برای m باید ببینیم کدام یک دلتای معادله‌ی اصلی را منفی می‌کند:

$$\begin{cases}m=1 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=16-20<0 \quad \text{غ ق ق}\\ m=-\frac{9}{5} \Rightarrow \Delta>0 \quad \text{ق ق}\end{cases}$$

تست: عدد $2\sqrt{3}$ واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-mx=1-m$ است، m کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ی ۴

یادآوری: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، واسطه ی هندسی بین آنها مساوی $\sqrt{ab}$ است

اگر $2\sqrt{3}$ واسطه ی هندسی x_1 و x_2 باشد آنگاه:

$$\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{3} \Rightarrow x_1x_2=12 \xrightarrow{x_1x_2=\frac{c}{a}} \frac{m-1}{2}=12 \Rightarrow m=25$$

تست: هرگاه یکی از ریشه های معادله ی $ax^2+bx+a=0$ سه برابر ریشه ی دیگر باشد، مقدار $\frac{a^2}{b^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{3}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{16}$

پاسخ: گزینه ی ۴) نگاهی دقیق به معادله واضح می سازد که حاصلضرب ریشه های مساوی (۱) است ($x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{a}{a}=1 \Rightarrow x_1x_2=1$) این مطلب کمک زیادی به ما خواهد کرد:

$$\begin{cases} x_1x_2=1 \\ x_1=3x_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_2}=3x_2 \Rightarrow x_2^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x_1^2=3$$

در نتیجه:

$$x_1^2+x_2^2=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3} \Rightarrow S^2-2P=\frac{10}{3} \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2=\frac{10}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=\frac{16}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{16}$$

تست: اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ ریشه های معادله ی $x^2+bx+c=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}$ کدام است؟

۱) $\frac{3c^2-1}{c^3}$ ۲) $\frac{c^2+2}{c^3}$ ۳) $\frac{1-2c^2}{c^3}$ ۴) $\frac{2c^2-1}{c^3}$

پاسخ: گزینه ی ۳)

نکته: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$$\frac{x_1}{x_2^3}+\frac{x_2}{x_1^3}=\frac{x_1^4+x_2^4}{x_1^3x_2^3}$$

حال با جایگذاری مقدار $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ در رابطه ی به دست آمده داریم:

$$\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^3}=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}$$

$$=\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}$$

کافی است برای محاسبه ی رابطه ی اخیر حاصل ضرب ریشه های معادله درجه دوم یعنی $\sin\alpha\cos\alpha$ که همان مقدار c است را در آن جایگزین کنیم، بنابراین:

$$\frac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^3}=\frac{1-2c^2}{c^3}$$

ویژگی معادله های درجه ی دوم $ax^2+bx+c=0$ (در حالت $\Delta>0$)

۱) اگر $c=0 \iff$ معادله یک ریشه برابر صفر دارد. $\iff \begin{cases}x_1=0\\ x_2=-\frac{b}{a}\end{cases}$

۲) اگر $b=0 \iff$ معادله دو ریشه قرینه دارد.

۳) اگر $a=0$, $b\neq 0 \iff x=-\frac{c}{b}$

۴) اگر $a=c \iff$ دو ریشه معادله عکس یکدیگرند

۵) اگر $a=-c \iff$ دو ریشه معادله قرینه عکس یکدیگرند.

۶) اگر $a+b+c=0 \iff \begin{cases}x_1=1\\ x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$

۷) اگر $a+c=b \iff \begin{cases}x_1=-1\\ x_2=-\frac{c}{a}\end{cases}$

تست: به ازای کدام مقدار m ریشه های حقیقی $mx^2+3x+m^2=3$ معکوس یکدیگرند؟

(سراسری تجربی خارج ۹۰)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

پاسخ: گزینه ی ۲) معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین:

$$mx^2+3x+m^2-2=0 \xrightarrow{\Delta>0} 9-4m(m^2-2)>0 \quad (*)$$

به علاوه در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس داریم:

$$mx^2+3x+m^2-2=0 \Rightarrow \qquad P=\frac{m^2-2}{m}$$

چون ریشه‌های معادله معکوس یکدیگرند، بنابراین $a=c$ یعنی

$$m^2-2=m \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow (m+1)(m-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=2 \end{cases}$$

حال هر یک از مقادیر بدست آمده را در رابطه ی (*) قرار می‌دهیم داریم:

$$\begin{cases} m=-1 \xrightarrow{(*)} 9-4(-1)(1-2)>0 \Rightarrow 5>0 \Leftarrow \text{قابل قبول} \\ m=2 \xrightarrow{(*)} 9-4\times 2(4-2)>0 \Rightarrow -7<0 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m=-1$ ریشه‌های معادله مثبت و معادله دارای دو ریشه است.

نکاتی درباره جواب‌های یک معادله ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$

۱) اگر $\Delta>0 \Leftrightarrow$ معادله دو ریشه ی متمایز دارد.

الف) $\frac{c}{a}<0 \Rightarrow$ دو ریشه مختلف العلامت دارد $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}<0 \text{ و } |x_1|>|x_2| \\ -\frac{b}{a}=0 \text{ و دو ریشه قرینه یکدیگرند} \\ -\frac{b}{a}>0 \quad |x_2|>|x_1| \end{cases}$

ب) $\frac{c}{a}=0 \Rightarrow$ یک ریشه صفر و دیگری $-\frac{b}{a}$ است.

ج) $\frac{c}{a}>0 \Rightarrow$ دو ریشه هم علامت اند $\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}<0 \quad \text{هر دو ریشه منفی اند} \\ -\frac{b}{a}=0 \quad \text{غیر ممکن است} \\ -\frac{b}{a}>0 \quad \text{هر دو مثبت اند} \end{cases}$

۲) اگر $\Delta=0 \Rightarrow$ معادله دارای ریشه مضاعف است.

$$\Rightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a}>0 \Rightarrow x_1=x_2>0 \\ -\frac{b}{a}<0 \Rightarrow x_1=x_2<0 \end{cases}$$

معادله ریشه ی حقیقی ندارد $\Leftarrow$ ۳) اگر $\Delta < 0$

تست: حدود m برای آن که معادله $(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0$ دو ریشه مختلف العلامه داشته باشد، کدام است؟

۱) $m > 2$ ۲) $1 < m < 3$ ۳) $m < 1$ ۴) $0 < m < 1$

پاسخ: گزینه (۲) می دانیم معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه مختلف العلامه است، هرگاه $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$(m-1)x^2 + mx + m - 3 = 0 \Rightarrow \frac{m-3}{m-1} < 0 \Rightarrow 1 < m < 3$$

تست: به ازای چه مقدار m، معادله ی $2x^2 + (m^2-16)x + m + 3 = 0$ دارای دو ریشه قرینه است؟

۱) -4 ۲) ± 4 ۳) -3 ۴) ± 3

پاسخ: گزینه (۱) می دانیم معادله $ax^2 + bx + c = 0$، شرط $b = 0$ و $\frac{c}{a} < 0$ دو ریشه ی قرینه هم دارد. پس داریم:

$$\begin{cases} m^2 - 16 = 0 \\ \frac{m+3}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \text{ یا } m = 4 \\ m < -3 \end{cases} \Rightarrow m = -4$$

تست: کدام یک از معادلات زیر، دو جواب مختلف العلامه دارد که جواب منفی از نظر قدر مطلق از جواب مثبت بزرگتر است؟

۱) $8x^2 - 4x - 3 = 0$ ۲) $-x^2 - 8x + 7 = 0$

۳) $-x^2 - 9x - 1 = 0$ ۴) $-x^2 + 7x + 8 = 0$

گزینه (۲) چون که این معادله دارای دو جواب مختلف العلامت است، لذا باید $\frac{c}{a} < 0$ باشد، از طرفی اگر جواب منفی از لحاظ قدر مطلق از جواب مثبت بزرگتر است، پس مجموع دو ریشه عددی منفی است یعنی $\frac{b}{a} > 0$ است. بنابراین باید $\frac{c}{a} < 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ باشد که تنها معادله گزینه ی (۲) دارای این شرایط است.

درسنامه ی (۵) تشکیل معادله درجه دوم

۱) معادله ی درجه ی دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی x_1 و x_2 باشند و داشته باشیم $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ آن گاه معادله ی درجه دوم آن به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$x^2-Sx+P=0$$

تست: معادله ی درجه ی دومی که ریشه‌هایش $\frac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+1}$ و $\frac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3-1}$ باشند، کدام است؟

۱) $x^2-(3+\sqrt2)x+\frac12=0$

۲) $x^2+(3+\sqrt2)x+\frac12=0$

۳) $x^2-(3-\sqrt2)x+\frac12=0$

۴) $x^2-(3+\sqrt2)x+1=0$

پاسخ: گزینه ی ۱ ابتدا S و P را می‌یابیم:

$$\begin{cases} S=\frac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+1}+\frac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3-1}=\frac{(\sqrt3-\sqrt2)(\sqrt3-1)+(\sqrt3+\sqrt2)(\sqrt3+1)}{(\sqrt3+1)(\sqrt3-1)}=3+\sqrt2 \\ P=\frac{\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt3+1}\times\frac{\sqrt3+\sqrt2}{\sqrt3-1}=\frac12 \end{cases}$$

حال با داشتن $S=3+\sqrt2$ و $P=\frac12$ معادله ی درجه دوم را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-(3+\sqrt2)x+\frac12=0$$

۲) اگر عدد اصم $\alpha+\sqrt\beta$ ریشه ی معادله ی درجه ی دومی با ضرایب گویا باشد، در این صورت ریشه ی دیگر، $\alpha-\sqrt\beta$ خواهد بود.

تست: عدد $\sqrt{7-4\sqrt3}$ ریشه ی کدام یک از معادلات زیر است؟

۱) $x^2-4x+1=0$ ۲) $x^2+3x-1=0$ ۳) $x^2-2x-1=0$ ۴) $x^2-7x+4=0$

پاسخ: گزینه ی ۱

$$x_1=\sqrt{7-4\sqrt3}=\sqrt{(2-\sqrt3)^2}=|2-\sqrt3|=2-\sqrt3$$

$$\Rightarrow x_1=2-\sqrt3 \Rightarrow x_2=2+\sqrt3 \Rightarrow \begin{cases}x_1+x_2=4\\ x_1x_2=1\end{cases} \Rightarrow x^2-4x+1=0$$

۳) برای یافتن معادله درجه دومی جدیدی که ریشه های آن رابطه ای با ریشه های معادله ی قبلی داشته باشد، S' و P' را برای معادله ی جدید به دست آورده و آن گاه معادله ی $x^2 - S'x + P' = 0$ را تشکیل می دهیم.

تست: اگر α و β ریشه های معادله ی $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه جواب های کدام معادله به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1, \frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟

(سراسری ریاضی ۹۲)

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2 \end{cases}$$

ریشه های معادله مورد نظر عبارتند از: $\alpha' = \frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta' = \frac{1}{\beta}+1$، پس:

$$\begin{cases} S' = \alpha'+\beta' = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2 = \frac{5}{4} \\ P' = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1 = -\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+1 = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - S'x + P' = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2-5x-1=0$$

تست: ریشه های کدام معادله، از معکوس ریشه های معادله درجه دوم $2x^2-3x-1=0$، یک واحد کمتر است؟

(سراسری تجربی ۹۴)

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

پاسخ: گزینه ی ۴) اگر ریشه های این معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \\ \alpha+\beta = -\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

مولف:رحیم قهرمان

معادله‌ای که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله اولیه یک واحد کم‌تر است، بصورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\frac{1}{\alpha}-1\ ,\ \frac{1}{\beta}-1\right\}$$

$$S'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=-5$$

$$P'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+1 \Rightarrow$$

$$P'=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(-3)+1=2$$

با توجه به رابطه‌ی $x^2-S'x+P'=0$ و تشکیل معادله‌ی مورد نظر را بدست آوریم.

$$\begin{cases} S'=-5 \\ P'=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+5x+2=0$$

معادله دو مجذوری (که به روش تغییر متغیر قابل حل می‌باشند)

در برخی از معادلات می‌توان با در نظر گرفتن یک متغیر جدید، آن معادله را به یکی از معادلاتی که می‌شناسیم، تبدیل کرد. در این حالت بعد از حل معادله‌ی حاصل، جواب‌ها را در عبارت تغییر متغیر قرار داده و مقادیر مجهول اصلی معادله‌ی اولیه را بدست آوریم.

تست: مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه‌ی ۲ معادله را از روش تغییر متغیر حل می‌کنیم، داریم:

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0 \xrightarrow{x^2+x=t} t^2-18t+72=0 \Rightarrow (t-6)(t-12)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^2+x=12 \Rightarrow x^2+x-12=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_1+x_2=-1 \\ t=x^2+x=6 \Rightarrow x^2+x-6=0 \xrightarrow{\text{۲ ریشه حقیقی دارد}} x_3+x_4=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

مولف: رحیم قهرمان

درسنامه‌ی (۴) نمودار تابع درجه‌ی دوم (سهمی)

۱) اگر $a>0$ باشد، دهانه‌ی سهمی به سمت بالا و به صورت $\cup$ است (تابع مینیمم دارد.)

۲) اگر $a<0$ باشد، دهانه سهمی به سمت پایین و به صورت $\cap$ است، (تابع ماکزیمم دارد.)

۳) مختصات راس سهمی از فرمول $S\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ به دست می‌آید که به آن نقطه‌ی مینیمم (هرگاه $a>0$) یا نقطه‌ی ماکزیمم (هرگاه $a<0$) نیز می‌گویند و خط $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

تست: اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ (سراسری تجربی ۸۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

گزینه‌ی ۴) $x=2$ محور تقارن تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ می‌باشد لذا:

$$\text{محور تقارن}: x=\frac{-1}{2(a-1)} \xrightarrow{x=2 \text{ محور تقارن}} \frac{-1}{2(a-1)}=2 \Rightarrow a=\frac{3}{4}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع به شکل $y=-\frac{1}{4}x^2+x+3$ در می‌آید و محل تقاطعش با جهت مثبت محور xها عبارت است از:

$$y=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x^2+x+3=0 \Rightarrow x^2-4x-12=0 \Rightarrow (x+2)(x-6)=0 \xrightarrow{x>0} x=6$$

تست: نقطه‌ی مینیمم تابع $y=x^2+ax+2$ روی نیمساز قرار دارد. a کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

پاسخ: گزینه‌ی ۴

$$y=x^2+ax+2 \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{-(a^2-4(2)(1))}{4}\right) \Rightarrow S\left(-\frac{a}{2}, \frac{8-a^2}{4}\right)$$

که روی نیمساز ربع اول و سوم یعنی روی خط $y=x$ قرار دارد، بنابراین:

$$y_S=x_S \Rightarrow \frac{8-a^2}{4}=-\frac{a}{2} \Rightarrow 2a^2-4a-16=0 \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow$$

$$(a+2)(a-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a=4 \end{cases}$$

اما چون نقطه‌ی مینیمم S روی نیمساز ربع سوم قرار دارد، لذا $x_S<0$ ، یعنی:

$-\frac{a}{2}<0 \Rightarrow a>0$

بنابراین فقط $a=4$ قابل قبول است.

۴) هر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ را می‌توان به صورت $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ نیز نوشت که در آن $S(\alpha,\beta)$ راس سهمی است.

تست: نقاط $A(1,3)$ و $B(-3,3)$ روی منحنی تابع $y=a(x-b)^2+c$ قرار دارند، هرگاه:

۱) $b=-1$ ۲) $b=1$

۳) $b=0$ ۴) $b=-2$

(مشابه سراسری تجربی خارج از کشور ۸۹)

پاسخ: گزینه‌ی ۱) نقاط A و B روی منحنی تابع y قرار دارند، پس مختصات آن‌ها در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند:

$A(1,3) \xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(1-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(1-b)^2 \quad (I)$

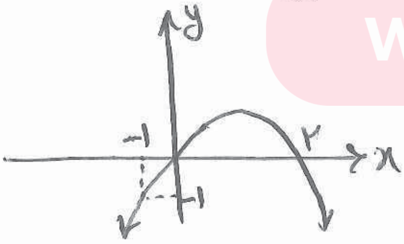
$B(-3,3) \xrightarrow{y=a(x-b)^2+c} 3=a(-3-b)^2+c \Rightarrow 3-c=a(-3-b)^2 \quad (II)$

$(I,II) \Rightarrow a(1-b)^2=a(-3-b)^2 \xrightarrow{a\neq 0} (1-b)^2=(-3-b)^2 \Rightarrow |1-b|=|-3-b|$

$\xrightarrow{|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y} \begin{cases} 1-b=-3-b \Rightarrow 1=-3 \ \times \\ 1-b=3+b \Rightarrow 2b=-2 \rightarrow b=-1 \end{cases}$

۵) اگر تابع درجه‌ی دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را در نقاطی به طول‌های x_1 و x_2 قطع کند، آن‌گاه معادله‌ی آن را به صورت $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ نیز می‌توان نوشت.

تست: نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، مانند شکل مقابل است. حاصل $a+3b-c$ کدام است؟



۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$

۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲) با توجه به شکل $x=0$ و $x=2$ دو ریشه‌ی تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ است، بنابراین

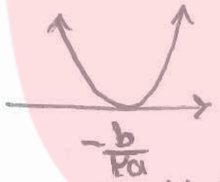
معادله‌ی آن را می‌توان به صورت $f(x)=a(x)(x-2)$ در نظر گرفت. داریم:

$$f(x)=a(x)(x-2) \xrightarrow{f(-1)=-1} -1=a(-1)(-1-2) \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=-\frac{1}{3}(x)(x-2)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+0 \Rightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b=\frac{2}{3}\\ c=0\end{cases} \Rightarrow a+3b-c=\frac{5}{3}$$

۶) اگر تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ محور xها را فقط در یک نقطه مانند x_1 قطع کند، آنگاه معادله‌اش را به صورت $y=a(x-x_1)^2$ نیز می‌توان نوشت.

۷) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases}\Delta=0\\ a>0\end{cases}$ سهمی بالای محور xها و بر آن مماس است.



تست: به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور xها و مماس بر آن است؟

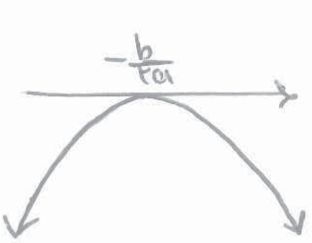
۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری ریاضی ۸۲)

پاسخ: گزینه‌ی ۳. تابع بالای محور xهاست، پس رو به بالاست و در نتیجه $a>0$ است. از طرفی بر محور xها مماس است، پس معادله‌ی $y=0$ دارای ریشه‌ی مضاعف است و در نتیجه $\Delta=0$.

$$\begin{cases}\Delta=0 \Rightarrow 9-4(m-2)(m+2)=0 \Rightarrow 9-4(m^2-4)=0\\ a>0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2\end{cases}$$

$$9-4(m^2-4)=0 \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \xrightarrow{m>2} m=\frac{5}{2}$$

۸) در سهمی $y=ax^2+bx+c$ اگر $\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases}$ سهمی پایین محور xها و بر آن مماس است.



تست: به ازای کدام مقدار m نمودار سهمی $f(x)=(2m-1)x^2-2mx+2m-1$ پایین محور xها بر آن مماس باشد؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{9}$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$\begin{cases}\Delta=0\\ a<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4m^2-4(2m-1)^2=0 \Rightarrow m^2-(2m-1)^2=0\\ 2m-1<0 \Rightarrow m<\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(m+2m-1)(m-2m+1)=0\\ m<\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m=\frac{1}{3} \text{ یا } m=1\\ m<\frac{1}{2}\end{cases}$$

با توجه به اینکه $m<\frac{1}{2}$، $m=1$ غیرقابل قبول است، پس $m=\frac{1}{3}$ جواب است.

۹) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره بالای محور xها است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۵)

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

پاسخ: گزینه ی ۴) نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xها است اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}a>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2 \quad (*)\\ \Delta<0 \Rightarrow m^2-m-2<0 \Rightarrow (m+1)(m-2)<0 \Rightarrow -1<m<2 \quad (**)\end{cases}$$

$$(*) \cap (**) \Rightarrow -1<m<2$$

۱۰) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای ax^2+bx+c همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد.

تست: به ازای کدام مقادیر m، نمودار $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره در زیر محور xها است؟
(سراسری ریاضی داخل ۸۵)

۱) $m<-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}<m<1$ ۳) $1<m<\frac{3}{2}$ ۴) $m>\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) می‌دانیم نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow 3-4m(m-1)<0 \Rightarrow -4m^2+4m+3<0 \Rightarrow 4m^2-4m-3>0 \Rightarrow \end{cases}$$

$(2m+1)(2m-3)>0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$ یا $m>\frac{3}{2}$ $(**)$

$(*)\cap(**) \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$

۱۱) نمودار تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات عبور می‌کند هرگاه $\frac{c}{a}<0$ باشد، یعنی دارای دو ریشه مختلف العلامت باشد.

تست: با کدام مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیه‌ی محورهای مختصات می‌گذرد؟
(سراسری ریاضی داخل ۸۷)

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-3<m<-2$

پاسخ: گزینه‌ی (۱) تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ از هر چهار ناحیه عبور می‌کند، هرگاه دارای دو ریشه مختلف العلامت باشد، به عبارت دیگر $\frac{c}{a}<0$ شود:

$\frac{c}{a}<0 \Rightarrow \frac{1}{m+2}<0 \Rightarrow m<-2$

۱۲) صفرهای تابع درجه دوم: نقاط برخورد نمودار یک تابع با محور xها، نقاطی هستند که آنها را صفرهای تابع می‌نامیم، چرا که در این نقاط مقدار تابع صفر می‌شود.

تست: اگر $x=m$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^2-(3m+1)x+3$ باشد، صفر دیگر آن کدام است؟ $(m\in N)$

۱) $2m+1$ ۲) $2m$ ۳) $2m-1$ ۴) $-m$

پاسخ: گزینه‌ی (۱)

$$f(x)=x^2-(3m-1)x+3 \Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}=3m+1 \quad (*)$$

یکی از صفرهای تابع $x_1=m$ است. در نتیجه:

$$(*) \Rightarrow m+x_2=3m+1 \Rightarrow x_2=2m+1$$

درسنامه‌ی (۷) روش یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم

در سهمی با ضابطه‌ی $y=ax^2+bx+c$، نقطه‌ی $S(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$ نقطه‌ی اکسترمم یا همان رأس سهمی است. بنابراین داریم:

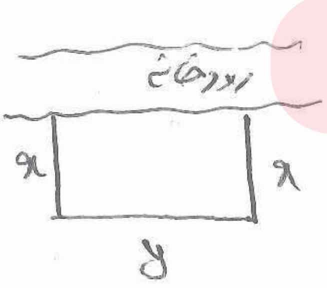
۱) اگر $a>0$، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار مینیمم تابع است.

۲) اگر $a<0$، $y=\frac{-\Delta}{4a}$ مقدار ماکزیمم تابع است.

تست: بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

پاسخ: گزینه‌ی (۲) با توجه به شکل و فرض مسئله $2x+y=88$ است، پس $y=88-2x$: تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=xy \Rightarrow S(x)=x(88-2x)=88x-2x^2$$

$$S_{max}=\frac{-\Delta}{4a}=-\frac{(88^2-4(-2)(0))}{4(-2)}=968$$

درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

درسنامه‌ی (۸) معادلات شامل عبارات گویا

معادله‌هایی که در آن‌ها عبارات گویا وجود داشته باشند، معادله‌هایی شامل عبارت‌های گویا می‌نامند.

برای حل این گونه معادلات باید مراحل زیر را انجام دهیم.

۱) دامنه‌ی معادله را به دست می‌آوریم.

۲) همه عبارات جبری را به یک طرف معادله انتقال می‌دهیم. و ساده‌ترین کنیم

۳) ک م م مخرج‌ها را به دست می‌آوریم و معادله را در ک م م مخرج‌ها ضرب و جواب‌ها را به دست می‌آوریم (مخرج ریشه‌ی مخرج نباشد)

۴) جواب‌هایی قابل قبول هستند که در دامنه‌ی جواب معادله قرار داشته باشند.

تست: در معادله‌ی $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3$ حاصل ضرب ریشه‌ها کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۵)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3 \Leftarrow$ ک م م مخرج‌ها $=(x-2)x$

$\left(\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x}=3\right)\times x(x-2) \Rightarrow x^2+x-2=3(x-2)x \Rightarrow 2x^2-7x+2=0$

معادله‌ی $2x^2-7x+2=0$ دارای دو ریشه متمایز است چون ریشه‌های $x=0$ یا $x=2$ ریشه‌های معادله نیستند (صفر کننده‌های مخرج کسرها) بنابراین هر دو ریشه قابل قبول می‌باشند. با توجه به اینکه $\frac{c}{a}=\frac{2}{2}=1$ لذا حاصل ضرب ریشه‌ها برابر با ۱ است.

درسنامه‌ی (۹) معادلات رادیکالی

برای حل یک معادله شامل رادیکال مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱) رادیکال را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و بقیه جملات را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم.

۲) طرفین معادله را به توان عدد فرجه‌ی رادیکال می‌رسانیم.

۳) معادله را ساده می‌کنیم حال اگر رادیکال باقی مانده باشد بار دوباره آن را در یک طرف تنها نگه می‌داریم و طرفین معادله را به توان عدد فرجه می‌رسانیم و نتیجه را ساده و حل می‌کنیم.

۴) تمام جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم. و جواب‌های نابجا را کنار می‌گذاریم.

تست: مجموع جواب‌های معادله رادیکالی $\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+1}=1 \Rightarrow \sqrt{3x+4}=1+\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان دو}}$$

$$3x+4=1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \Rightarrow x+2=2\sqrt{2x+1} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$x^2+4x+4=8x+4 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0 \ \text{یا}\ x=4$$

هر دو جواب به دست آمده در معادله اصلی صدق می‌کنند، بنابراین قابل قبول می‌باشند. پس مجموع دو جواب به دست آمده برابر ۴ است.

تست: معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ به ازای چند مقدار a، دارای جواب است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲) می‌دانیم مجموع دو عدد نامنفی همواره نامنفی است. مجموع چند عبارت نامنفی زمانی می‌تواند صفر باشد که تمام عبارات هم‌زمان صفر شوند. $\sqrt{x^2-3x+2}$ همواره نامنفی است و به ازای $x=1$ و $x=2$ صفر می‌شود. اگر عبارت همواره نامنفی $\sqrt{x^2+a}$ نیز به ازای $x=1$ یا $x=2$ صفر شود، در این صورت معادله $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+a}=0$ جواب خواهد داشت:

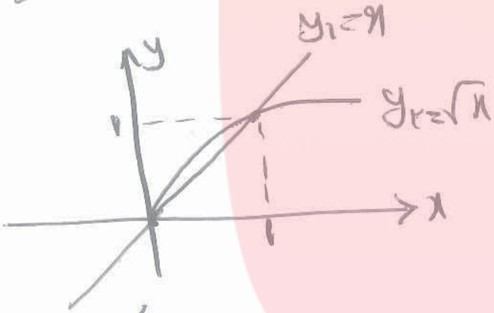
الف) اگر $x=1$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد، آنگاه $1^2+a=0$، در نتیجه $a=-1$ است.

ب) اگر $x=2$ جواب معادله $\sqrt{x^2+a}$ باشد، آنگاه $2^2+a=0$، در نتیجه $a=-4$ است.

به ازای $a=-1$ یا $a=-4$، معادله داده شده دارای جواب است.

درسنامه‌ی (۱۰) حل معادلات به روش هندسی

گاهی اوقات بعضی از معادلات به روش جبری قابل حل نیستند و یا حل جبری بسیار وقت‌گیر می‌باشد. اکنون می‌خواهیم روش هندسی حل معادلات را مورد بررسی قرار دهیم. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تعداد جواب‌های معادله‌ی $x=\sqrt{x}$ را به روش هندسی به دست آوریم. بدین منظور در یک دستگاه مختصات نمودار دو تابع $y_1=x$ و $y_2=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم.



همان طور که می‌بینید، نمودار این دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. این معادله‌ی $x=\sqrt{x}$ دو جواب دارد.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی نمودارهای توابع f و g جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس یعنی هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.

تست: معادله‌ی $\frac{2x-1}{x}=5-x^2$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه‌ی ۳) معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{2x-1}{x}=5-x^2 \Rightarrow 2-\frac{1}{x}=5-x^2$$

$$\Rightarrow x^2-3=\frac{1}{x}$$

نمودار توابع $y_1=\frac{1}{x}$ و $y_2=x^2-3$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم. چون نمودار $y_1=\frac{1}{x}$ و $y_2=x^2-3$ یکدیگر را در سه نقطه قطع کرده‌اند، معادله‌ی داده شده سه جواب دارد.

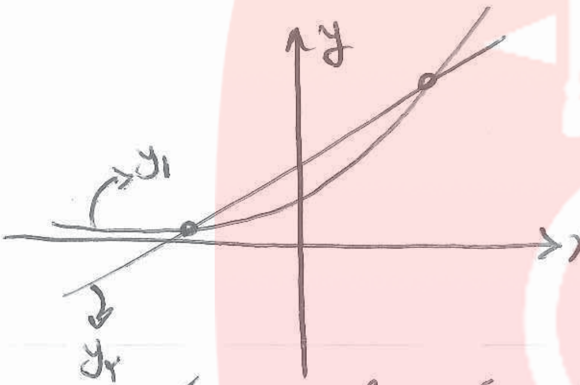
درسنامه آموزشی ریاضی - تجربی **ویژه کنکور**

مولف:رحیم قهرمان

تست: معادله ی $2^x = 2x+2$ چند جواب دارد؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ: گزینه ی ۳) نمودار دو تابع $y_1 = 2^x$ و $y_2 = 2x+2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم.



$\Rightarrow$ معادله دو جواب دارد.

تست: اگر معادله ی $x^2 - 2|x| = k$ دارای چهار ریشه ی حقیقی باشد، حدود k کدام است؟

۱) $k>0$ ۲) $k>1$ ۳) $-1<k<0$ ۴) $-1\le k\le 0$

پاسخ: گزینه ی ۳) تابع $f(x) = x^2 - 2|x|$ را در نظر بگیرید و با توجه به ریشه ی داخل قدر مطلق و با استفاده از تعیین علامت، آن را به یک تابع دو ضابطه ای تبدیل می کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x\ ; & x\ge 0 \\ x^2+2x\ ; & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1-1\ ; & x\ge 0 \\ x^2+2x+1-1\ ; & x<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} (x-1)^2-1\ ; & x\ge 0 \\ (x+1)^2-1\ ; & x<0 \end{cases}$$

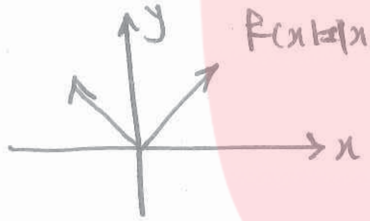
با توجه به نمودار تابع فوق، خط $y=k$ زمانی نمودار تابع $f(x) = x^2 - 2|x|$ را در چهار نقطه قطع می کند که:

$-1<k<0$

درسنامه (۱۱)

تابع قدرمطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود و با $f(x)=|x|$ نشان داده می‌شود. یعنی $f: A\to B$ با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ یک تابع قدرمطلق روی A نامیده می‌شود.

نمودار تابع قدرمطلق: اگر دامنه‌ی تابع قدرمطلق مجموعه اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=|x|$ به کمک دو خط $y=x$ و $y=-x$ قابل رسم است. چون به ازای هر x حقیقی، $|x|\geq 0$، لذا وقتی دامنه‌ی $f(x)=|x|$، $\mathbb{R}$ باشد آن‌گاه برد، مجموعه اعداد حقیقی نامنفی یعنی $[0,+\infty)$ است.



$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

خواص قدرمطلق:

1) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$ 2) $|x|=|-x|$ 3) $|xy|=|x||y|$

4) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$ 5) $|x|=a \xrightarrow{a>0} x=\pm a$

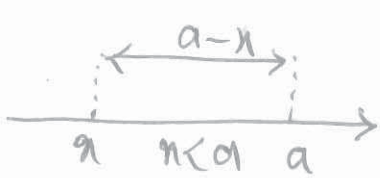
6) $|x|=|y| \Rightarrow x=\pm y$ 7) $|x|<a \xrightarrow{a>0} -a<x<a$

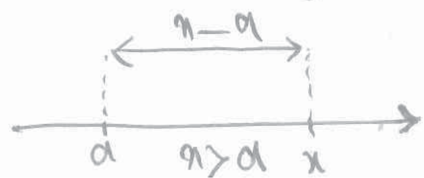
8) $|x|>a \xrightarrow{a>0} x>a$ یا $x<-a$ 9) $|x+y|\leq|x|+|y|$ (نامساوی مثلث)

10) $|x+y|=|x|+|y| \iff xy\geq 0$ 11) $|x|<|y| \iff x^2<y^2 \iff (x-y)(x+y)<0$

12) $a<x<b \overset{a<b}{\iff} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|<\frac{b-a}{2}$ 13) $x<a$ یا $x>b \overset{a>b}{\iff} \left|x-\frac{a+b}{2}\right|>\frac{b-a}{2}$

نکته: فاصله‌ی نقطه‌ای به طول x روی محور اعداد حقیقی از نقطه‌ای به طول a برابر است با $|x-a|$:





تست: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\right| \geq -\frac{1}{3}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{2}{3}]$ ۲) $(1,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۴) $[0,1)$

پاسخ: گزینه‌ی ۴) نامعادله‌ی $|f(x)|\geq a$ وقتی a منفی باشد، همواره و برای هر مقدار در دامنه‌ی f برقرار است. پس باید دامنه‌ی تابع $\frac{x-3}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}$ را تعیین کنیم.

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 1-\sqrt{x}>0 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x\in[0,1)\end{cases}$$

تست: مجموعه جواب‌های دستگاه $\begin{cases}|x|<2\\|2x-3|<x\end{cases}$ با مجموعه جواب‌های کدام نامعادله زیر برابر است؟

۱) $|3x-2|<1$ ۲) $|x-1|<1$ ۳) $|2x-3|<1$ ۴) $|x-2|<1$

پاسخ: گزینه‌ی ۳)

$$|x|<2 \xrightarrow{\text{خاصیت (7)}} -2<x<2 \quad (1)$$

$$|2x-3|<x \xrightarrow[\text{خاصیت (7)}]{x\geq 0} -x<2x-3<x \Rightarrow \begin{cases}2x-3<x \Rightarrow x<3\\ 2x-3>-x \Rightarrow x>1\end{cases} \Rightarrow 1<x<3 \quad (2)$$

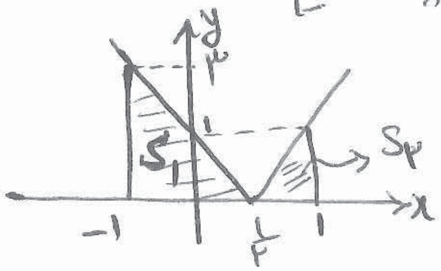
$$(1)\cap(2) \Rightarrow 1<x<2 \xrightarrow{\text{خاصیت (12)}} \left|x-\frac{3}{2}\right| < \frac{2-1}{2} \Rightarrow \left|x-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{|2x-3|}{2}<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2>0} |2x-3|<1$$

تست: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) 2 ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3 (سراسری تجربی ۹۰)

پاسخ: گزینه‌ی ۳) برای تعیین مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f(x)=|2x-1|$ و محور xها و دو خط $x=1$ و $x=-1$ یکی از روش‌ها رسم نمودار تابع است. پس داریم:



$$S=S_1+S_2=\frac{\frac{3}{2}\times 3}{2}+\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2}=\frac{5}{2}$$

مولف:رحیم قهرمان

تست: مجموعه جواب نامعادله $-3|x+3| + 2(x+3)^2 + 1 \le 0$ کدام است؟

۱) $[-4,-\frac{5}{2}] \cup [-2,-\frac{3}{2}]$ ۲) $[-4,-\frac{3}{2}]$

۳) $[-4,-\frac{7}{2}] \cup [-\frac{5}{2},-2]$ ۴) $[-\frac{7}{2},-2]$

پاسخ: گزینه ی ۳

$$-3|x+3| + 2(x+3)^2+1\le 0 \xrightarrow{|x|^2=x^2} 2|x+3|^2-3|x+3|+1\le 0$$

$$\xrightarrow{|x+3|=A} 2A^2-3A+1\le 0 \Rightarrow (A-1)(2A-1)\le 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}} \frac{1}{2}\le A\le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le |x+3|\le 1 \xrightarrow{a\le x\le b \Rightarrow \begin{cases}x\ge a\\ x\le b\end{cases}} \begin{cases}|x+3|\le 1\\ |x+3|\ge \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow[|x|\ge a \xrightarrow{a\ge 0} \begin{cases}x\ge a\\ \text{یا}\\ x\le -a\end{cases}]{|x|\le a \xrightarrow{a\ge 0} -a\le x\le a} \begin{cases}-1\le x+3\le 1\\ x+3\ge \frac{1}{2} \ \text{یا}\ x+3\le -\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-4\le x\le -2\\ x\ge -\frac{5}{2} \ \text{یا}\ x\le -\frac{7}{2}\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} \left(-\frac{5}{2}\le x\le -2\right) \cup \left(-4\le x\le -\frac{7}{2}\right)$$

تست: اگر نمودار تابع $f(x)=||x-2|-a|-3$ دقیقاً سه بار محور xها را قطع کند، آنگاه مقدار a کدام است؟

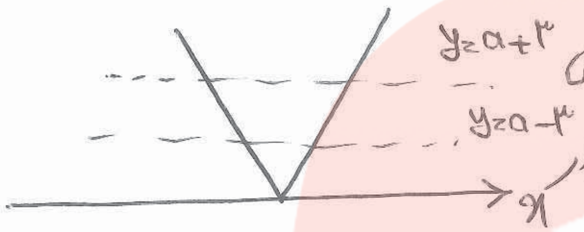
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ی ۲) از فرض سوال نتیجه می گیریم معادله ی $f(x)=0$ سه ریشه دارد، بنابراین معادله ی $||x-2|-a|=3$ سه ریشه دارد. دو معادله زیر را داریم:

1) $|x-2|-a=3 \Rightarrow |x-2|=a+3$

2) $|x-2|-a=-3 \Rightarrow |x-2|=a-3$

پس باید تعداد نقاط تقاطع نمودار $y=|x-2|$ را با خطوط افقی $y=a+3$ و $y=a-3$ را بیابیم. مطابق شکل این خطوط



و نمودار حداکثر ۴ نقطه برخورد دارند، و فقط در حالتی سه نقطه‌ی برخورد دارند که خط $y=a-3$ از راس زاویه‌ی متناظر نمودار بگذرد یعنی $a-3=0$ بنابراین $a=3$ (خطوط و نمودار می‌توانند ۲ و یا ۰ نقطه‌ی برخورد مشترک داشته باشند که این حالات مورد نظر نمی‌باشند.)

تست: اگر نامعادله‌ی $|x-\alpha|<\beta$ و نامعادله‌ی $|x^2-x|+x^2=|x|$ معادل یکدیگر باشند، $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) صفر ۴) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱) می‌دانیم $|a|+|b|=|a-b|$ هنگامی تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $ab\le 0$

$$|x^2-x|+x^2=|x| \Rightarrow |x^2-x|+|x^2|=|x| \Rightarrow$$

$$\underbrace{|x^2-x|}_{b}+\underbrace{|x^2|}_{a}=|\underbrace{(x^2)}_{a}-\underbrace{(x^2-x)}_{b}| \Rightarrow x^2(x^2-x)\le 0 \xrightarrow{\text{حل نامعادله}}$$

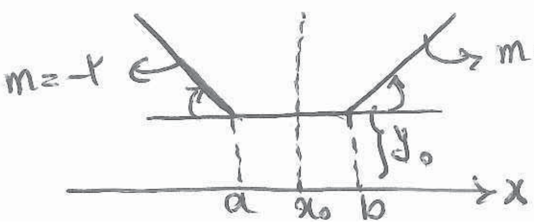
$$0\le x\le 1 \xrightarrow{a<x<b \xleftrightarrow{a<b} |x-\frac{a+b}{2}|<\frac{b-a}{2}} |x-\frac{1+0}{2}|<\frac{1-0}{2}$$

$$\Rightarrow |x-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2} \xrightarrow{\alpha=\frac{1}{2},\beta=\frac{1}{2}} \alpha+\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

درسنامه‌ی (۱۲) نمودارهای گلدانی

$$(a<b)\quad y=|x-a|+|x-b|$$

بررسی نمودار توابع به فرم $y=|x-a|+|x-b|$ $(a<b)$ نمودارهای این توابع به نمودارهای گلدانی معروف هستند و شکل کلی آن‌ها به صورت زیر است:



با توجه به نمودار داریم:

۱) ریشه‌ی تک تک قدرمطلق‌ها یعنی $x=a$ و $x=b$ محل‌های شکستگی نمودار تابع است.

۲) خط $x_0=\frac{a+b}{2}$، محور تقارن منحنی است.

۳) $y_0=|a-b|$ کمترین مقدار y است، لذا برد تابع به صورت $R_y=[|a-b|,+\infty)$ می‌باشد.

۴) نمودار در بازه‌ی $[a,b]$، تبدیل به پاره‌خطی موازی با محور xها می‌شود، یعنی مقدار y در این بازه عددی ثابت است که با جایگذاری هر عدد مانند x_0 از بازه‌ی $[a,b]$، این مقدار ثابت ($|a-b|$) به دست می‌آید.

تست: خط $x=-4$ محور تقارن نمودار تابع $y=|2x+1|+|2x+3k|$ است. در این صورت مقدار k کدام است؟

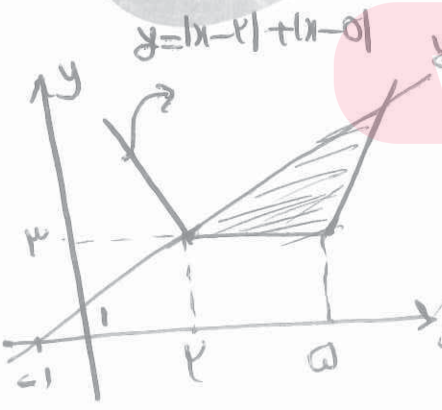
۱) $\frac{13}{3}$ ۲) ۶ ۳) $\frac{11}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳) معادله‌ی تابع را می‌توان به صورت $y=2(|x+\frac{1}{2}|+|x+\frac{3k}{2}|)$ نوشت که محور تقارن خط زیر است:

$$x=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3k}{2}}{2}=\frac{-1-3k}{4}\xrightarrow{\text{طبق فرض}}\frac{-1-3k}{4}=-4\Rightarrow k=\frac{11}{3}$$

تست: مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $y=|2-x|+|x-5|$ و خط $y=x+1$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۱۲



پاسخ: گزینه‌ی ۲) خط $y=x+1$ و نمودار تابع $y=|x-2|+|x-5|$ را رسم می‌کنیم. دو منحنی در نقطه‌ی (۲،۳) تلاقی دارند. مختصات نقطه‌ی تلاقی دوم از حل دستگاه زیر به دست می‌آید (دقت کنید که معادله‌ی نیم خط دوم $y=2x-7$ است، زیرا به ازای $x\geq5$ ضابطه‌ی تابع $y=2x-7$ می‌شود)

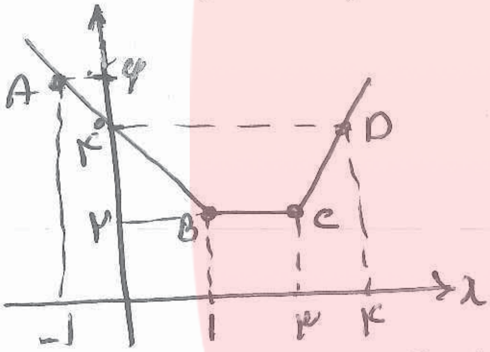
$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=2x-7 \end{cases} \Rightarrow x+1=2x-7 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=9$$

پس ارتفاع شکل محصور شده برابر $9-3=6$ است و مساحت آن $\frac{6\times 3}{2}=9$ واحد مربع.

تست: طول خط شکسته ی نمودار تابع $y=|x-1|+|x-3|$ در بازه ی $[-1,4]$ کدام است؟

۱) $3+2\sqrt5$ ۲) $2+3\sqrt5$ ۳) $3+2\sqrt2$ ۴) $2+3\sqrt3$

پاسخ: گزینه ی ۲) نمودار تابع به صورت شکل مقابل است.



$|AB|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt5$

$|BC|=2$, $|CD|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt5$

$\Rightarrow |AB|+|BC|+|CD|=2+3\sqrt5$

نکته: جواب های معادله ی $|x-\alpha|+|x-\beta|=k$ به سه حالت است:

الف) $k<|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله جواب ندارد.

ب) $k=|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله بی شمار جواب دارد و مجموعه جواب معادله در این حالت $[a,b]$ است.

ج) $k>|\alpha-\beta| \Leftarrow$ معادله دو جواب دارد، اگر x_1 و x_2 جواب های معادله در این حالت باشند، آنگاه $x_{1,2}=\frac{\alpha+\beta\pm k}{2}$ و $x_1+x_2=\alpha+\beta$ و $|x_1-x_2|=k$ است.

تست: مجموعه جواب معادله ی $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=1$ کدام است؟

۱) $[2,3]$ ۲) $\{2,3\}$ ۳) $\mathbb{R}-[2,3]$ ۴) ϕ

پاسخ: گزینه ی ۱) با توجه به $x^2-4x+4=(x-2)^2$ و $x^2-6x+9=(x-3)^2$ معادله را به صورت $|x-2|+|x-3|=1$ می توانیم بنویسیم که با توجه به نمودار مقابل شکل تابع $y=|x-2|+|x-3|$ به صورت روبرو می باشد

که $2\le x\le 3$ جواب های معادله اند.