

۱- در مثلث به رأس‌های $A(0, 2)$ و $B(2, 0)$ و $C(-2, -2)$ ، مختصات نقطه‌ی M ، وسط BC و طول میانه‌ی AM را بیابید.

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0 \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow M(0, -1)$$

۲- نقاط $A(2, a)$ و $B(-b + 1, 7)$ مفروضند.

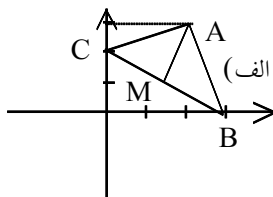
الف) مقدار a و b چه باشد تا مختصات وسط پاره خط AB نقطه $M(1, 5)$ باشد؟
ب) با معلوم بودن a و b طول پاره خط AB را بدست آورید.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 - b + 1}{2} \Rightarrow 2 = -b + 3 \Rightarrow b = 1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{a + 7}{2} \Rightarrow 10 = a + 7 \Rightarrow a = 3 \end{aligned} \Rightarrow (b, a) = (1, 3) \quad \text{الف)}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \quad \text{ب)}$$

۳- مثلث ABC بارثوس $A(2, 3)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ مفروض است.

الف) مثلث را در دستگاه مختصات رسم کنید.
ب) طول میانه وارد بر ضلع BC را محاسبه کنید.
ج) معادله ارتفاع وارد بر ضلع AB را بنویسید.



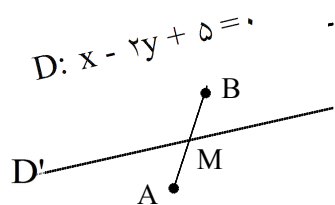
$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} \quad \text{ب)}$$

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

$$AM = \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$m_{CH} \times m_{AB} = -1, \quad m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - 0}{2 - 3} = -3 \Rightarrow m_{CH} = \frac{1}{3} \quad \text{ج)}$$

۴- معادله خطی را بنویسید که پاره خط واصل مابین دو نقطه $A\left(\frac{1}{3}, -2\right)$ و $B\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ را نصف کرده و با خط $D: x - 2y + 5 = 0$ موازی باشد.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$m_D = m_{D'} = -\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$D': \text{معادله: } y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

۵- نقطه $M(2, -5)$ یک رأس مربعی است که یک ضلع آن بر روی خطی به معادله $x - 2y - 7 = 0$ قرار دارد. محیط و مساحت این مربع را محاسبه کنید.

نقطه M روی ضلعی که معادله آن را داریم قرار ندارد. (زیرا مختصات آن در معادله صدق نمی‌کند) پس فاصله نقطه M از خط مورد نظر برابر ضلع مربع می‌باشد.

۶- نقاط $A(1, -1)$ و $B(-2, 3)$ و $C(3, 5)$ مختصات سه رأس متوازی الاضلاعی هستند. مختصات نقطه D رأس چهارم این متوازی الاضلاع را بدست آورید.

در متوازی الاضلاع $ABCD$ رابطه‌های زیر بین مختصات رئوس برقرار است:

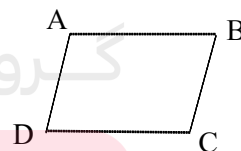
$$x_A + x_C = x_B + x_D \quad \text{و} \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

$$1 + 3 = -2 + x_D$$

$$x_D = 6$$

$$-1 + 5 = 3 + y_D$$

$$y_D = 1 \Rightarrow D(6, 1)$$

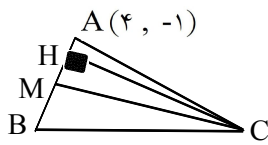


www.my-dars.ir

۷- در مثلث ABC رأس A(۴, -۱) و معادلات ارتفاع CH و میانه CM به ترتیب عبارت‌اند از:

$$CH: 2x - 3y + 1 = 0 \quad \text{و} \quad CM: 2x = -3y \quad \text{مطلوب است:}$$

(الف) معادله ضلع AB (ب) مختصات رأس B



$$m_{AB} \times m_{CH} = -1 \Rightarrow m_{AB} \times \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow m_{AB} = -\frac{3}{2} \quad \text{(الف)}$$

$$AB \text{ معادله: } y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 5$$

(ب) برای بدست آوردن مختصات نقطه B کافی است مختصات نقطه M را داشته باشیم. می‌دانیم M محل برخورد CM و AB می‌باشد پس معادله این دو را در دستگاه حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} CM: 2x = -3y \Rightarrow 2x = -3\left(-\frac{3}{2}x + 5\right) \Rightarrow 2x = \frac{9}{2}x - 15 \Rightarrow x = 6 \\ AB: y = -\frac{3}{2}x + 5 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(6) + 5 \Rightarrow y = -4 \end{cases} \Rightarrow M(6, -4)$$

نقطه M وسط ضلع AB است پس داریم:

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A \Rightarrow x_B = 2(6) - 4 = 8 \\ y_B = 2y_M - y_A \Rightarrow y_B = 2(-4) + 1 = -7 \end{cases} \Rightarrow B(8, -7)$$

۸- به ازای چه مقادیری از m و n خط $(m + 2n - 3)x + (2m - n + 1)y + 6m + 9 = 0$ موازی محور x ها بوده و محور y ها را به عرض ۳- قطع می‌کند؟

شیب خطی که موازی محور x ها می‌باشد صفر است. پس لازم است که ضریب x صفر باشد. $m + 2n - 3 = 0$ و چون خط فوق محور عرض‌ها را در نقطه ۳- قطع کرده پس:

$$\begin{aligned} (2m - n + 1)(-3) + 6m + 9 &= 0 \Rightarrow -6m + 3n - 3 + 6m + 9 = 0 \Rightarrow n = -2 \\ m + 2n - 3 &= 0 \Rightarrow m + 2(-2) - 3 = 0 \Rightarrow m = 7 \end{aligned}$$

۹- اگر نقاط A(-۱, ۴) و B(۳, ۲) انتهای دو سر قطر یک دایره باشند مطلوب است:

(الف) شعاع و مرکز این دایره
(ب) مساحت و محیط دایره

$$\text{(الف) مرکز } O = \frac{A+B}{2} = (1, 3)$$

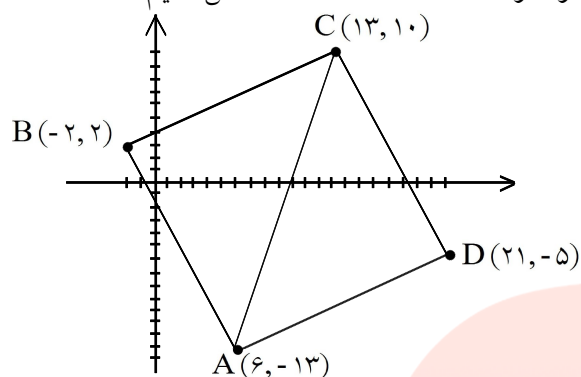
$$OA = R = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\text{(ب) محیط دایره} = 2\pi R = 2\pi(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}\pi$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \pi(\sqrt{5})^2 = 5\pi$$

۱۰- ثابت کنید نقاط $A(۶, -۱۳)$, $B(-۲, ۲)$, $C(۱۳, ۱۰)$ و $D(۲۱, -۵)$ رئوس یک مربع اند.

چون مشخص نیست چه رئوسی روبه روی هم اند، پس حتماً باید نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کنیم:



باید نشان دهیم:

$$AB = BC = CD = DA$$

$$AB = \sqrt{(-۲ - ۶)^2 + (۲ + ۱۳)^2} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷$$

$$CD = \sqrt{(۲۱ - ۱۳)^2 + (-۵ - ۱۰)^2} = ۱۷$$

$$DA = \sqrt{(۶ - ۲۱)^2 + (-۱۳ + ۵)^2} = ۱۷$$

اما یک لوزی هم چهارضلع برابر دارد. حال کافی است رابطه‌ی فیثاغورس را برای مثلث ABC تحقیق کنیم و نشان دهیم مثلث ABC در زاویه‌ی B قائمه است و این یعنی $ABCD$ مربع است.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(۱۳ - ۶)^2 + (۱۰ + ۱۳)^2} = \sqrt{۵۷۸}$$

$$: AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow ۵۷۸ = ۲۸۹ + ۲۸۹ \Rightarrow ۵۷۸ = ۵۷۸$$

۱۱- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(۱, ۲)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(-۱, ۴)$ به دست آورید.

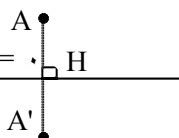
نقطه‌ی M ، نقطه‌ی میانی بین نقطه‌ی A و قرینه‌ی نقطه‌ی A (یعنی B) است.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -۱ = \frac{۱ + x_B}{2} \Rightarrow x_B = -۳$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow ۴ = \frac{۲ + y_B}{2} \Rightarrow y_B = ۶$$

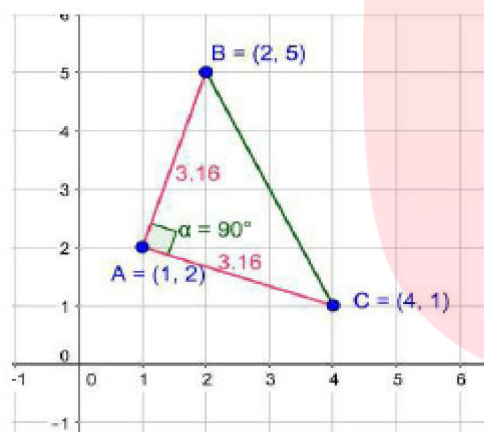
۱۲- قرینه نقطه $A(2, 3)$ را نسبت به خط $D: 3x + 2y - 1 = 0$ بدست آورید.

نقطه H وسط AA' است پس کافی است مختصات آن را بدست آوریم. برای بدست آوردن مختصات H لازم است که معادله خط D و AA' را در یک دستگاه حل کنیم:

$$D: 3x + 2y - 1 = 0$$


$$\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \Rightarrow 3x + 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{13} \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}\left(-\frac{7}{13}\right) + \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{17}{13} \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{7}{13}, \frac{17}{13}\right)$$

۱۳- نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(1, 2)$ ، $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.



$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\ AC &= \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \\ AB &= AC \\ m_{AB} &= \frac{5-2}{2-1} = 3, \quad m_{AC} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$m_{AB} \times m_{AC} = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

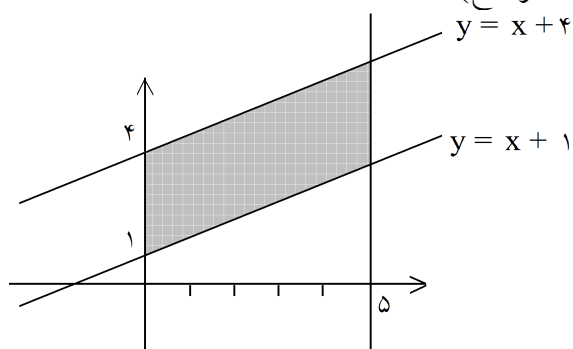
راه اول:

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

راه دوم:

۱۴- مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوط $y = x + 1$ ، $y = x + 4$ و $x = 5$ و محور y را حساب کنید.

با استفاده از رسم نمودار مساحت متوازی الاضلاع برابر است با (قاعده $\times$ ارتفاع)



$$S = 3 \times 5 = 15$$

۱۵- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند.

الف) مقدار $x_1^2 + x_2^2$ را حساب کنید.

ب) مقدار $x_1^3 + x_2^3$ را حساب کنید.

ج) مقدار $x_1^4 + x_2^4$ را حساب کنید.

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{33}{4} \quad \text{الف)}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = \left(\frac{7}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{175}{8} \quad \text{ب)}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = \left(\frac{33}{4}\right)^2 - 2(4) = \frac{961}{16} \quad \text{ج)}$$

۱۶- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 7x + 4 = 0$ باشند.

الف) مقدار عبارت $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ را محاسبه کنید.

ب) مقدار عبارت $\frac{x_1}{x_2}(1 - x_2^2) + \frac{x_2}{x_1}(1 - x_1^2)$ را محاسبه کنید.

$$\text{الف)} \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{33}{8}$$

$$\text{ب)} \quad \text{عبارت مورد نظر} = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) - 2(x_2 x_1) = \frac{33}{8} - 4 = \frac{1}{8}$$

۱۷- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، بدون حل معادله، مقدار عددی عبارت

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha} + \beta^2 + \frac{1}{\beta}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

۱۸- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۴ و -۳ یا $\frac{4}{3}$ و $\frac{1}{3}$ یا $1 \pm \sqrt{2}$ و $5 \pm \sqrt{3}$ باشد.

معادله مورد نظر	P = ضرب ریشه‌ها	S = جمع ریشه‌ها	ریشه‌ها
$x^2 - x - 12 = 0$	-۱۲	۱	۴ و -۳
$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} = 0$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$ و $\frac{1}{3}$
$x^2 - 2x - 1 = 0$	-۱	۲	$1 \pm \sqrt{2}$
$x^2 - 10x + 22 = 0$	۲۲	۱۰	$5 \pm \sqrt{3}$

۱۹- m را طوری پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله‌ی $mx^2 - 4x + 1 = 0$ سه برابر ریشه‌ی دیگر باشد. ($m \neq 0$)

$$\alpha = 3\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 4\beta \Rightarrow \frac{4}{m} = 4\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{m}$$

$$m\left(\frac{1}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{m}\right) + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{4}{m} = -1 \Rightarrow m = 3$$

۲۰- در معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه‌ها دو واحد بیشتر از ریشه‌ی دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه‌ی معادله را بیابید.

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ \alpha + \beta = 4 \quad (\div 25) \\ \alpha \times \beta = \frac{m}{4} \quad (\div 25) \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 1 \quad (\div 5), 3 \times 1 = \frac{m}{4} \rightarrow m = 12 \quad (\div 25)$$

۲۱- مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$

دهانه‌ی سهمی رو به پایین و نقطه‌ی ماکزیمم دارد $a = -2 < 0$

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = -2 \times 4 + 8 \times 2 - 5 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$

ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

دهانه سهمی رو به بالا و نقطه‌ی مینیمم دارد. $a = 3 > 0$

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x = -1$$

$$g(-1) = 3 \times 1 + 6(-1) + 5 = 2 \Rightarrow f(-1) = 2$$

۲۲- در بازه (a, b) مقادیر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3$ کم تر از ۱ می باشد، بیش ترین مقدار $b - a$ را حساب کنید.

باید تابع $f(x)$ را کوچک تر از یک قرار دهیم.

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + 3 < 1 \xrightarrow{\times 4} x^2 - 9x + 12 < 4 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 < 0 \Rightarrow 1 < x < 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$$

۲۳- بزرگ ترین بازه ای که سهمی $y = 2x^2 - 4x + 1$ پایین تر از سهمی $y = x^2 + 4x - 6$ باشد را حساب کنید.

ضابطه ی سهمی اول را باید کوچک تر از ضابطه ی سهمی دوم قرار دهیم.

$$2x^2 - 4x + 1 < x^2 + 4x - 6 \Rightarrow x^2 - 8x + 7 < 0 \Rightarrow (x - 7)(x - 1) < 0 \Rightarrow 1 < x < 7$$

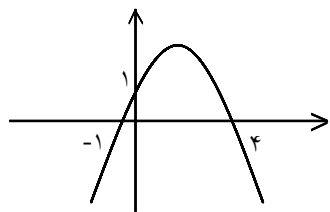
۲۴- اگر $S(-1, 4)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + 5$ باشد، a, b را حساب کنید.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a$$

$$S(-1, 4) \xrightarrow[\substack{y=4 \\ b=2a}]{x=-1} 4 = a(-1)^2 + b(-1) + 5 \Rightarrow a - b + 5 = 4 \Rightarrow a - b = -1$$

$$a - b = -1 \xrightarrow{b=2a} a - 2a = -1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$y = x^2 + 2x + 5$$



۲۵- معادله ی سهمی شکل مقابل را حساب کنید.

$$y = ax^2 + bx + c \text{ معادله سهمی}$$

$$A(0, 1) \Rightarrow 1 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 1$$

$$B(-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 1 \Rightarrow a - b = -1$$

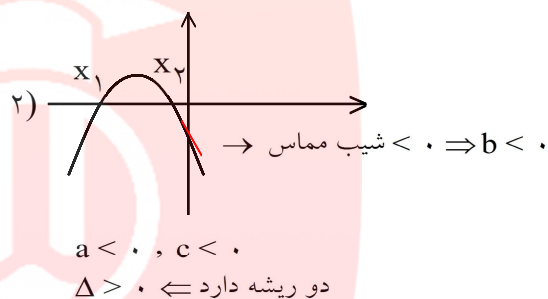
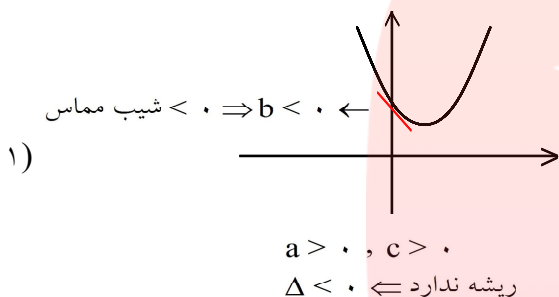
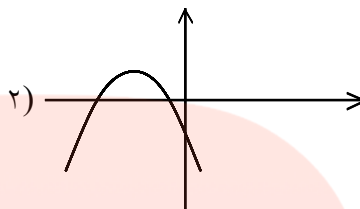
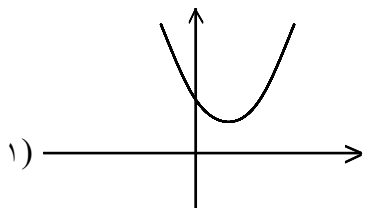
$$C(4, 0) \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + 1 \Rightarrow 16a + 4b = -1$$

$$4 \times \begin{cases} a - b = -1 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 4b = -4 \\ 16a + 4b = -1 \end{cases} \Rightarrow 20a = -5 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$$

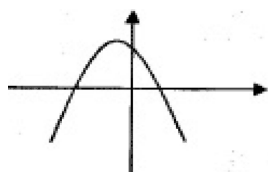
$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1$$

۲۶- جدول زیر را کامل کنید. (علامت a و b و c و Δ را مشخص کنید).

تعداد ریشه	Δ	c	b	a	نمودار
۱					
۲					



تعداد ریشه	Δ	c	b	a	نمودار
صفر	-	+	-	+	۱
۲	+	-	-	-	۲



۲۷- در شکل مقابل سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.

سهمی رو به پایین $a < 0$ (۰/۲۵)

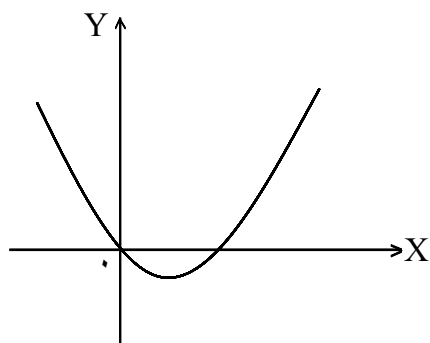
$\frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow -b > 0 \Rightarrow b < 0$ (۰/۲۵)

$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c > 0$ (۰/۲۵)

www.my-dars.ir

تعداد ریشه‌ها برابر ۲ است. (۰/۲۵)

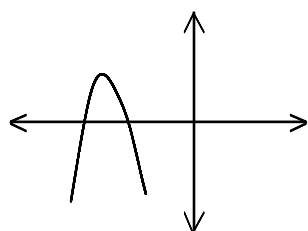
۲۸- شکل روبه‌رو نمودار تابع $P(x) = ax^2 + bx + c$ است.
الف) علامت a و b را تعیین کنید.
ب) مقدار c را بیابید.



الف) $a > 0, b < 0$ (۵/۰)

ب) $c = 0$ (۲۵/۰)

۲۹- در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



الف) $a < 0, b < 0, c < 0$ (۲۵/۰)

نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند در نتیجه معادله دو جواب دارد. (۲۵/۰)

۳۰- اگر $g = \{(x, y) \mid 3x^2 - 12x + 2y = -20\}$ مقدار ماکزیمم یا مقدار مینیمم تابع g را در صورت وجود بیابید. (تابع g حقیقی است).

$$3x^2 - 12x + 2y = -20 \Rightarrow 2y = -3x^2 + 12x - 20 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 10$$

تابع دارای ماکزیمم است $\Rightarrow$ ضریب x^2

$$x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2(-\frac{3}{2})} = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(2)^2 + 6(2) - 10 = -6 + 12 - 10 = -4$$

ماکزیمم تابع برابر (-4) می‌باشد

۳۱- مقدار ماکزیمم و یا مقدار مینیمم را برای تابع داده شده به‌دست آورید. (دو روش: $-\frac{b}{2a}$ و مربع کردن)

$$\{(x, y) \mid x^2 + 6x + 2y + 5 = 0\}$$

$$1) x = \frac{3}{2(-\frac{1}{2})} = -3 \Rightarrow y = \frac{-9}{2} + 9 - \frac{5}{2} = 2 \Rightarrow y_{\max} = 2$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$2) y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 2 \Rightarrow y_{\max} = 2$$

۳۲- در معادله ی $x^2 + mx - 3 = 0$ مقدار m را چنان بیابید که بین α و β ریشه های این معادله رابطه ی $\alpha + \beta = 4$ برقرار باشد.

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + \beta = -m \end{cases} \Rightarrow \alpha + \alpha + \beta = 4 \Rightarrow \alpha = 4 + m$$

۳۳- طول و عرض مستطیلی را به دست آورید که محیط آن ۲۰ و مساحت آن ۵ باشد.

$x_1 =$ عرض و $x_2 =$ طول

$$2(x_1 + x_2) = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10 \Rightarrow S = 10$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5 \Rightarrow P = 5$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 5 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -10, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(1)(5) = 100 - 20 = 80$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16 \times 5}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} = \frac{2(5 \pm 2\sqrt{5})}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

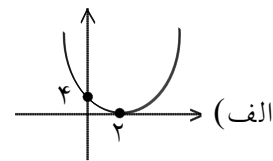
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + 2\sqrt{5} & \text{طول مستطیل} \\ x_2 = 5 - 2\sqrt{5} & \text{عرض مستطیل} \end{cases}$$

۳۴- نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = (x - 2)^2$

ب) $y = 2(x - 2)^2$

ج) $y = 2(x - 2)^2 - 1$



۳۵- همهی مقادیر a را پیدا کنید که معادله ی $2x^2 - (a^3 + 8a - 1)x + a^2 - 4a = 0$ ریشه هایی با علامتهای مختلف داشته باشد.

$$\Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{a^2 - 4a}{2} < 0 \Rightarrow a \in (0, 4)$$

۳۶- فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^2 + Px + 12 = 0$ باشند. P را طوری تعیین کنید که $x_1 - x_2 = 1$.

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{1} = 1 \Rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow P^2 - 48 = 1 \Rightarrow P^2 = 49 \Rightarrow \begin{cases} P = 7 \\ \text{یا} \\ P = -7 \end{cases}$$

۳۷- سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۵ متر بر ثانیه است. این قایق فاصله‌ی ۴۲۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۸۰ ثانیه است. سرعت آب رودخانه چند متر بر ثانیه است؟

$$x \text{ (مسافت طی شده)} = V \text{ (سرعت)} \cdot t \text{ (زمان)} \Rightarrow t = \frac{x}{V}$$

سرعت آب رودخانه را V در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} t_{\text{رفت}} - t_{\text{برگشت}} &= 80 \Rightarrow \frac{420}{5-V} - \frac{420}{5+V} = 80 \\ \div 20 &\rightarrow \frac{21}{5-V} - \frac{21}{5+V} = 4 \xrightarrow{\times (5-V)(5+V)} 21(5+V) - 21(5-V) = 4(5-V)(5+V) \\ \Rightarrow 105 + 21V - 105 + 21V &= 100 - 4V^2 \Rightarrow 4V^2 + 42V - 100 = 0 \xrightarrow{\div 2} \\ 2V^2 + 21V - 50 &= 0 \Rightarrow (V-2)(2V+25) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V = 2 \text{ ق ق} \\ V = -\frac{25}{2} \text{ غ ق} \end{cases} \end{aligned}$$

۳۸- علی یک کار را در ۱۰ روز انجام می‌دهد و همین کار را به کمک رضا در ۴ روز انجام می‌دهد. رضا به تنهایی این کار را در چند روز انجام می‌دهد؟

	کل کار	مقدار کار در یک روز
علی	۱۰	$\frac{1}{10}$
رضا	x	$\frac{1}{x}$
علی و رضا	۴	$\frac{1}{4}$

مقدار کار انجام شده توسط رضا در یک روز + مقدار کار انجام شده توسط علی در یک روز

= مقدار کار انجام شده توسط رضا و علی

$$\Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x+10}{10x} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = 10x + 20 \Rightarrow 3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$$

۳۹- علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می‌کند: ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{۱۶}{۱۲۰}$ صفحه ویرایش می‌کند.
زمانی که علی و رضا با هم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می‌کنند: ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه با هم $\frac{۱۶}{۸۰}$ صفحه ویرایش می‌کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می‌کند x در نظر بگیریم پس در یک دقیقه $\frac{۱۶}{x}$ صفحه ویرایش می‌کند. پس داریم:

$$2x + 240 = 3x \Rightarrow x = 240$$

۴۰- معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = 5$

ب) $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x+1} = 2$

الف) $x - 2 + x = 5x(x - 2) \Rightarrow 5x^2 - 12x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 + \sqrt{26}}{5} \text{ و } \frac{6 - \sqrt{26}}{5}$

ب) $\sqrt{2x+9} = 2 + \sqrt{x+1}$ به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow 2x + 9 = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow x + 4 = 4\sqrt{x+1}$ به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow x^2 + 8x + 16 = 16x + 16$

$\Rightarrow x^2 - 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ق ق} \\ x = 8 & \text{ق ق} \end{cases}$