

1- مجموع اعداد فرد مضرب 3 و کوچکتر از 100 را بیابید .

2 -مجموع چند جمله اول از دنباله هندسی زیر برابر 126- است ؟

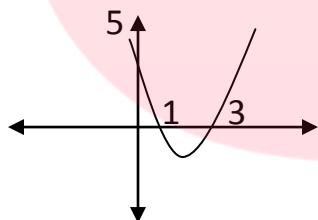
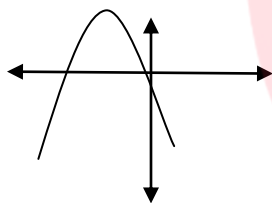
... و 24 و 12- و 6

3- به ازای چه مقادیری از m معادله $mx^2 - (4m - m^3)x - m + 5 = 0$ دو ریشه دارد که قرینه یکدیگرند .

4- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد .

5- به ازای کدام مقادیری از a معادله $x^2 - 2(a - 2)x + 14 - a = 0$ درجه دوم دو ریشه مثبت دارد؟

6- نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر رسم شده است. تعداد ریشه ها و علامت a, b, c را مشخص کنید.



7 -ضابطه سهمی زیر را بنویسید .

8- معادله و نامعادله های زیر را حل کنید .

الف) $\sqrt{x+1} = |x-1|$

ب) $x^2 < |x|$

9- نقاط $A(2,3)$ و $B(2,-1)$ و $C(4,1)$ سه رأس مثلث هستند

الف) طول میانه BM را بدست آورید .

ب) معادله میانه BM را بدست آورید .

10 - نقطه های $A(0,2)$ و $B(k, k + 2)$ و $C(6,10)$ و $D(n, k)$ متوازی الاضلاع ABCD هستند. طول قطر BD را پیدا کنید .

11- قرینه نقطه $A(-1,2)$ را نسبت به نقطه $O(2, -1)$ بدست آورید .

12- مساحت و محیط مربعی که دو ضلع آن روی خط های $2x - y = 3$ و $4x - 2y + 7 = 0$ قرار دارد را بیابید.

موفق باشید

مای دررس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

سوال 1

حل: اعداد فرد مضرب 3 و کوچکتر از 100 به زیر هستند:

99 و ... و 15 و 9 و 3

که یک دنباله حسابی با قدرنسبت 6 است. حالا تعداد جملات این دنباله را مشخص می کنیم. برای پیدا کردن شماره جمله می توانید از رابطه زیر استفاده کنید:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$\Rightarrow n = \frac{99 - 3}{6} + 1 = \frac{96}{6} + 1 = 16 + 1 = 17$$

حالا مجموع جملات را بدست می آوریم:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2}(a_1 + a_{17}) \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2}(3 + 99) \Rightarrow s_{17} = \frac{17}{2}(102)$$

$$\Rightarrow s_{17} = 17 \times 51 = 867$$

سوال 2

... و 24 و -12 و 6

حل: جمله اول دنباله هندسی 6 و قدرنسبت آن $q = \frac{-12}{6} = -2$ است. مجموع n جمله اول این دنباله -126 است یعنی:

$$s_n = -126$$

$$s_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow -126 = \frac{6((-2)^n - 1)}{-2 - 1} \Rightarrow -126 = \frac{6((-2)^n - 1)}{-3}$$

$$\Rightarrow -126 = -2((-2)^n - 1) \Rightarrow 63 = (-2)^n - 1 \Rightarrow 64 = (-2)^n$$

$$\Rightarrow (-2)^6 = (-2)^n \Rightarrow n = 6$$

سوال 3

حل : دوریشه قرینه یکدیگرند . بنابراین مجموع ریشه ها برابر صفر می شود . بنابر رابطه مجموع ریشه ها داریم :

$$s = 0 \Rightarrow s = \frac{-b}{a} = -\frac{-(4m - m^3)}{m} = 0 \frac{m(4 - m^2)}{m} = 0$$

می دانیم کسری صفر است که صورتش صفر باشد بنابر این :

$$\Rightarrow (4m - m^3) = 0 \Rightarrow m(4 - m^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 4 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \quad m = -2 \end{cases}$$

دوریشه قرینه یکدیگرند . بنابراین حاصل ضرب ریشه ها منفی است . باتوجه رابطه حاصل ضرب ریشه داریم :

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-m+5}{m} < 0$$

برای حل نامعادله کسری از جدول تعیین علامت استفاده می کنیم. ابتدا ریشه صورت ومخرج را بدست می آوریم . برای رسم جدول به صورت سریع علامت بزرگترین جمله صورت را در علامت بزرگترین جمله مخرج ضرب می کنیم . علامت بدست آمده را در جدول از سمت راست قرار می دهیم وسپس علامت ها را یکی در میان عوض می کنیم .

$$-m + 5 = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ صورت ریشه}$$

مخرج ریشه $m = 0$

m	0	5
	-	+
	ت	-
$\frac{-m+5}{m}$		

بنابراین جواب نامعادله با توجه به جدول $m > 5$, $m < 0$ قابل قبول است ودربین جواب هایی که برای m بدست آمد فقط $m = -2$ قابل قبول است .

سوال 4

حل :

فرض می کنیم ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ ، α و β باشد بنابراین ریشه های معادله ای را که می خواهیم بنویسیم را x_1 و x_2 می نامیم. معادله درجه دومی که قرار است بنویسیم ریشه های آن دو برابر ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ است پس:

$$x_1 = 2\alpha$$

$$x_2 = 2\beta$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ را بدست می آوریم :

$$s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{-5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$p = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{4}$$

حالا مجموع و حاصل ضرب ریشه های معادله جدید را به کمک α, β و s, p محاسبه می کنیم و به جای x_1 و x_2 از مقدار مساوی آن استفاده می کنیم یعنی روابط * پس :

$$S = x_1 + x_2 = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = 2\alpha \times 2\beta = 4\alpha\beta = 4 \times \frac{-5}{4} = -5$$

می توانیم معادله جدید را به کمک رابطه $x^2 - Sx + P = 0$ بنویسیم :

$$x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - 5 = 0$$

سوال 5

www.my-dars.ir

حل : برای اینکه دوریشه مثبت باشد باید مجموع و حاصل ضرب ریشه ها مثبت باشند . یعنی $\Delta > 0, s > 0, p > 0$

$$s = \frac{-b}{a} = -\frac{-2(a-2)}{1} = 2(a-2) > 0 \Rightarrow a > 2$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{14-a}{1} = 14 - a > 0 \Rightarrow 14 > a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2(a-2))^2 - 4 \times (14-a) = 4(a^2 - 4a + 4) - 56 + 4a$$

$$= 4a^2 - 16a + 16 - 56 + 4a = 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow 4(a^2 - 3a - 10) > 0$$

نامعادله درجه دوم را به کمک جدول تعیین علامت حل می کنیم :

$$a^2 - 3a - 10 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 5, a = -2$$

m		-2		5	

Δ	+	0	-	0	+

باتوجه به جدول جواب نامعادله $a < -2, a > 5$ است. از 3 جواب شرطهای بدست آمده اشتراک می گیریم و نتیجه محدوده a را مشخص می کند :

$$5 < a < 14$$

سوال 6

حل : چون نمودار با محور طول ها در دو نقطه بر خورد کرده است ، بنابر این معادله دارای دو ریشه است .

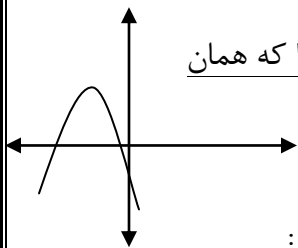
نمودار با محور عرض ها در قسمت پایین محور یعنی قسمت منفی بر خورد کرده است ، پس عرض از مبدا که همان

c است منفی است. سهمی دارای ماکزیمم است در نتیجه a منفی است .

طول راس سهمی منفی است. همچنین a نیز منفی است. پس باتوجه به علامت x ، $-b$ نیز منفی است :

$$x = \frac{-b}{2a} < 0 \stackrel{a < 0}{\Rightarrow} b > 0$$

www.my-dars.ir



سوال 7

حل : باتوجه به نمودار داده شده محور طول ها در دو نقطه $x = 1$, $x = 3$ قطع شده است . بنابراین فرمول کلی سهمی باتوجه به نکاتی که در جزوه آمده به صورت زیر است :

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{x_1=1, x_2=3} y = a(x - 1)(x - 3)$$

نقطه $(0,5)$ روی نمودار قرار دارد ، بنابر این در معادله سهمی صدق می کند .

حالا مقدار بدست آمده را در رابطه سهمی جاگذاری می کنیم:

$$y = a(x - 1)(x - 3) \xrightarrow{a=\frac{5}{3}} y = \frac{5}{3}(x - 1)(x - 3) \Rightarrow y = \frac{5}{3}x^2 - \frac{20}{3}x + 5$$

ضابطه سهمی بدست آمد .

سوال 8

حل :

الف) $\sqrt{x+1} = |x-1|$

برای حل معادله طرفین را به توان 2 می رسانیم تا رادیکال از بین برود:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (|x-1|)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + 2x - x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

جواب $x = 0$ قابل قبول است . زیرا در معادله صدق می کند ولی $x = -1$ قابل قبول نیست زیرا با جاگذاری در معادله

تساوی برقرار نمی شود .

www.my-dars.ir

ب) $x^2 < |x|$

حل: چون x^2 نامنفی است بنابراین ویژگی قدر مطلقى زیر را بکار می بریم:

$$|A| > K \Rightarrow \begin{cases} A > K \\ \text{یا} \\ A < -K \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$|x| > x^2 \Rightarrow \begin{cases} x > x^2 \Rightarrow x - x^2 > 0 & 1 \\ \text{یا} \\ x < -x^2 \Rightarrow x + x^2 < 0 & 2 \end{cases}$$

برای حل نامعادله های 1 و 2 از جدول تعیین علامت استفاده می کنیم:

$$1) \quad x - x^2 > 0$$

$$x - x^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

x	0	1
$x - x^2$	- 0	+ 0 -

باتوجه به نامعادله 1 جواب بازه (0,1) است.

$$2) \quad x + x^2 < 0$$

$$x + x^2 = 0 \Rightarrow x(1 + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 + x = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

x	-1	0
$x + x^2$	+ 0 -	0 +

باتوجه به نامعادله 2 جواب بازه (-1,0) است. باتوجه به جواب های بدست آمده جواب نامعادله به صورت زیر است:

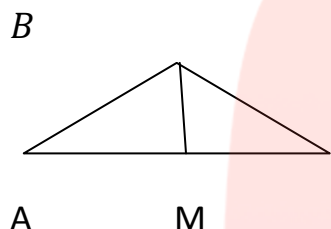
www.my-dars.ir

$$x \in (0,1) \cup (-1,0)$$

سوال 9

حل الف:

نقاط $A(2,3)$ و $B(2,-1)$ و $C(4,1)$ سه راس مثلث هستند. برای بدست آوردن طول میانه BM ابتدا مختصات نقطه M را بدست می آوریم:



$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow M(3,2)$$

$$BM = \sqrt{(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

حل ب:

برای بدست آوردن معادله میانه BM ابتدا مختصات نقطه M را لازم داریم که در الف بدست آوردیم سپس شیب میانه BM را محاسبه می کنیم و در پایان به کمک شیب و نقطه معادله را می نویسیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$M(3,2) \leftarrow y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

حالا شیب BM را بدست می آوریم:

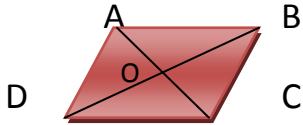
$$m = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{-1 - 2}{2 - 3} = \frac{-3}{-1} = 3$$

به کمک رابطه معادله خط معادله میانه را می نویسیم:

$$y = m(x - x_B) + y_B = 3(x - 2) - 1 = 3x - 6 - 1 \rightarrow y = 3x - 7$$

معادله میانه BM $y = 3x - 7$

www.my-dars.ir



حل:

می دانیم در متوازی الاضلاع قطر ها یکدیگر را نصف می کنند. بنابراین نقطه ی وسط قطر AC و وسط قطر BD است بنابراین این می توانیم رابطه زیر را استفاده کنیم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 0 + 6 = k + n$$

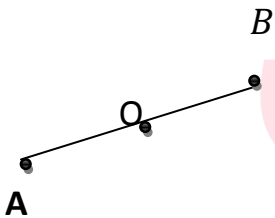
$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 10 = k + 2 + k \Rightarrow 10 = 2k \Rightarrow k = 5$$

$$k + n = 6 \Rightarrow 5 + n = 6 \Rightarrow n = 6 - 5 \Rightarrow n = 1$$

$$B(k, k + 2) = (5, 5 + 2) = (5, 7)$$

$$D(n, k) = (1, 5)$$

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$



حل : نقطه B قرینه نقطه A نسبت به نقطه O است. بنابراین نقطه O وسط پاره خط AB

است. پس:

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{1 + x_B}{2} \Rightarrow 4 = 1 + x_B \Rightarrow x_B = 3$$

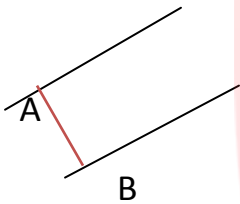
$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{2 + y_B}{2} \Rightarrow -2 = 2 + y_B \Rightarrow -4 = y_B$$

$$\Rightarrow B(3, -4)$$

$$2x - y = 3 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$4x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{-4}{-2} = 2$$

پس دو خط باهم موازی هستند، یعنی دو ضلع رو به رو ی هم هستند. در نتیجه فاصله این دو خط طول ضلع مربع خواهد بود :



فاصله دو خط موازی از رابطه زیر بدست می آید:

$$AB = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad c=7, c'=3 \quad AB = \frac{|7 - 3|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

حالا مساحت مربع را محاسبه می کنیم :

$$s = (AB)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

محیط مربع را بدست می آوریم :

$$P=4 AB = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$