A سؤال‌های امتحانی

۱- گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

الف) قدرنسبت جمله‌های ردیف زوج دنبالهٔ $-۱,۳,۷,\ldots$ برابر است با:
☐ ۴ ☐ ۸

ب) اگر $S_n = n^۲ + n$ مجموع n جملهٔ اولِ یک دنبالهٔ حسابی باشد، جملهٔ دوم دنباله برابر است با:
☐ ۴ ☐ ۶

۲- جاهای خالی را با عبارت‌ها یا کلمه‌های مناسب پر کنید.

الف) در روز اول یک سکه، در روز دوم دو سکه، ... و در روز دهم، ده سکه کنار می‌گذاریم. در مجموع ..... سکه تا روز دهم کنار گذاشته‌ایم.

ب) ۱۰ نقطهٔ متمایز روی محیط دایره‌ای قرار دارد. از هر نقطه به نقطهٔ دیگر وصل می‌کنیم. تعداد ..... وتر به دست می‌آید.

۳- مجموع ۲۰ جملهٔ اول هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بیابید.

الف) $-۵,-۳,-۱,\ldots$ (نهایی ۹۱)

ب) $-۵,۰,۵,\ldots$ (نهایی ۹۲)

پ) $a_n = ۳n - ۱$

ت) $a_n = \frac{n}{۲} + ۱$

۴- چند جمله از دنبالهٔ $۱,۴,۷,۱۰,\ldots$ را جمع کنیم تا حاصل برابر ۱۷۶ شود؟

۵- در دنبالهٔ حسابی $-۱,۲,۵,\ldots$ حداقل چند جملهٔ آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟ (نهایی ۹۵)

۶- حداقل چند جمله از دنبالهٔ $۳,۹,۱۵,\ldots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟ (نهایی ۹۳)

۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع ۲۰ جملهٔ اول، سه برابر مجموع ۱۲ جملهٔ اول است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۸- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع پنج جملهٔ اول برابر ۱۰ و مجموع پنج جملهٔ بعدی برابر ۳۵ است. مجموع پنجاه جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۹- در یک دنبالهٔ حسابی $S_n = n(۴n - ۱)$ است.

الف) مجموع ده جملهٔ اول را بیابید.

ب) مجموع $a_{۱۵} + \cdots + a_۷ + a_۶$ را بیابید.

پ) جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

۱۰- از بین ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $-۷,-۴,-۱,\ldots$ مجموع جمله‌های ردیف زوج و مجموع جمله‌های ردیف فرد را به دست آورید.

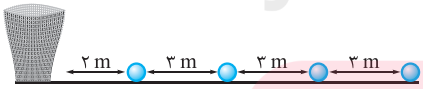
۱۱- در ۲۰ جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی، مجموع جمله‌های ردیف فرد برابر ۵۳۰ و مجموع جمله‌های ردیف زوج برابر ۵۹۰ است. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را بیابید. (مشابه کتاب درسی)

۱۲- حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید. (مشابه کتاب درسی)

الف) مجموع اعداد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶

ب) مجموع اعداد دورقمی که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارند.

۱۳- تعدادی توپ و یک سبد مطابق شکل روی یک خط مستقیم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد ۲ m و فاصلهٔ بقیهٔ توپ‌ها از یکدیگر ۳ m است. دونده‌ای از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته و تا سبد برگشته و توپ را درون سبد می‌اندازد.



او این عمل را برای بقیهٔ توپ‌ها هم انجام می‌دهد. اگر این دونده در مجموع ۳۷۴ متر دویده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟ (مشابه کتاب درسی)

۱۴- گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

الف) قدرنسبت دنبالهٔ هندسی $۲\sqrt{۲},۱,\ldots$ برابر است با ..... .
☐ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ☐ $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

ب) مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ $۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\ldots$ برابر است با ..... .
☐ $\frac{۱۰۲۳}{۴}$ ☐ $\frac{۱۰۲۳}{۲}$

پ) مجموع $۱ + ۲ + ۲^۲ + \cdots + ۲^۹$ برابر است با ..... .
☐ ۵۱۱ ☐ ۱۰۲۳

www.my-dars.ir

۱۵- مجموع ۱۰ جملهٔ اول هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \ldots$ ب) $۲, \sqrt{۲}, ۱, \ldots$ پ) $۲, -۶, ۱۸, \ldots$ ت) $a_n = \frac{۲^{n-۱}}{۳}$

۱۶- مجموع چند جمله از دنبالهٔ هندسی $۶, -۱۲, ۲۴, \ldots$ برابر -۱۲۶ است؟ (نهایی ۹۰)

۱۷- حداقل چند جمله از دنبالهٔ $۱, ۳, ۹, \ldots$ را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۱۸- مجموع جمله‌های اول و سوم در یک دنبالهٔ هندسی برابر ۱ و مجموع چهار جملهٔ اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جملهٔ اول را بیابید.

۱۹- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ اول برابر ۱۳۶ و مجموع سه جملهٔ بعدی ۱۷ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

۲۰- مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $۲, x, ۶, \ldots$ را بیابید. $(q > ۰)$

۲۱- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود؟ (نهایی ۹۴)

۲۲- حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ $۲, ۲\sqrt{۲}, ۴, \ldots$ را به دست آورید.

۲۳- به کمک اتحادها عبارت روبه‌رو را ساده کنید. $A = \frac{(x^۵ + ۱)(x - ۱)}{x^۲ - ۱}$ (نهایی ۹۱)

B سؤال‌های تکمیلی

۲۴- با استفاده از فرمول S_n و بار دیگر با استفاده از یک مربع $n \times n$ نشان دهید: $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$

۲۵- جملهٔ ششم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۱۰ است. مجموع یازده جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۲۶- در یک دنبالهٔ حسابی از جملهٔ اول ۲ واحد کم و به قدرنسبت ۳ واحد اضافه می‌کنیم. مجموع ده جملهٔ اول چه تغییری می‌کند؟

۲۷- بین دو عدد ۳ و ۴۷، تعداد ۱۰ واسطهٔ حسابی قرار می‌دهیم. مجموع واسطه‌ها را به دست آورید.

۲۸- زوایای داخلی یک ۵ ضلعی محدب برحسب درجه، تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت ۶° باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ ۵ ضلعی را به دست آورید.

۲۹- حاصل $A = (۱ + x + x^۲ + \cdots + x^۸)(۱ - x + x^۲ - \cdots + x^۸)$ را به ازای $x = \sqrt{۲}$ به دست آورید.

۳۰- بین دو عدد ۱۵۳۶ و ۳، هشت عدد طوری قرار می‌دهیم که اعداد تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. مجموع این واسطه‌ها را به دست آورید.

۳۱- توپی را از ارتفاع ۵۰ متری رها می‌کنیم تا در یک مسیر مستقیم با زمین برخورد کند. بعد از هر بار برخورد توپ با زمین، $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع قبلی بالا می‌آید. وقتی توپ برای بار هفتم با زمین برخورد می‌کند، چه مسافتی را پیموده است؟

۳۲- اگر $x = ۲$ باشد، حاصل $(x^{۳۱} - ۱)(۱ + x^{-۱} + x^{-۲} + \cdots + x^{-۳۰})^{-۱}$ را به دست آورید.

۳۳- ثابت کنید: $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + x^{n-۳}y^۲ + \cdots + y^{n-۱})$

C سؤال‌های فضایی

۳۴- یک دنبالهٔ حسابی ۱۰۰ جمله دارد. اگر جمع سه جملهٔ اول با سه جملهٔ آخر برابر ۱۵۰ باشد، مجموع همهٔ جمله‌ها چه‌قدر است؟

۳۵- در مسئلهٔ ۱۳ اگر دونده تا پایان زمان، ۹۰۰ m را طی کرده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟

۳۶- مقدار x را از معادلهٔ $x + \cdots + ۹ + ۵ + ۱ = ۲۳۱$ به دست آورید.

۳۷- اعداد طبیعی را به صورت $\{۱\}, \{۲, ۳, ۴\}, \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}, \ldots$ دسته‌بندی می‌کنیم (یعنی آخرین جملهٔ هر دسته، مربع کامل است). مجموع جمله‌های دستهٔ یازدهم را به دست آورید.

۳۸- a_n یک دنبالهٔ حسابی است. حاصل $S = \frac{۱}{a_۱a_۲} + \frac{۱}{a_۲a_۳} + \cdots + \frac{۱}{a_{n-۱}a_n}$ را بیابید.

۳۹- جمله‌های سوم، هفتم و نهم از یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی هستند. مجموع چند جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر صفر است؟

گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱- الف) جمله‌های ردیف زوج به صورت $\ldots, \boxed{۱۱}, ۷, \boxed{۳}, -۱$ هستند؛ پس خودشان یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $+۸$ خواهند بود.

ب) $S_۲ = ۲ = a_۱ + a_۲$ و $S_۲ = ۶$ است، پس $a_۲ = ۴$ خواهد بود.

۲- الف) $۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{n=۱۰} ۱+۲+\cdots+۱۰ = \frac{۱۰\times۱۱}{۲} = ۵۵$ (در مجموع ۵۵ سکه)

ب) از نقطهٔ اول به هر کدام از ۹ نقطهٔ دیگر، از نقطهٔ دوم به ۸ نقطهٔ باقی‌مانده و ... پس در کل داریم:

$۹+۸+۷+\cdots+۱ = \frac{۹\times۱۰}{۲} = ۴۵$ (در مجموع ۴۵ وتر)

۳- در هر قسمت $a_۱$ و d را به دست آورده و در رابطهٔ $S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)$ جای‌گذاری می‌کنیم:

الف) $-۵,-۳,-۱,\ldots \xrightarrow[d=۲]{a_۱=-۵} S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(-۵)+۱۹(۲)) = ۲۸۰$

ب) $-۵,۰,۵,\ldots \xrightarrow[d=۵]{a_۱=-۵} S_{۲۰} = ۱۰(-۱۰+۱۹(۵)) = ۸۵۰$

پ) $a_n = ۳n-۱ \Rightarrow ۲,۵,۸,\ldots \xrightarrow[d=۳]{a_۱=۲} S_{۲۰} = ۱۰(۴+۱۹(۳)) = ۶۱۰$

ت) $a_n = \frac{n}{۲}+۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲},۲,\ldots \xrightarrow[d=۲-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}]{a_۱=\frac{۳}{۲}} S_{۲۰} = ۱۰(۳+۱۹(\frac{۱}{۲})) = ۱۲۵$

۴- باید ببینیم با جمع‌کردن چند جمله (*یعنی n مجهوله*) $S_n = ۱۷۶$ می‌شود.

$\frac{n}{۲}(۲+(n-۱)(۳)) = ۱۷۶ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n-۱) = ۱۷۶ \xrightarrow{\times۲} n(۳n-۱) = ۳۵۲$

(طرف اومده معادلهٔ بالا رو حل کنه وقت نهایی تموم شده! دیدم که می‌گم.)

می‌توانیم با روش Δ معادلهٔ درجه‌دوم را حل کنیم اما طولانی خواهد بود. چون n عددی طبیعی است بهتر است با جستجو آن را به دست آوریم:

$n = ۱۰ \Rightarrow ۱۰\times(۲۹) = ۲۹۰ \xrightarrow{(کمه)} n = ۱۱ \Rightarrow ۱۱(۳۲) = ۳۵۲ \checkmark \Rightarrow$ جمع یازده جمله

۵- باید ببینیم به ازای کدام n، $S_n > ۱۲۵$ می‌شود. با استفاده از فرمول S_n داریم:

$\frac{n}{۲}(-۲+۳(n-۱)) > ۱۲۵ \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳n-۵) > ۱۲۵ \xrightarrow{\times۲} n(۳n-۵) > ۲۵۰ \xrightarrow{(با\ جستجو\ برای\ n)} n = ۱۰$

$\Rightarrow ۱۰(۲۵) > ۲۵۰$ برقرار نیست $\Rightarrow n \geq ۱۱$

با جمع حداقل یازده جمله، از ۱۲۵ بیشتر می‌شود.

۶- شبیه مسئلهٔ قبلی باید $S_n > ۳۰۰$ باشد:

$\frac{n}{۲}(\overbrace{۶+(n-۱)(۶)}^{۶n}) > ۳۰۰ \Rightarrow ۳n^۲ > ۳۰۰ \Rightarrow n^۲ > ۱۰۰ \Rightarrow n > ۱۰ \Rightarrow n \geq ۱۱$

توجه دارید چون n عددی طبیعی است؛ پس $n < -۱۰$ دیگر قابل‌قبول نیست *(و إلا تو حالت کلی از $x^۲ > ۱۰۰$ با رادیکال‌گیری نتیجه می‌گیریم $|x| > ۱۰$. از این هم می‌شه $x > ۱۰$ یا $x < -۱۰$).*

۷- اول جمله‌های فارسی را به زبان ریاضی بنویسیم. بعد هم با فرمول S_n و a_n باز می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_{۲۰} = ۳S_{۱۲} \Rightarrow \frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d) = ۳\times\frac{۱۲}{۲}(۲a_۱+۱۱d) \xrightarrow[\text{و ساده‌سازی}]{\div۴} \\ a_۳ = ۶ \Rightarrow a_۱+۲d = ۶ \end{cases} \begin{cases} ۸a_۱+۴d = ۰ \\ a_۱+۲d = ۶ \end{cases} \xrightarrow{\times(-۸)}$$

$d = ۴ \Rightarrow a_۱ = -۲$

۸- مجموع ۵ جملهٔ اول همان $S_۵$ است، پس $S_۵ = ۱۰$. مجموع ۵ جملهٔ بعدی یعنی $a_۶ + a_۷ + \cdots + a_{۱۰}$. برای این جمع کافی است جمع جمله‌های اول تا دهم را از جمع جمله‌های اول تا پنجم کم کنیم. پس $S_{۱۰} - S_۵ = ۳۵$.

$$\begin{cases} S_۵ = ۱۰ \Rightarrow \frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d) = ۱۰ \Rightarrow ۵a_۱+۱۰d = ۱۰ \xrightarrow{\div۵} \\ S_{۱۰}-۱۰ = ۳۵ \Rightarrow S_{۱۰} = ۴۵ \Rightarrow ۵(۲a_۱+۹d) = ۴۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_۱+۲d = ۲ \\ ۲a_۱+۹d = ۹ \end{cases}$$

$d = ۱ \Rightarrow a_۱ = ۰$

پس: $S_{۵۰} = ۲۵(۰+۴۹(۱)) = ۱۲۲۵$

مای درس
گروه ورزشی عصر
www.my-dars.ir

۹- S_n همان جمع جمله‌های اول تا n را به ما می‌دهد. پس:

الف) $n=10 \Rightarrow S_{10}=10\times 39=390$

ب) $a_6+a_7+\cdots+a_{15}=S_{15}-S_5=15(59)-5(19)=790$

پ) طبق توضیحات پلهٔ چهارم:

$$S_1=3 \Rightarrow a_1=3 \ , \ S_2=14 \Rightarrow \overset{3}{a_1+a_2=14} \Rightarrow a_2=11 \Rightarrow d=a_2-a_1=8$$
$$a_n=a_1+(n-1)d=3+(n-1)(8)=8n-5$$

۱۰- جمله‌های ردیف زوج همان $\overset{4}{a_2}, \overset{2}{a_4}, \ldots, a_{20}$ هستند (*تعدادشون ۱۰ تاس*). این‌ها خود یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶ هستند، پس مجموع آن‌ها می‌شود: $\frac{10}{2}(-8+9(6))=230$.

جمله‌های ردیف فرد هم همان $\overset{1}{a_1}, \overset{7}{a_3}, \ldots, a_{19}$ (*تعدادشون بازم ۱۰ تاس*) هستند. این‌ها هم دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۶+ هستند پس جمع آن‌ها می‌شود: $\frac{10}{2}(-14+9(6))=200$.

۱۱- دو معادله را به صورت ریاضی می‌نویسیم. می‌توانیم آن‌ها را باز و از حل دستگاه دو معادله دو مجهول، a_1 و d را بیابیم. اما صبر کنید اگر این دو معادله را کم کنیم، به نتیجهٔ خوبی می‌رسیم:

$$\begin{cases} a_2+a_4+\cdots+a_{20}=590 \\ -\left\{a_1+a_3+\cdots+a_{19}=530\right. \end{cases}$$
$$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{20}-a_{19})=60 \xrightarrow{\text{(اختلاف هر دو جملهٔ متوالی قدرنسبت می‌شه)}} \underbrace{d+d+\cdots+d}_{10d}=60 \Rightarrow d=6$$

جمع ۲۰ جملهٔ اول برابر $590+530=1120$ است. با فرمول S_n داریم:

$$S_{20}=10(2a_1+19(6))=1120 \Rightarrow a_1=-1$$

۱۲- الف) اولین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶، عدد ۱۰۲ (*به ۲ و ۳ می‌فوره*) است. مجموع اعداد $102, 108, 114, \ldots$ (+۶، +۶) را می‌خواهیم. آخرین عدد سه‌رقمی بخش‌پذیر بر ۶ نیز عدد ۹۹۶ (*بازم به ۲ و ۳ می‌فوره خالا هی امتحان کن!*) است. حالا ببینیم چندتا عدد داریم:

جملهٔ عمومی با $a_1=102$ و $d=6$ را نوشته و جملهٔ nام را برابر ۹۹۶ قرار می‌دهیم:

$$996=102+(n-1)(6) \Rightarrow n=150 \quad \text{۱۵۰تا عدد داریم} \Rightarrow S_{150}=\frac{150}{2}(2(102)+149(6))=82350$$

ب) این اعداد $12, 17, 22, \ldots$ (*دو رقمی‌های به شکل* $5k+2$) هستند. آخرین عدد ۹۷ است. شبیه قبلی اول تعداد این اعداد را به دست می‌آوریم:

$$97=12+(n-1)(5) \Rightarrow n=18 \Rightarrow S_{18}=9(2(12)+17(5))=981$$

۱۳- دونده برای انداختن توپ اول $2\times 2=4$ متر، برای توپ دوم $2(2+3)=10$ متر، برای توپ سوم $2(2+3+3)=16$ و ... می‌دود. مقدار طی‌شده برای انداختن توپ nام، یک دنبالهٔ حسابی با $a_1=4$ و $d=6$ می‌شود. حالا:

$$S_n=374 \Rightarrow \frac{n}{2}(8+(n-1)(6))=\frac{n}{2}(6n+2)=3n^2+n=374$$
$$\xrightarrow{\text{به ازای n=10 می‌شه ۳۱۰ پس کمه}} n=11 \Rightarrow 3(121)+11=374 \ \checkmark$$

پس ۱۱ توپ را درون سبد انداخته است.

۱۴- الف) در هر دنبالهٔ هندسی حاصل تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی برابر با قدرنسبت است، پس:

$$q=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ب) $q=2$ و $a_1=\frac{1}{4}$ است، پس:

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{\frac{1}{4}(1-2^{10})}{1-2}=\frac{1}{4}(1023)=\frac{1023}{4}$$

پ) توجه دارید که جمع ده جمله (*نَه نُه جمله!*) را می‌خواهیم:

$$S_{10}=\frac{(1)(1-2^{10})}{1-2}=1023$$

۱۵-

الف) $a_1=\frac{1}{2}, \ q=\frac{1}{2} \Rightarrow S_{10}=\frac{(\frac{1}{2})(1-(\frac{1}{2})^{10})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$

ب) $a_1=2 \ , \ q=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{10}=\frac{(2)(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^{10})}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4(1-\frac{2^5}{2^{10}})}{2-\sqrt{2}}=\frac{4\times\frac{31}{32}}{2-\sqrt{2}}=\frac{31}{8(2-\sqrt{2})}$

گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

پ) $a_1=2\ ,\ q=-3 \Rightarrow S_{10}=\frac{(2)(1-(-3)^{10})}{1-(-3)}=\frac{1-3^{10}}{2}$

ت) $a_n=\frac{2^{n-1}}{3} \Rightarrow \frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\ldots \xrightarrow[q=2]{a_1=\frac{1}{3}} S_{10}=\frac{\frac{1}{3}(1-2^{10})}{1-2}=\frac{1023}{3}=341$

۱۶- $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=-126 \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{3}=-126 \Rightarrow 1-(-2)^n=-63 \Rightarrow 64=(-2)^n \Rightarrow n=6$

۱۷- $S_n>500 \Rightarrow \frac{1-3^n}{-2}>500 \Rightarrow \frac{3^n-1}{2}>500 \Rightarrow 3^n-1>1000 \Rightarrow 3^n>1001$

$\xrightarrow{\text{با جستجو}} n\geq 7$ (حداقل ۷ جمله)

۱۸- $\begin{cases} a_1+a_3=1 \xrightarrow{a_n=a_1q^{n-1}} a_1+a_1q^2=1 \Rightarrow a_1(1+q^2)=1 \\ S_4=3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=3 \xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} \frac{a_1\cancel{(1-q)}(1+q)(1+q^2)}{\cancel{1-q}}=3 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{دو رابطه را تقسیم می‌کنیم}} \frac{\cancel{a_1}(1+q)\cancel{(1+q^2)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1+q^2)}}=3 \Rightarrow q=2 \Rightarrow a_1=\frac{1}{5} \Rightarrow S_6=\frac{63}{5}$

۱۹- مجموع ۳ جملهٔ اول که همان S_3 است. سه جملهٔ دوم a_4, a_5, a_6 است که جمع آن‌ها برابر S_6-S_3 است.

$\left.\begin{array}{l} S_3=136 \Rightarrow \frac{(a_1)(1-q^3)}{1-q}=136 \\ S_6-S_3=17 \Rightarrow S_6=136+17=153 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=153 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(با تقسیم دو طرف و ساده کردن)}} \frac{1-q^6}{1-q^3}=\frac{153}{136}=\frac{9}{8}$

$\xrightarrow{\text{مزدوج}} \frac{\cancel{(1-q^3)}(1+q^3)}{\cancel{1-q^3}}=\frac{9}{8} \Rightarrow q^3=\frac{1}{8} \Rightarrow q=\frac{1}{2}$

۲۰- در فرمول S_n نیاز به a_1 و q داریم.

$a_3=6 \Rightarrow \overset{2}{a_1}q^2=6 \Rightarrow q^2=3 \xrightarrow{q>0} q=\sqrt{3}$

$S_{10}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2(1-\sqrt{3}^{10})}{1-\sqrt{3}}=\frac{2(1-3^5)}{1-\sqrt{3}}=\frac{484}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=242(\sqrt{3}+1)$

۲۱- مساحت مربع برابر ۱ است. در مرحله اول $\frac{1}{2}$، در مرحلهٔ دوم $\frac{1}{4}$ و ... در مرحلهٔ nام، $(\frac{1}{2})^n$ از مساحت مربع رنگ می‌شود:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(\frac{1}{2})^n\geq\frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{\cancel{1-\frac{1}{2}}}\geq\frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{100}\geq(\frac{1}{2})^n \xrightarrow[\text{جهت نامساوی عوض می‌شه}]{\text{(هر دو طرف مثبتن با معکوس کردن}} 100\leq 2^n \xrightarrow{\text{چستجو}} 7\leq n$

پس از حداقل ۷ مرحله، ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود.

۲۲- توجه کردید که سؤال S_{20} را نمی‌خواهد. گفته حاصل‌ضرب.

حاصل ضرب n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی

$(a_1a_2\ldots a_n)=(a_1)(a_1q)(a_1q^2)\ldots(a_1q^{n-1})=(a_1)^nq^{1+2+\cdots+n-1}=(a_1)^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}$

در دنبالهٔ هندسی داده‌شده $a_1=2$ و $q=\sqrt{2}$ است. پس:

ضرب ۲۰ جملهٔ اول $=2^{20}\times(\sqrt{2})^{\frac{19\times20}{2}}=2^{20}\times(\sqrt{2})^{190}=2^{20}\times2^{95}=2^{115}$

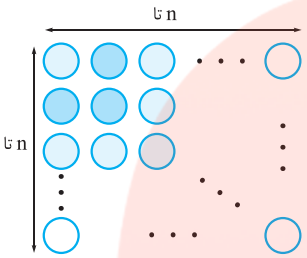
۲۳- $A=\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$

مای درس
کنکور و آموزش عصر
www.my-dars.ir

۲۴- **روش اول**

$$S_n = \underbrace{۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)}_{\text{مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی با } a_۱=۱ \text{ و } d=۲} = \frac{n}{۲}(۲+۲(n-۱)) = n^۲$$

روش دوم به شکل روبه‌رو توجه کنید. $n \times n = n^۲$ دایره در شکل وجود دارد. حالا دایره‌ها را طور دیگری شمارش می‌کنیم. دایره‌ها را با الگوی مقابل آبی و سیاه می‌کنیم. تعداد آن‌ها می‌شود $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)$. چون یک تعداد دایره را شمارش کرده‌ایم دو عبارت به دست آمده، برابرند. پس:



$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = n^۲$$

رابطه می‌گوید مجموع n عدد فرد متوالی که از یک شروع می‌شود برابر تعداد آن‌ها به توان ۲ است.

۲۵- **رابطهٔ اندیسی در دنبالهٔ حسابی**

رابطهٔ جالبی بین جمله‌های دنبالهٔ حسابی به نام رابطهٔ اندیسی وجود دارد. ببینید:

$$(m,n,p,k \text{ اعداد طبیعی}), m+n=p+k \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_k$$

مثلاً $a_۲ + a_۶ = a_۱ + a_۷$ **(چون جمع اندیس‌های دو طرف برابر ۸ است) یا** $a_۱ + a_۹ = a_۲ + a_۸ = a_۳ + a_۷ = a_۵ + a_۵$

البته توجه کنید رابطه‌ای به صورت $a_۲ + a_۸ = a_{۱۰}$ **درست نیست (دوتا این‌ور و دوتا اون‌ور و اندیس‌ها رو نمی‌شه جمع کرد).**

طبق رابطهٔ اندیسی داریم:

$$\overset{۱۰}{a_۶} + \overset{۱۰}{a_۶} = a_۱ + a_{۱۱} = a_۲ + a_{۱۰} = \cdots = a_۷ + a_۵$$

$$\Rightarrow a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_۴ + a_۵ + \overset{۱۰}{a_۶} + a_۷ + a_۸ + a_۹ + a_{۱۰} + a_{۱۱} = ۱۱۰$$

(۲۰ و ۲۰)

۲۶- دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول $a_۱$ و قدرنسبت d در نظر می‌گیریم. مجموع ۱۰ جملهٔ اول می‌شود $S_{۱۰} = ۵(۲a_۱ + ۹d)$. مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنبالهٔ جدید با جملهٔ اول $a_۱ - ۲$ و $d+۳$ نیز می‌شود:

$$S'_{۱۰} = ۵(۲a_۱ - ۴ + ۹(d+۳))$$

حالا

$$S'_{۱۰} - S_{۱۰} = ۵[۲a_۱ - ۴ + ۹(d+۳) - ۲a_۱ - ۹d] = ۱۱۵$$

۲۷- طبق نکته‌های پلهٔ دوم $d = \frac{۴۷-۳}{۱۰+۱} = ۴$ خواهد بود.

$$\overset{+۴}{\frown}$$
$$۳ , \underbrace{\boxed{۷}, \square, \ldots, \square}_{\text{۱۰ واسطه}}, ۴۷$$

پس واسطه‌ها ۷,۱۱,... می‌شود. جمع ۱۰ جملهٔ این دنباله برابر است با: $S_{۱۰} = ۵(۱۴ + ۹(۴)) = ۲۵۰$. توجه دارید که جمع واسطه‌ها را می‌خواهیم پس جملهٔ اول ۷ است نه ۳.

۲۸- **مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب**

مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب از رابطهٔ $(n-۲)۱۸۰$ به دست می‌آید.

مجموع زوایای داخلی ۵ ضلعی می‌شود $۵۴۰ = ۳ \times ۱۸۰$. حالا $S_۵ = ۵۴۰$ است. پس:

$$\frac{۵}{۲}(۲a_۱ + ۴(۶)) = ۵۴۰ \Rightarrow a_۱ = ۹۶^\circ$$

۲۹- اول بگویید ببینیم پرانتز اول جمع ۸ جمله است یا ۹ جمله؟ درست است جمع نه جملهٔ دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت x. دومی هم همین‌طور با قدرنسبت $-x$. پس:

$$A = \frac{۱-x^۹}{۱-x} \times \frac{۱-(-x)^۹}{۱+x} = \frac{(۱-x^۹)(۱+x^۹)}{۱-x^۲} = \frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^۲} \xrightarrow{x=\sqrt{۲}} A = \frac{۱-۲^۹}{۱-۲} = ۵۱۱$$

۳۰-

$$\overset{\times ۲}{\frown}$$
$$\underset{\text{جملهٔ اول}}{۳} , \underbrace{\boxed{۶}, \square, \ldots, \square}_{\text{۸ واسطه}}, \underset{\text{جملهٔ دهم}}{۱۵۳۶} \qquad a_{۱۰} = a_۱ q^۹ \Rightarrow ۱۵۳۶ = ۳ \times q^۹ \Rightarrow q^۹ = ۵۱۲ \Rightarrow q = ۲$$

پس کافی است مجموع ۸ جملهٔ دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۶ و قدرنسبت ۲ را به دست آوریم:

$$S_۸ = \frac{a_۱(۱-q^۸)}{۱-q} = \frac{۶(۱-۲^۸)}{۱-۲} = \frac{۶(-۲۵۵)}{-۱} = ۱۵۳۰$$

مای درس
www.my-dars.ir

۳۱-

$$\text{مجموع} = ۵۰ + ۲(\frac{۵۰}{۳}) + ۲(\frac{۵۰}{۳^۲}) + \cdots + ۲(\frac{۵۰}{۳^۶}) \quad \text{(دقت کردید!)}$$

بار اول فقط از بالا به پایین آمده است ($۵۰\ m$). اگر این جمله را جدا کنیم، ۶ جملهٔ بعدی تشکیل دنبالهٔ هندسی با $a_۱ = \frac{۱۰۰}{۳}$ و $q = \frac{۱}{۳}$ می‌دهند

$$\text{مسافت} = ۵۰ + \frac{\frac{۱۰۰}{۳}(۱-(\frac{۱}{۳})^۶)}{۱-\frac{۱}{۳}} = ۵۰ + ۵۰(۱-\frac{۱}{۷۲۹}) = ۵۰(۲-\frac{۱}{۷۲۹}) = ۵۰ \times \frac{۱۴۵۷}{۷۲۹} \simeq ۱۰۰\ m$$

۳۲- هر چی هست زیر سر پرانتز دوم هست! یک وقت به سَرتان نزند، توان -۱ را برای همه بیاورید و بنویسید: $۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۳۱}$ (دیدم که

$$(x^{۳۱}-۱)(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}+\cdots+\frac{۱}{x^{۳۰}})^{-۱} = (x^{۳۱}-۱)(\frac{x^{۳۰}+x^{۲۹}+\cdots+۱}{x^{۳۰}})^{-۱} = \overbrace{(x^{۳۱}-۱)}^{\text{(اتحاد)}} \times \frac{x^{۳۰}}{x^{۳۰}+x^{۲۹}+\cdots+۱}$$

$$-۱)\cancel{(x^{۳۰}+x^{۲۹}+\cdots+۱)} \times \frac{x^{۳۰}}{\cancel{(x^{۳۰}+\cdots+۱)}} \xrightarrow{x=۲} A = ۲^{۳۰}$$

۳۳-

$$y^n = y^n((\frac{x}{y})^n - ۱) = y^n(\frac{x}{y}-۱)((\frac{x}{y})^{n-۱} + (\frac{x}{y})^{n-۲} + \cdots + ۱)$$

$$\overbrace{\frac{x}{y}-۱)(y^{n-۱})}^{\text{(همون } y^n\text{)}}((\frac{x}{y})^{n-۱} + (\frac{x}{y})^{n-۲} + \cdots + ۱) = (x-y)(x^{n-۱} + x^{n-۲}y + \cdots + y^{n-۱})$$

۳۴- در پلهٔ سوم گفتیم مجموع n جملهٔ اول از $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$ هم به دست می‌آید، پس $S_{۱۰۰} = ۵۰(a_۱ + a_{۱۰۰})$. از طرفی:

$$a_{۱۰۰}) + (a_۲ + a_{۹۹}) + (a_۳ + a_{۹۸}) = ۱۵۰$$

اما طبق رابطهٔ اندیسی (زیرپلهٔ سؤال ۲۵) $a_۱ + a_{۱۰۰} = a_۲ + a_{۹۹} = a_۳ + a_{۹۸}$. بنابراین $a_۱ + a_{۱۰۰} = ۵۰$ و $S_{۱۰۰} = ۵۰ \times ۵۰ = ۲۵۰۰$

۳۵- اگر شبیه مسئلهٔ ۱۳، بخواهید معادلهٔ $S_n = ۹۰۰$ را حل کنید، می‌بینید که معادله جواب طبیعی ندارد. احتمالاً قبل از این‌که دونده تو را درون سبد بیاندازد وقت تمام شده است! باید بزرگ‌ترین مقدار n را طوری به دست آوریم که $S_n < ۹۰۰$.

۱۷ توپ را درون سبد انداخته است. $+۱) < ۹۰۰ \Rightarrow$ بیشترین مقدار $n = ۱۷$

۳۶-

$$۲۳۱ \Rightarrow \frac{n}{۲}(\overbrace{۲ + (n-۱)(۴)}^{۴n-۲}) = ۲۳۱ \Rightarrow ۲n^۲ - n = ۴۶۲ \Rightarrow n = ۱۱$$

یعنی جمع یازده جمله برابر ۲۳۱ شده است. پس x جملهٔ یازدهم دنبالهٔ حسابی است. $a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d = ۱ + ۴۰ = ۴۱$

۳۷- الگوی دسته‌بندی را ببینید:

$$\overbrace{۲,۳,\underset{۲^۲}{④}}^{\text{دستهٔ دوم}}\} \quad \overbrace{\{۵,\ldots,\underset{۳^۲}{⑨}}^{\text{دستهٔ سوم}}\} \quad \overbrace{\{۱۰,۱۱,\ldots,\underset{۴^۲}{⑯}}^{\text{دستهٔ چهارم}}\} \ldots \quad \overbrace{\{۱۰^۲+۱,\ldots,۱۱^۲}^{\text{دستهٔ یازدهم}}\}$$

بنابراین دستهٔ یازدهم $\{۱۰۱,۱۰۲,\ldots,۱۲۱\}$ است. جمع این بیست و یک جمله را خودتان به دست آورید. (چیه همه رو من نباید بگم که!)

۳۸- اختلاف هر دو جملهٔ متوالی برابر d است. پس ربط‌دادن این جمع به تفاضل ایدهٔ خوبی برای شروع است. ببینید:

$$= \frac{۱}{d}(\frac{a_۲ - a_۱}{a_۱a_۲}) = \frac{۱}{d}(\frac{۱}{a_۱} - \frac{۱}{a_۲})$$

$$= \frac{۱}{d}[\frac{۱}{a_۱} - \cancel{\frac{۱}{a_۲}} + \cancel{\frac{۱}{a_۲}} - \cancel{\frac{۱}{a_۳}} + \cdots + \cancel{\frac{۱}{a_{n-۱}}} - \frac{۱}{a_n}] = \frac{۱}{d}[\frac{a_n - a_۱}{a_۱a_n}] = \frac{۱}{d}(\frac{(n-۱)d}{a_۱a_n}) = \frac{n-۱}{a_۱a_n}$$

مای درس
گروه آموزشی
www.my-dars.ir