۱ - کدام گزینه مثال نقض دارد؟

(۱) هر مربع یک لوزی است.
(۲) هر عدد اول بزرگ تر از ۲، فرد است.
(۳) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.
(۴) توان دوم هر عدد طبیعی بزرگ تر از توان سوم آن است.

۲ - کدام عدد کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت» را نقض می کند؟

(۱) ۵۶ (۲) ۶۴ (۳) ۷۲ (۴) ۷۴

۳ - کدام گزاره مثال نقض ندارد؟

(۱) هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد طبیعی متوالی نوشت.
(۲) هر عدد طبیعی به صورت مجموع مربع‌های سه عدد صحیح نوشته می‌شود.
(۳) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب صحیح ۸، یک واحد بیشتر است.
(۴) اگر n نقطه‌ی متمایز روی محیط دایره را دو به دو به هم وصل کنیم 2^{n-1} ناحیه به وجود می‌آید.

۴ - در اثبات نامساوی $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$ به روش اثبات بازگشتی به کدام رابطه‌ی بدیهی می‌رسیم؟

(۱) $(ad+bc)^2 \geq 0$ (۲) $(ad-bc)^2 \geq 0$ (۳) $(ab+cd)^2 \geq 0$ (۴) $(ab-cd)^2 \geq 0$

۵ - کدام یک از اعداد زیر، مثال نقضی برای حکم «اگر n یک عدد طبیعی فرد باشد، آنگاه $2^n - 2$ بر n بخش‌پذیر است»، می‌باشد؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

۶ - حکم «اگر A و B، دو ماتریس هم مرتبه باشند و $AB=\bar{O}$، آنگاه $A=\bar{O}$ یا $B=\bar{O}$»، مفروض است. برای .... درستی این حکم از روش .... استفاده می کنیم.

(۱) اثبات ـ استدلال استنتاجی (۲) رد ـ مثال نقض (۳) اثبات ـ برهان خلف (۴) رد ـ برهان خلف

۷ - به ازای کدام عبارت زیر، گزارهٔ «اگر $x=1$ باشد، آنگاه...» قضیه‌ای است که عکس آن لزوماً برقرار نیست؟ $(x \in \mathbb{R})$

(۱) $(x-1)(x^2+x+1)=0$ (۲) $(x-1)(x^2+2x-3)=0$ (۳) $(x-1)(x^2-2x+1)=0$ (۴) $(x-1)(x^2+1)=0$

۸ - در اثبات نامساوی $\frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq \frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطهٔ بدیهی به دست آمده کدام است؟ (x و y دو عدد حقیقی مثبت هستند.)

(۱) $(x+y)^2>0$ (۲) $x^2+y^2>0$ (۳) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$ (۴) $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$

۹ - درستی کدام‌یک از گزاره‌های زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

(۱) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳، در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد.
(۲) اگر n عددی طبیعی و n^2 مضرب ۸ باشد، آنگاه n مضرب ۴ است.
(۳) به‌ازای هیچ دو عدد اول p و q، عدد $p+q$ اول نیست.
(۴) عدد ۸ را نمی توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۱۰ - اگر α و β دو عدد گنگ ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha-\beta$ .... است و $\alpha+2\beta$ .... است.

(۱) گنگ ـ گنگ (۲) گنگ ـ گویا (۳) گویا ـ گنگ (۴) گویا ـ گویا

۱۱ - اگر a, b, c و d اعداد صحیحی باشند به طوری که $ad=bc$، در این صورت کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

(۱) $c^2|ad$ (۲) $b=d\ ,\ a=c$ (۳) $a|bc^2$ (۴) $bc^2|ad$

۱۲ - اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشند، آنگاه بزرگ‌ترین عددی که a^4-b^4 همواره بر آن بخش‌پذیر می‌باشد، کدام است؟

(۱) ۸۰ (۲) ۴۰ (۳) ۹۶ (۴) ۱۶

۱۳ - چند زوج مرتب (a,b) از اعداد صحیح و ناصفر وجود دارد به گونه‌ای که رابطهٔ $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a+b}$ برقرار باشد؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۱۴ - برای .... درستی گزارهٔ «$n^2+3n+13$ به‌ازای هر عدد طبیعی n، عددی اول است.»، می توان از روش .... استفاده کرد.

(۱) اثبات - در نظر گرفتن همهٔ حالت‌ها (۲) اثبات - برهان خلف (۳) رد - مثال نقض (۴) رد - برهان خلف

۱۵ - اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، آنگاه گزارهٔ $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$، هم‌ارز کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟

(۱) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq 0$

(۲) $x^2(y-1)^2+y^2(z-1)^2+z^2(x-1)^2 \geq 0$

(۳) $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2 \geq 0$

(۴) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$

محترم فهدی

محترم فهدی

پاسخنامه کلیدی

۱	۴
۲	۲
۳	۳
۴	۲
۵	۴
۶	۲
۷	۲
۸	۳
۹	۳
۱۰	۱
۱۱	۳
۱۲	۴
۱۳	۱
۱۴	۳
۱۵	۴

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$a=1 \Rightarrow a^2=a^3$$

۲ - گزینه ۲ تذکر:اعداد به فرم 2^n را نمی توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت.

۳ - گزینه ۳ همواره مربع عدد طبیعی فرد به صورت $8k+1$ است و نقضی ندارد.

مثال نقض گزینه‌ی ۱، اعداد 2^n است.

مثال نقض گزینه‌ی ۲، اعداد $8k+7$ است.

مثال نقض گزینه‌ی ۴، اعداد $n \geq 6$ است.

۴ - گزینه ۲ عبارت داده شده را تا حد امکان ساده می‌کنیم

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \geq a^2c^2+b^2d^2+2acbd$$
$$\Leftrightarrow a^2d^2-2acbd+b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad-bc)^2 \geq 0$$

۵ - گزینه ۴ اگر $n=9$، آنگاه $2^9-2=510$ ، واضح است که مجموع ارقام ۵۱۰، برابر ۶ است، پس این عدد بر ۹ بخش‌پذیر نیست. اگر $n=7$ ، $2^7-2=126$ می‌باشد که ۱۲۶ بر ۷ بخش‌پذیر است و اگر $n=5$ ، $2^5-2=30$ می‌باشد که ۳۰ بر ۵ بخش‌پذیر است. همچنین $n=6$ ، عدد طبیعی، فرد نیست.

۶ - گزینه ۲ تذکر: از مثال نقض برای رد یک حکم کلی استفاده می‌کنیم.

فرض می‌کنیم: $\begin{cases} A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq \bar{O} \\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\neq \bar{O}\end{cases} \Rightarrow AB=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\bar{O}$

۷ - گزینه ۲ بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱):

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ \text{یا} \\ x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta=1-4<0 \rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{فقط}} x=1$$

گزینهٔ (۲):

$$(x-1)(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

یعنی x می‌تواند برابر ۱ یا ۳− باشد پس عکس قضیه در حالت کلی برقرار نیست.

گزینهٔ (۳):

$$(x-1)(x^2-2x+1)=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \rightarrow x=1 \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{فقط}} x=1$$

گزینهٔ (۴):

$$(x-1)(x^2+1)=0 \Rightarrow \left.\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x^2+1=0 \Rightarrow \text{ریشه ندارد} \end{cases}\right\} \xrightarrow{\text{فقط}} x=1$$

۸ - گزینه ۳

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} \geq \frac{4}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy} \geq 4\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geq 0$$

۹ - گزینه ۳ برای رد گزینهٔ ۳ می‌توان مثال نقض $p=2$ ، $q=3$ را بیان کرد زیرا $p+q=5$ عدد اول است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱:

$$\text{همهٔ اعداد صحیح}\begin{cases} 3k \rightarrow \text{اول نیست} \\ \left.\begin{matrix} 3k+1 \\ 3k+2 \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{بزرگتر از ۳}]{\text{همهٔ اعداد اول}} \begin{cases} p = 3k+1 \rightarrow p^2 = 3k'+1 \\ p = 3k+2 \rightarrow p^2 = 3k'+1 \end{cases} \Rightarrow p^2 = 3k'+1 \end{cases}$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم همهٔ اعداد اول بزرگتر از ۳ بر عدد ۳ عدد ۱ می‌باشد.

گزینهٔ ۲:

برهان خلف: اگر n مضرب ۴ نباشد یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۴ اعداد ۱، ۲ یا ۳ می‌باشد.

$$\left\{\begin{matrix} n = 4q+1 \longrightarrow n^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 8q_1 + 1 \\ n = 4q+2 \longrightarrow n^2 = 16q^2 + 16q + 4 = 8q_2 + 4 \\ n = 4q'+3 \longrightarrow n^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 8q_3 + \end{matrix}\right\}$$

یعنی n مضرب ۸ نمی‌باشد و این خلاف فرض اولیه می‌باشد پس n حتماً مضرب ۴ است. $\longrightarrow$

۱۰ ـ گزینه ۱ تذکر: مجموع و تفاضل دو عدد گویا و گنگ همواره عددی گنگ است.

$$\alpha - \beta = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}} - \underbrace{2\beta}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ} = \text{گنگ} - \text{گویا}$$

$$\alpha + 2\beta = \underbrace{(\alpha+\beta)}_{\text{گویا}} + \underbrace{\beta}_{\text{گنگ}} = \text{گنگ} = \text{گنگ} + \text{گویا}$$

۱۱ ـ گزینه ۳ نکته:

$$a|b \xrightarrow{c\in\mathbb{Z}} a|bc$$

یعنی سمت راست رابطه بخش‌پذیری را می‌توان در هر عدد صحیح دلخواه ضرب کرد.

$$ad = bc \Rightarrow a|bc \xrightarrow{\text{سمت راست } \times c} a|bc^2 \rightarrow$$ گزینهٔ ۳ درست است.

مثال نقض برای گزینه‌ها:

$$ad = bc \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \;,\; c = 3 \\ a = 6 \;,\; d = 2 \end{cases}$$

گزینهٔ ۱ : $3^2 \nmid 6 \times 2$

گزینهٔ ۲ : $4 \neq 2 \;,\; 3 \neq 6$

گزینهٔ ۴ : $4 \times 9 \nmid 6 \times 2$

۱۲ ـ گزینه ۴ نکته: اگر a عددی فرد باشد مربع آن به فرم $8k+1$ می‌باشد و توان چهارم آن بفرم $16k_1 + 1$ $(k, k_1 \in \mathbb{Z})$ می‌باشد.

$$a = 2q+1 \rightarrow a^2 = 8k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a^4 = \underbrace{64k^2 + 16k}+1 = 16(\underbrace{4k^2+k}_{k_1}) + 1 = 16k_1 + 1$$

$$a^4 - b^4 = (16k_1+1) - (16k_2+1) = 16k_1 - 16k_2 = 16(k_1 - k_2) = 16k_3 \; (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z})$$

۱۳ ـ گزینه ۱

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = ab \Rightarrow a^2 + b^2 + ab = 0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 0$$

$$a^2 + b^2 + 2ab + a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + b^2 = 0$$

رابطه اخیر به ازای هیچ زوج مرتبی مانند (a, b) که در آن a و b اعداد صحیح و غیرمنفی باشند، برقرار نیست.

۱۴ ـ گزینه ۳

اگر به‌جای n عدد ۱۳ قرار بدهیم داریم:

$$n^2 + 3n + 13 = 13^2 + 3 \times 13 + 13 = 13 \times 17$$

بنابراین عدد موردنظر مرکب است و درستی حکم رد می‌شود.

پس برای رد حکم از مثال نقض استفاده کردیم.

۱۵ ـ گزینه ۴

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \xrightarrow{\times 2} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq \Leftrightarrow \underline{x^2}\, \underline{+x^2}\, \underline{+y^2}\, \underline{+y^2}\, \underline{+z^2}\, \underline{+z^2}\, \underline{-2xy}\, \underline{-2yz}\, \underline{-2zx} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$$

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۰ دقیقه

دبیرستان جلال آل احمد

نام آزمون: درس اول فصل اول گسسته

آزمون تشریحی

تاریخ آزمون: ۱۳۹۸/۰۵/۲۲

۱ - گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq ۲$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم: $x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + zx$

۲ - عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری که $x^۲ < x^۳$.

۳ - آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که: $x^۲ + y^۲ = (x+y)^۲$

۴ - گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

(برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq xy + x + y$)

۵ - ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

۶ - گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال نقض آن‌ها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

۷ - درستی یا نادرستی گزاره زیر را مشخص کنید.

اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد آنگاه $۴k + ۱$ مربع کامل است.

موفق باشید

۹۸/۵/۲۲