نام و نام خانوادگی :   سال تحصیلی :   مدت آزمون : ۱۲ دقیقه

نام دبیر : زنوززاده   کلاس : دوازدهم ریاضی ۱

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱		*		
۲				*
۳			*	
۴	*			
۵				*
۶	*			
۷		*		
۸		*		
۹				*

تعداد درست :

تعداد نادرست :

تعداد نزده :

درصد نمره با نمره منفی :

نمره با نمره منفی :

درصد نمره بدون نمره منفی :

نمره بدون نمره منفی :

ردیف	۱	۲	۳	۴
۱۰			*	
۱۱	*			
۱۲				*
۱۳	*			
۱۴			*	
۱۵				*
۱۶			*	
۱۷		*		
۱۸			*	

۱) مجموع درایه های ماتریس $A_{3\times 3}$ که درایه های عمومی آن از دستور $a_{ij}=\begin{cases} i-j+ij, i=j \\ i+j-ij, i\neq j \end{cases}$ بدست آیند کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۶   ۳) ۱۲   ۴) ۲۴

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$A_{3\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 9 \end{bmatrix}\Rightarrow \sum = 16$$

۲) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $A^2=\alpha A+\beta I_2$ دو تایی (α,β) کدام است؟

۱) $(2,11)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(4,11)$ ۴) $(4,5)$

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

روش اول :

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & 4\alpha \\ 2\alpha & 3\alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} \alpha=4 \\ \beta=5 \end{cases}$$

روش دوم : بنا به قضیه کیلی همیلتون هر ماتریسی در معادله سرشت نمایی خودش صدق می کند.یعنی

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow A^2-(a+d)A+|A|I=O, A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\Rightarrow A^2-4A-5I=O\Rightarrow$$

$$A^2=2A+5I\Rightarrow \alpha=4,\beta=5$$

۳) در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه ها در ماتریس A^6 کدام است؟

۱) ۸۱   ۲) ۲۷   ۳) ۲۴۳   ۴) ۹

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\Rightarrow A^{۲}=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۳ \\ -۳ & ۳ & -۳ \\ ۳ & -۳ & ۳ \end{bmatrix}=۳A$$

$$A^{۲}=kA \Rightarrow A^{n}=k^{n-۱}A \Rightarrow A^{۶}=۳^{۵}A \Rightarrow \sum=۳^{۵}\times ۱=۲۴۳$$

۴) اگر $A=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱۶ & |A| \end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$|A|=\frac{۱}{۱۶}(|A|^{۲}+۶۴) \Rightarrow |A|^{۲}-۱۶|A|+۶۴=۰ \Rightarrow |A|=۸$$

۵) هرگاه A ماتریس مربعی از مرتبه ۲×۲ و $|A|\neq ۰$ و $\left||A|A^{۲}-۹A\right|=|۱۶A|$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ± ۲ ۲) ± ۳ ۳) ± ۴ ۴) ± ۵

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$|kA_{n}|=k^{n}|A_{n}|$$

$$\left||A|A^{۲}-۹A\right|=|۱۶A| \Rightarrow \left|(|A|^{۲}-۹)A\right|=|۱۶A| \Rightarrow (|A|^{۲}-۹)^{۲}|A|=۱۶^{۲}|A|$$

$$\xrightarrow{|A|\neq ۰}(|A|^{۲}-۹)^{۲}=۲۵۶ \Rightarrow |A|^{۲}-۹=\pm ۱۶ \Rightarrow |A|^{۲}=-۷ \text{ غ ق ق یا } |A|^{۲}=۲۵ \Rightarrow |A|=\pm ۵$$

۶) اگر ماتریس A از مرتبه‌ی ۲ و $A^{۲}=-I$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $|A+I|$ کدام عدد می تواند باشد؟ (I ماتریس همانی از مرتبه‌ی ۲ است.)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$|A^{۲}|=(-۱)^{۲}|I|=۱\times ۱ \Rightarrow |A|^{۲}=۱ \Rightarrow |A|=\pm ۱$$

$$|(A+I)^{۲}|=|A^{۲}+۲AI+I^{۲}|=|-I+۲A+I|=۲^{۲}|A| \Rightarrow |A+I|^{۲}=۴ \Rightarrow |A+I|=\pm ۲$$

۷) در معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & ۶ & ۴ \\ ۳ & ۶ & x \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix}=۰$ حاصل ضرب ریشه ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۴

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

جواب : گزینه ۲ صحیح است. روش اوّل دترمینان را بسط می دهیم :

$$\begin{vmatrix} x & ۶ & ۴ \\ ۳ & ۶ & x \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{vmatrix} = x(۱۲-۳x)-۶(۶-x)+۴(۹-۶)=۰ \Rightarrow -۳x^۲+۱۸x-۲۴=۰ \Rightarrow x_۱x_۲=\frac{c}{a}=۸$$

روش دوم : برای $x=۲$ دو سطر اوّل و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر می شود لذا $x=۲$ یک ریشه معادله است. برای $x=۴$ دو ستون دوم و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر خواهد شد لذا $x=۴$ یک ریشه معادله است. در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها برابر ۸ است.

۸) به هر درایه‌ی ستون سوم دترمینان $\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۷ \end{vmatrix}$ کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان یک واحد بیشتر گردد؟

۱) ۲-　　۲) ۱-　　۳) ۱　　۴) ۲

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱+a \\ ۲ & ۲ & ۳+a \\ ۱ & ۳ & ۷+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۷ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۲ & ۲ & a \\ ۱ & ۳ & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} ۳ & ۲ & a \\ ۲ & ۲ & a \\ ۱ & ۳ & a \end{vmatrix} = ۱$$

$$\Rightarrow ۳(۲a-۳a)-۲(۲a-۳a)+(۲a-۲a)=۱ \Rightarrow -a=۱ \Rightarrow a=-۱$$

۹) اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۷ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(-۲A)(۳A^{-۱})$ کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۶　　۳) ۱۸　　۴) ۳۶

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$\left|(-۲A)(۳A^{-۱})\right| = (-۶)^۲\left|AA^{-۱}\right| = ۳۶|I| = ۳۶\times۱=۳۶$$

۱۰) اگر داشته باشیم، $۳A^۲+۲A+I=O$، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) $۳A+۲I$　　۲) $۲A+۳I$　　۳) $-۳A-۲I$　　۴) $-۲A-۳I$

جواب : گزینه ۳ درست است. روش اوّل : با استفاده از تجزیه یک طرف تساوی را به I و طرف دیگر حاصل ضرب ماتریس A در یک پرانتز تبدیل می کنیم.

$$۳A^۲+۲A+I=۰ \Rightarrow A(-۳A-۲I)=I$$

$$\Rightarrow |A(-۳A-۲I)|=|I| \Rightarrow |A||-۳A-۲I|=۱\neq۰ \Rightarrow \exists A^{-۱} : A^{-۱}=-۳A-۲I$$

روش دوم :

$$A^{-۱}(۳A^۲+۲A+I)=A^{-۱}\times O \Rightarrow ۳A+۲I+A^{-۱}=O \Rightarrow A^{-۱}=-۳A-۲I$$

مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

۱۱) اگر $A=\begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A+۲B$، وارون پذیر نیست؟

۱) ۵، ۷-   ۲) ۷، ۵-   ۳) ۴، ۷-   ۴) ۵، ۳-   (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A+۲B=\begin{bmatrix} a-۲ & ۳ \\ ۹ & a+۴ \end{bmatrix}$$

$$|A+۲B|=۰ \Rightarrow a^۲+۲a-۸-۲۷=۰ \Rightarrow a^۲+۲a-۳۵=۰ \Rightarrow (a+۷)(a-۵)=۰ \Rightarrow a=-۷ \text{ یا } a=۵$$

۱۲) اگر $A=\begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $B(۲A^{-۱})$، کدام است؟(کنکور سراسری تجربی۹۶خارج از کشور)

۱) $\begin{bmatrix} -۸ & ۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ \\ -۹ & -۱۰ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۴ صحیح است. .

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۱۴+۱۲}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۳}{۲} \\ -۲ & \frac{-۷}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow ۲A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۷ \end{bmatrix}$$

$$B(۲A^{-۱})=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۴ & -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$$

۱۳) اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A\times B)^{-۱}$، کدام است؟(کنکور سراسری تجربی ۹۴ خارج از کشور)

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ \\ -۰/۵ & ۱ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$(A\times B)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۱۴) از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، سطر اوّل ماتریس A کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}^{-۱}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۱۵) اگر $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = A^{-1}$ ، دترمینان ماتریس A کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۱-

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

$$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{20-21} = -1$$

۱۶) به ازای چند مقدار m دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و دترمینان معکوس آن برابر می شود؟ $(|A| = |A^{-1}|)$

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۴

جواب : گزینه ۳ صحیح است. $|A| = m - 6$ از طرفی داریم : $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در نتیجه :

$$|A| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow (m-6)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m - 6 = 1 \Rightarrow m = 7 \\ m - 6 = -1 \Rightarrow m = 5 \end{cases}$$

۱۷) به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + 3y = -4 \\ 2x + (m-1)y = 4 \end{cases}$ بیشمار جواب دارد؟

۱) ۳-   ۲) ۲-   ۳) ۲   ۴) ۳   (آزمون پیش دانشگاهی تجربی ۷۷)

جواب : گزینه ۲ صحیح است. برای اینکه دستگاه غیرهمگن جواب نداشته و یا دارای بیشمار جواب باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب آن مساوی صفر باشد.

$$\begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & m-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{-4}{4} \otimes \\ m = -2 \Rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{3}{-3} = \frac{-4}{4} \end{cases}$$

۱۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ جواب معادله‌ی $AX = B$ کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

جواب : گزینه ۳ صحیح است.

$$|A| = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir