۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ و $\frac{۱}{۲}A^۲B=I$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس B کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

با توجه به رابطهٔ $\frac{۱}{۲}A^۲B=I$، ماتریس B وارون ماتریس $\frac{۱}{۲}A^۲$ است،

بنابراین داریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۲ & -۶ \\ -۸ & ۱۶ \end{bmatrix}\Rightarrow \frac{۱}{۲}A^۲=\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ -۴ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۲}A^۲\right)^{-۱}=\frac{۱}{۶\times ۸-(-۳)(-۴)}\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۳۶}\begin{bmatrix} ۸ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}=B$$

مجموع درایه‌های ماتریس B $=\frac{۱}{۳۶}(۸+۳+۴+۶)=\frac{۲۱}{۳۶}=\frac{۷}{۱۲}$

۲- اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ -m & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، به ازای چند مقدار صحیح m، تساوی $A+A^{-۱}=۲I$ برقرار است؟

۱) هیچ مقدار
۲) ۱
۳) ۲
۴) بی‌شمار

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & m \\ -m & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{m^۲}\begin{bmatrix} ۰ & -m \\ m & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A+A^{-۱}=۲I \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & m \\ -m & ۰ \end{bmatrix}+\frac{۱}{m^۲}\begin{bmatrix} ۰ & -m \\ m & ۲ \end{bmatrix}=۲I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & m-\frac{۱}{m} \\ -(m-\frac{۱}{m}) & \frac{۲}{m^۲} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

باید داشته باشیم:

$$m-\frac{۱}{m}=۰ \Rightarrow m=\frac{۱}{m} \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm ۱$$

$$\frac{۲}{m^۲}=۲ \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm ۱$$

بنابراین به ازای دو مقدار ۱ و ۱- برای m، تساوی داده شده برقرار است.

۳ــ اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{6}+(A^{-1})^{3}$ کدام است؟

۱) I

۲) $\bar{O}$

۳) $-2I$

۴) A

$$A^{2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^{3}=A\times A^{2}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I$$

$$\Rightarrow A^{6}=(A^{3})^{2}=(-I)^{2}=I \qquad (1)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{0-(-1)}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^{2}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^{3}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-I \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow A^{6}+(A^{-1})^{3}=I+(-I)=\bar{O}$$

۴ــ اگر $A=\begin{bmatrix}\tan\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟ $(\alpha\neq\frac{k\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z})$

۱) $\begin{bmatrix}\tan\alpha & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}\cot\alpha & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}\tan\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}\cot\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$

روش دوم: وارون ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}a & ۰\\ ۰ & b\end{bmatrix}$ $(a,b\neq ۰)$ به صورت $A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{a} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{b}\end{bmatrix}$ است، پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix}\tan\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\tan\alpha} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{-۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cot\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

روش دوم: وارون ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}a & ۰\\ ۰ & b\end{bmatrix}$ $(a,b\neq ۰)$ به صورت $A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{a} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{b}\end{bmatrix}$ است، پس داریم:

$$A=\begin{bmatrix}\tan\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{\tan\alpha} & ۰\\ ۰ & \frac{۱}{-۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cot\alpha & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

۵— اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x & x \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲y \\ -۵ & z \end{bmatrix}$ و $B = ۲A^{-۱}$ باشد، حاصل $x+y+z$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۵-

$$A=\begin{bmatrix} ۲x & x \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۶x-۵x}\begin{bmatrix} ۳ & -x \\ -۵ & ۲x \end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{x}\begin{bmatrix} ۳ & -x \\ -۵ & ۲x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۳}{x} & -۱ \\ -\frac{۵}{x} & ۲ \end{bmatrix}$$

$$۲A^{-۱}=B \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{۶}{x} & -۲ \\ -\frac{۱۰}{x} & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲y \\ -۵ & z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۶}{x}=۳ \Rightarrow x=۲ \\ -\frac{۱۰}{x}=-۵ \Rightarrow x=۲ \\ ۲y=-۲ \Rightarrow y=-۱ \\ z=۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+y+z=۲-۱+۴=۵$$

ویژگی‌های وارون ماتریس

ویژگی ۱ وارونِ وارون هر ماتریس مربعی با خودِ آن ماتریس برابر است.

به عبارت دیگر اگر A یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

ویژگی ۲ اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر و k عددی حقیقی و غیرصفر باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}}$$

به عبارت دیگر وارون، هم عدد را وارون می‌کند و هم ماتریس را.

ویژگی ۳ عمل وارون روی ضرب ماتریس‌ها با ترتیب برعکس صورت می‌پذیرد.

به عبارت دیگر اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و ضرب‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$$

◄ این ویژگی قابل تعمیم است، یعنی برای ماتریس‌های وارون‌پذیر و ضرب‌پذیر A_1، A_2، ...، A_n داریم:

$$(A_1A_2\ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

نتیجه: در حالت خاص، اگر $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ فرض شوند، آن‌گاه:

$$\boxed{(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n}$$

به عبارت دیگر وارونِ توان nاُم یک ماتریس با توان nاُم وارونِ آن ماتریس برابر است.

هشدار: عمل وارون روی جمع و تفریق ماتریس‌ها، قاعده‌ای ندارد. به عبارت دیگر:

$$(A \pm B)^{-1} = ??$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل $|A|$ را یافته و از آنجا ماتریس وارون A را بیابید.

حل:

$$|A|=۵|A|-۸(۳)\Rightarrow ۴|A|=۲۴\rightarrow |A|=۶\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۶ & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{دترمینان از دو طرف}}\begin{cases}A^{*}=\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}\\ |A|=۳۰-۲۴=۶\end{cases}$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{۱}{|A|}A^{*}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix}۵ & -۸\\ -۳ & ۶\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $\begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix} = ۲A$ باشد، حاصل $|A^{-1}|$ را به دست آورید.

$$۲A = \begin{bmatrix} |A| & -۴ \\ ۱ & |A| \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان از طرفین}} |۲A| = |A|^۲ - (-۴) \Rightarrow (۲)^۲ |A| = |A|^۲ + ۴ \rightarrow ۴|A| = |A|^۲ + ۴$$

$$|A|^۲ - ۴|A| + ۴ = ۰ \rightarrow (|A| - ۲)^۲ = ۰ \rightarrow |A| = ۲ \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{۱}{|A|} = \frac{۱}{۲}$$

۶ـ اگر $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴a-۱ & -۱۴ \\ ۵ & a-۱۰ \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقادیر a، ماتریس $۳A^{-۱}+B$ وارون‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) ۷ و ۱۱   ۲) ۳ و ۴   ۳) ۳ و ۷   ۴) ۴ و ۱۱

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۳\times۷-۶\times۴}\begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}=-\frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۷ & -۶ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۷ & ۶ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ۳A^{-۱}+B=\begin{bmatrix} -۷ & ۶ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴a-۱ & -۱۴ \\ ۵ & a-۱۰ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴a-۸ & -۸ \\ ۹ & a-۱۳ \end{bmatrix}$$

شرط اینکه ماتریس $۳A^{-۱}+B$ وارون پذیر نباشد، آن است که دترمینان آن برابر صفر شود، بنابراین داریم:

$$\left|۳A^{-۱}+B\right|=۰\Rightarrow(۴a-۸)(a-۱۳)-(-۸)\times۹=۰$$

$$\Rightarrow ۴a^{۲}-۵۲a-۸a+۱۰۴+۷۲=۰\Rightarrow ۴a^{۲}-۶۰a+۱۷۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div۴}a^{۲}-۱۵a+۴۴=۰\Rightarrow(a-۴)(a-۱۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\a=۱۱\end{cases}$$

۷ـــ اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس $A^{-۱}$ با کدام‌یک از ماتریس‌های زیر برابر است؟

۱) $A^{۱۰۰}$ ۲) $A^{۲۰۰}$ ۳) $A^{۳۰۰}$ ۴) $A^{۴۰۰}$

$$A^{۲}=AA=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=AA^{۲}=\begin{bmatrix}-۲ & ۳\\ -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=I$$

ماتریس A وارون‌پذیر است، بنابراین اگر طرفین رابطهٔ $A^{۳}=I$ را در $A^{-۱}$ ضرب کنیم، داریم:

$$A^{-۱}\times A^{۳}=A^{-۱}\times I\Rightarrow \underbrace{A^{-۱}\times A}_{I}\times A^{۲}=A^{-۱}\Rightarrow A^{۲}=A^{-۱}$$

در نتیجه ماتریس A^{n} به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{n}=\begin{cases}A & :n=۳k+۱,k\in W\\ A^{-۱} & :n=۳k+۲,k\in W\\ I & :n=۳k\quad ,k\in W\end{cases}$$

با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۲۰۰ بر ۳، برابر ۲ است، پس $A^{۲۰۰}=A^{-۱}$ می‌باشد.

۸— اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x \\ -1 & y \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد و $B=\begin{bmatrix} x & -2y \\ -3y & 4x \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(2x)B^{-1}$ کدام است؟ $(x\neq 0)$

۱) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A=\underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{x} & \cancel{1} \\ \cancel{y} & \cancel{-1} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{x} \\ \cancel{-1} & \cancel{y} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=(-x-y)(y+x)=-(x+y)^2=0\Rightarrow x=-y$$

$$B=\begin{bmatrix} x & -2y \\ -3y & 4x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & 2x \\ 3x & 4x \end{bmatrix}\Rightarrow |B|=-2x^2$$

$$B^{-1}=\frac{1}{-2x^2}\begin{bmatrix} 4x & -2x \\ -3x & x \end{bmatrix}=\frac{1}{2x}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2xB^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر A ماتریس ۲×۲ و وارون‌پذیر باشد و $|A| = ۳$ ، حاصل عبارت $|A^{۳}| - ۳|A^{-۱}| + ۵$ را بیابید.

حل:

$$|A^{۳}| - ۳|A^{-۱}| + ۵ = |A|^{۳} - ۳\left(\frac{۱}{|A|}\right) + ۵ = (۳)^{۳} - ۳\left(\frac{۱}{۳}\right) + ۵ = ۲۷ - ۱ + ۵ = ۳۱$$

مثال: اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $A^{-1} = 2A^{2}$ باشد، حاصل $|A|$ را بیابید.

حل:

$$A^{-1} = 2A^{2} \rightarrow |A^{-1}| = |2A^{2}| \Rightarrow \frac{1}{|A|} = 2^{3}|A^{2}| \Rightarrow \frac{1}{|A|} = 8|A|^{2} \Rightarrow 8|A|^{3} = 1 \rightarrow |A|^{3} = \frac{1}{8} \rightarrow |A| = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$