

اداره آموزش و پرورش خراسان رضوی

سال تحصیلی

مدت آزمون : ۱۲ دقیقه

نام و نام خانوادگی :

نام دبیر : زنونزاده

کلاس : دوازدهم ریاضی ۱

ردیف	۱	۲	۳	۴	ردیف
۱	*				۱
۲					۲
۳		*			۳
۴			*		۴
۵				*	۵
۶					۶
۷					۷
۸	*				۸
۹		*			۹

تعداد درست :

تعداد نادرست :

تعداد نزده :

درصد نمره با نمره منفی :

نمره با نمره منفی :

درصد نمره بدون نمره منفی :

نمره بدون نمره منفی :

(۱) مجموع درایه های ماتریس $A_{3 \times 3}$ که درایه های عمومی آن از دستور $a_{ij} = \begin{cases} i - j, i = j \\ i + j, i \neq j \end{cases}$ بدست آیند کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۵ (۲)

۲۰ (۱)

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sum = 24$$

جواب : گزینه ۴ صحیح است.

(۲) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \alpha A + \beta I_2$ دو تایی (α, β) کدام است؟

(۷,۴) (۴)

(۴,۷) (۳)

(۴,۵) (۲)

(۵,۴) (۱)

جواب : گزینه ۱ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 25 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 19 & 25 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha & 5\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

روش اول :

روش دوم : بنا به قضیه کیلی همیلتون هر ماتریسی در معادله سرشت نمایی خودش صدق می کند. یعنی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - (a+d)A + |A|I = O, A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 - 5A - 4I = O \Rightarrow$$

$$A^2 = 5A + 4I \Rightarrow \alpha = 5, \beta = 4$$

www.my-dars.ir

(۳) حاصل جمع درایه ها در ماتریس A^4 کدام است؟ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ در ماتریس

$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 3A$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

$$A^2 = kA \Rightarrow A^n = k^{n-1}A \Rightarrow A^4 = 3^3A \Rightarrow \sum = 3^3 \times 1 = 27$$

(۴) اگر $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴) -۸

$$|A| = \frac{1}{4} (|A|^2 + 4) \Rightarrow |A|^2 - 4|A| + 4 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

(۵) هرگاه A ماتریس مربعی از مرتبه 2×2 و $|A| \neq 0$ و $|A| = 9$ باشد، دترمینان ماتریس A کدام است؟

(۱) ± 2 (۲) ± 3 (۳) ± 4 (۴) ± 5

$$|kA_n| = k^n |A_n|$$

جواب: گزینه ۳ صحیح است.

$$|A| |A|^2 - 7A = |9A| \Rightarrow (|A|^2 - 7) |A| = |9A| \Rightarrow (|A|^2 - 7)^2 |A| = 9^2 |A|$$

$$\xrightarrow{|A| \neq 0} (|A|^2 - 7)^2 = 81 \Rightarrow |A|^2 - 7 = \pm 9 \Rightarrow |A|^2 = -2 \text{ یا } 16 \Rightarrow |A| = \pm 4$$

(۶) اگر ماتریس A از مرتبه ۲ و $A^2 = -4I$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $|A + 2I|$ کدام عدد می تواند باشد؟ (I ماتریس

همانی از مرتبه ۲ است.)

(۱) ۱۶ (۲) -۸ (۳) -۳۲ (۴) ۶۴

$$|A^2| = (-4)^2 |I| = 16 \times 1 \Rightarrow |A|^2 = 16 \Rightarrow |A| = \pm 4$$

جواب: گزینه ۲ صحیح است.

$$|(A + 2I)^2| = |A^2 + 4AI + 4I^2| = |-4I + 4A + 4I| = 4^2 |A| \Rightarrow |A + 2I|^2 = 64 \Rightarrow |A + 2I| = \pm 8$$

www.my-dars.ir

(۷) در معادله $\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 3x \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ حاصل ضرب ریشه ها کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۴

جواب : گزینه ۱ صحیح است. روش اول دترمینان را بسط می دهیم :

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 3x \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x(18 - 6x) - 4(12 - 12) + (12x - 36) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 30x + 36 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 6$$

روش دوم : برای $x = 2$ دو سطر اول و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر می شود لذا $x = 2$ یک ریشه معادله است. برای $x = 3$ دو سطر دوم و سوم ماتریس با هم متناسب اند پس دترمینان صفر خواهد شد لذا $x = 3$ یک ریشه معادله است. در نتیجه حاصل ضرب ریشه ها برابر ۶ است.

۸) به هر درایه‌ی سطر سوم دترمینان

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

کدام عدد افزوده شود تا مقدار دترمینان ۸ واحد بیشتر گردد؟

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3+a & 1+a & 2+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ a & a & a \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ a & a & a \end{vmatrix} = 8$$

$$\Rightarrow 5(5a - 6a) - 3(2a - 6a) + (2a - 5a) = 8 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۹) اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(-2A)(2A^{-1})$ کدام است؟

$$\begin{vmatrix} 36 & 4 & 18 & 3 & 16 & 2 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

جواب : گزینه ۲ صحیح است.

$$\left| (-2A)(2A^{-1}) \right| = (-4)^2 \left| AA^{-1} \right| = 16 |I| = 16 \times 1 = 16$$

۱۰) اگر داشته باشیم، $3A^2 - 2A + I = O$ ، وارون ماتریس A کدام است؟

$$3A^2 - 2A + I = O \Rightarrow 3A^2 - 2A + 2I = 2I \Rightarrow A(3A - 2I) = 2I$$

جواب : گزینه ۱ درست است. روش اول : با استفاده از تجزیه یک طرف تساوی را به I و طرف دیگر حاصل ضرب ماتریس A در یک

پرانتر تبدیل می کنیم.

$$\Rightarrow |A(-3A + 2I)| = |I| \Rightarrow |A| |-3A + 2I| = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} : A^{-1} = -3A + 2I$$

$$A^{-1}(3A^2 - 2A + I) = A^{-1} \times O \Rightarrow 3A - 2I + A^{-1} = O \Rightarrow A^{-1} = -3A + 2I$$

روش دوم :

(۱۱) اگر $A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند، به ازای کدام مقدار a ماتریس $A + 2B$ وارون پذیر نیست؟

(۱) $-7, 5$ (۲) $-5, 7$ (۳) $-7, 4$ (۴) $-3, 5$ (کنکور سراسری تجربی ۹۵ خارج از کشور)

$$A + 2B = \begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix} \quad \text{جواب: گزینه ۱ صحیح است.}$$

$$|A + 2B| = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 8 - 27 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - 35 = 0 \Rightarrow (a+7)(a-5) = 0 \Rightarrow a = -7 \text{ یا } a = 5$$

(۱۲) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(2B) \cdot A^{-1}$ ، کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -11 & 15 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} 8 & -15 \\ -7 & 11 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -9 & 13 \end{bmatrix} (4) \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{(کنکور سراسری تجربی ۹۶)}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{12-10} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad 2B = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} \quad \text{جواب: گزینه ۴ صحیح است.}$$

$$A^{-1} \cdot (2B) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ 6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ -11 & 15 \end{bmatrix}$$

(۱۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $(AB)^{-1}$ کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (4) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(کنکور آزاد ریاضی ۷۳)}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad |AB| = 1 \Rightarrow (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{جواب: گزینه ۳ صحیح است.}$$

(۱۴) از رابطه ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 33 & 14 \end{bmatrix} (2) \begin{bmatrix} -33 & -14 \end{bmatrix} (3) \begin{bmatrix} -33 & 14 \end{bmatrix} (4) \begin{bmatrix} 33 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{جواب: گزینه ۴ صحیح است.}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -4 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & -14 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

(۱۵) اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A کدام است؟

(کنکور سراسری تجربی ۸۰) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{33}$ (۱) 33 (۴) 1 (۳)

جواب: گزینه ۱ صحیح است.
 $|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} = \frac{1}{12+21} = \frac{1}{33}$

(۱۶) به ازای چند مقدار m دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ و دترمینان معکوس آن برابر می شود؟ $(|A| = |A^{-1}|)$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

جواب: گزینه ۳ صحیح است. $|A| = m - 6$ از طرفی داریم: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

در نتیجه: $|A| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow (m-6)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} m-6=1 \Rightarrow m=7 \\ m-6=-1 \Rightarrow m=5 \end{cases}$

(۱۷) به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + 2y = m \\ 3x + (m+1)y = m+1 \end{cases}$ بیشمار جواب دارد؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

جواب: گزینه ۳ صحیح است. برای اینکه دستگاه غیرهمگن جواب نداشته و یا دارای بیشمار جواب باشد باید دترمینان ماتریس

ضرایب آن مساوی صفر باشد $\begin{cases} m = -3 \Rightarrow \frac{-3}{3} = \frac{2}{-3+1} \neq \frac{-3}{-3+1} \otimes \\ m = 2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{2+1} \end{cases} \Rightarrow m^2 + m - 6 = 0$

(۱۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ جواب معادله $AX = B$ کدام است؟

(کنکور سراسری تجربی ۷۵) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (۴)

جواب: گزینه ۴ صحیح است.
 $|A| = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$