فصل ۶

فصل ششم : خط و معادله های خطی

نکته : نقاطی که روی محور طول قرار دارند عرضشان صفر است. نقاطی که روی محور عرض ها قرار دارند طولشان صفر است.

مثال : نقطه ی $\begin{bmatrix} ۲a-b \\ ۲a-۱ \end{bmatrix}$ به ازای چه مقدار b روی محور عرض ها به عرض ۳ قرار دارد؟

$$۲a-۱=۳ \Rightarrow a=۲ \xrightarrow{\text{روی محور عرض}} ۲a+b=۰ \Rightarrow b=-۴$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} ۲x-۱ \\ ۱-x \end{bmatrix}$ همواره در ناحیه ی اول باشد . x در چه محدوده ای باید باشد؟

حل: برای حل این سوال باید هر دو محدوده را به دست آوریم سپس بین دو جواب اشتراک بگیریم.

نکته : اگر نقطه ای همواره در ناحیه ی اول باشد طول و عرض آن مثبت خواهد بود. اگر در ناحیه ی دوم باشد طول منفی و عرض مثبت . اگر در ناحیه ی سوم باشد هر دو منفی و در ناحیه ی چهارم طول مثبت و عرض منفی خواهد بود.

فاصله ی بین دو نقطه ی $A=\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ در دستگاه مختصات : $|AB|=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$

مثال: نقاط $A=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ رئوس چه نوع مثلثی هستند؟

حل: ابتدا از فرمول بالا طول هر سه ضلع را بدست آورید و بعد از آن تشخیص دهید چه نوع مثلثی است.

مختصات وسط پاره خط AB $\quad M=\begin{bmatrix} \frac{x_A+x_B}{۲} \\ \frac{y_A+y_B}{۲} \end{bmatrix}$

اگر رئوس A,B,C,D راس های متوازی الاضلاع ABCD باشند رابطه ی زیر برقرار است : $\begin{bmatrix} X_A+X_C=X_B+X_D \\ Y_A+Y_C=Y_B+Y_D \end{bmatrix}$

نکته : قرینه ی نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور طول ها برابر است با : $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$

نکته : قرینه ی نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به محور عرض ها برابر است با : $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$

نکته : قرینه ی نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به مبدا مختصات برابر است با : $\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$

نکته : قرینه ی نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز اول و سوم برابر است با : $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

نکته : قرینه ی نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز دوم و چهارم برابر است با : $\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$

قرینه ی نقطه ی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نسبت به نقطه ی $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ برابر است با : $\begin{bmatrix} ۲a-x \\ ۲b-y \end{bmatrix}$

شیب خط : اگر L خطی باشد که از دو نقطه ی A و B عبور کند آنگاه شیب خط L برابر است با : $m_L=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

نکته : شیب صفر یعنی اینکه خط موازی محور افق است. شیب تعریف نشده یعنی اینکه خط عمود بر محور افق است شیب منفی یعنی اینکه خط با جهت مثبت محور افقی زاویه تند می سازد و شیب مثبت یعنی اینکه خط با جهت مثبت محور افقی زاویه ی باز می سازد.

نوشتن معادله ی یک خط :

حالت اول : یک نقطه مانند $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ از خط و شیب خط m معلوم باشد .

معادله ی خط : $y - y_A = m(x - x_A)$

حالت دوم : دو نقطه ی $A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ از خط معلوم باشد :

معادله ی خط : $\begin{cases} m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ y - y_A = m(x - x_A) \end{cases}$

نکته : معادله ی خط نیمساز ناحیه ی اول سوم y=x است .

نکته : اگر یک نقطه روی نیمساز ناحیه ی اول و سوم باشد دارای طول و عرض مساوی خواهد بود.

نکته : معادله ی خط نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم به صورت y=-x است.

نکته : اگر یک نقطه روی نیمساز ناحیه ی دوم و چهارم باشد دارای طول و عرض قرینه خواهد بود.

نکته : شرط عمود بودن دو خط این است که شیب دو خط عکس و قرینه ی یکدیگر باشند . به عبارت دیگر حاصل ضرب شیب دو خط عمود بر هم برابر ۱- است.

نکته : در حالت کلی معادله ی خط به صورت ax+by+c=۰ است که در این صورت $-\frac{a}{b}$ را شیب و $-\frac{c}{b}$ را عرض از مبدا $-\frac{c}{a}$ را طول از مبدا خط می نامند.

نکته : مساحت مثلثی که از برخورد خط به معادله ی $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = ۱$ با محور های مختصات به دست می آید برابر است با : $S = \frac{a \times b}{۲}$

نکته اگر دو خط به معادله ی $\begin{cases} ax + by = c \\ \acute{a}x + \acute{b}y = \acute{c} \end{cases}$ باشند

الف) دو خط بر هم منطبق اند یا بیشمار جواب دارند اگر : $\frac{a}{\acute{a}} = \frac{b}{\acute{b}} = \frac{c}{\acute{c}}$

ب) دو خط موازی اند یا جواب ندارند اگر : $\frac{a}{\acute{a}} = \frac{b}{\acute{b}} \neq \frac{c}{\acute{c}}$

پ) دو خط متقاطعند یا یک جواب دارد اگر : $\frac{a}{\acute{a}} \neq \frac{b}{\acute{b}} \neq \frac{c}{\acute{c}}$