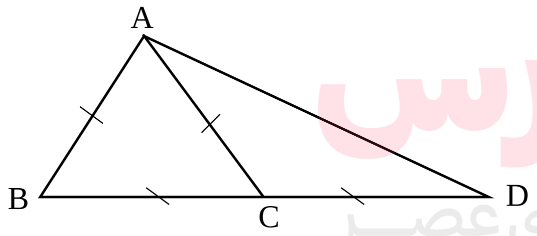
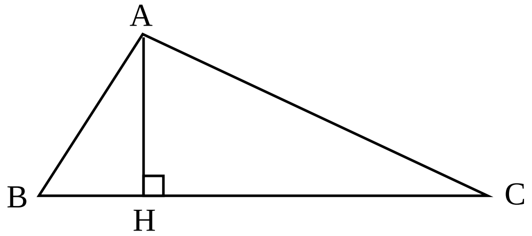
	فصل سوم: «استدلال و اثبات در هندسه»
۱	**استدلال:** «استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی برای اثبات یک مسأله. **انواع استدلال:** **الف) استدلال تمثیلی (قیاسی):** روش نتیجه‌گیری بر اساس تمثیل یا قیاس می‌باشد. **ب) استدلال استقرایی:** روش نتیجه‌گیری کلی در مورد مسائل به کمک «تعداد محدودی از مشاهدات» و آزمایش‌هاست و نتایج حاصل از آن همیشه از قطعیت برخوردار نیستند. این استدلال از جزء به کل رسیدن است. این استدلال در علوم مختلف از قبیل علوم تجربی و پزشکی کاربرد دارد. **پ) استدلال استنتاجی:** روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم و اساس اثبات قضایای کلی می‌باشد.
۲	**چند تعریف:** **۱- مثال نقض:** مثالی است که برای رد یک حکم کلی به کار می‌رود. **۲- برهان خلف:** گاهی اوقات به جای این‌که با استفاده از فرض مسأله مستقیماً حکم را اثبات کرد، آسان‌تر است که ثابت کنیم خلاف حکم نمی‌تواند درست باشد، پس قطعاً حکم درست است. به چنین استدلالی برهان خلف می‌گوییم. **۳- گزاره:** جمله‌ای است خبری که می‌تواند درست یا نادرست باشد. **۴- قضیه:** هر قضیه گزاره‌ای است که درستی آن را پس از اثبات می‌پذیریم. هر قضیه یک گزاره‌ی شرطی است که به صورت $p \Rightarrow q$ (اگر p آن‌گاه q) نمایش داده می‌شود که در آن p را فرض و q را حکم می‌نامیم.

	مثال: قضیه‌ی فیثاغورث: «اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد (فرض)، آن‌گاه مجموع مربعات دو ضلع قائمه برابر است با مربع وتر (حکم).»
۳	**چند نکته کوچک در مورد مثلث:** ارتفاع‌های مثلث در یک نقطه همرس هستند (یعنی هر سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.) براین اساس داریم: الف) در هر مثلثی که دارای زاویه‌ی باز باشد، نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌ها، خارج از مثلث قرار می‌گیرد. ب) در هر مثلث که دارای زاویه‌ی قائمه باشد، نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائم قرار می‌گیرد. پ) در هر مثلث که سه زاویه‌ی آن تند باشند، نقطه‌ی برخورد ارتفاع‌ها داخل مثلث قرار می‌گیرد.
۴	**مثلث متساوی‌الاضلاع:** ۱- در بین مثلث‌ها با محیط ثابت، مثلثی دارای بیشترین مساحت است که متساوی‌الاضلاع باشد. ۲- در بین مثلث‌ها با مساحت ثابت، مثلثی دارای کمترین محیط است که متساوی‌الاضلاع باشد. ۳- اگر یکی از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع را به اندازه‌ی خود امتداد دهیم، مثلث حاصل قائم‌الزاویه است. (زاویه A قائمه می‌باشد)  ۴- اندازه ارتفاع (نیمساز یا میانه) در مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع a از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ و مساحت این مثلث از رابطه‌ی $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ به دست می‌آید.
۵	**مثلث قائم‌الزاویه:** ۱- در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر برابر است با اختلاف دو زاویه‌ی تند. ۲- میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، نصف وتر است.

۳-در هر مثلث قائم‌الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر داریم:



$$\overline{AH}^{۲} = \overline{BH} \times \overline{CH}$$
$$\overline{AB}^{۲} = \overline{BH} \times \overline{BC}$$
$$\overline{AC}^{۲} = \overline{CH} \times \overline{BC}$$
$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AH} \times \overline{BC}$$

۴-در هر مثلث قائم‌الزاویه:

الف) ضلع روبروی زاویه‌ی ۳۰°= نصف وتر

ب) ضلع روبروی زاویه‌ی ۴۵°= نصف وتر × $\sqrt{۲}$

پ) ضلع روبروی زاویه‌ی ۶۰°= نصف وتر × $\sqrt{۳}$

۵-در مثلث قائم‌الزاویه به طول وتر x مجموع مربع‌های طول میانه‌ها برابر است با: $\frac{۳}{۲}x^{۲}$

۶-در هر مثلث قائم‌الزاویه مجموع مربعات دو میانه‌ی نظیر ضلع‌های قائم برابر است با: مربع وتر × $\frac{۵}{۴}$

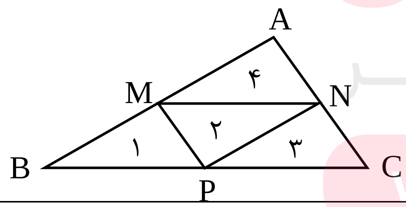
۷-اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۱۵ درجه باشد، آن‌گاه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ وتر است.

۶ مساحت مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن از رابطه‌ی زیر که به قاعده‌ی هرون معروف است به دست می‌آید:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

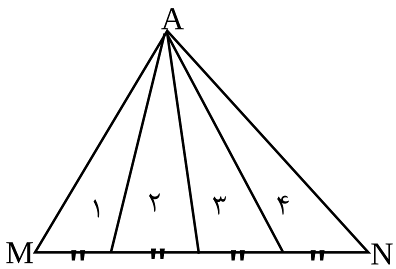
در این رابطه a و b و c اضلاع مثلث و p نصف محیط است.

۷ هرگاه وسط اضلاع مثلث دلخواهی را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم مساحت و هم‌نهشت ایجاد می‌شود. توجه داشته باشید که: $MN || BC$

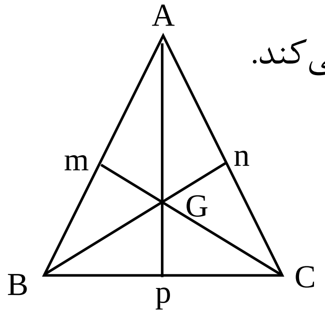
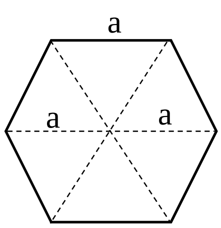


$$S_{۱} = S_{۲} = S_{۳} = S_{۴}$$

۸ اگر روی پاره‌خطی تعدادی پاره‌خط مساوی ایجاد کنیم و همه را به یک نقطه مانند A وصل کنیم، مساحت همه‌ی مثلث‌ها با هم برابر خواهند بود. چون قاعده‌ها و ارتفاع‌های یکسان دارند.

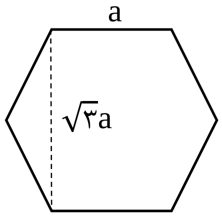


$$S_{۱} = S_{۲} = S_{۳} = S_{۴}$$

۹	سه میانه‌ی یک مثلث همرس می‌باشند یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. نقطه‌ی همرســـی میانه‌ها در یک مثلث مرکز ثقل مثلث (گرانیگاه) نام دارد و با حرف G نام‌گذاری می‌شود. نقطه‌ی G هر میانه را به نسبت ۲ از رأس و ۱ از ضلع قطع می‌کند.  $AG = ۲pG$ $BG = ۲nG$ $CG = ۲mG$ همانند شـکل بالا اگر سـه میانه‌ی یک مثلث را رسـم کنیم آن‌گاه مساحت آن به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌شود.
۱۰	**چندضلعی منتظم:** ۱-اگر تمام اضلاع یک n ضلعی با هم و تمام زاویه‌هایش با هم برابر باشند آن n ضلعی را منتظم می‌نامیم. ۲-اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ ۳-اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{۳۶۰}{n}$ ۴-اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو قطر متوالی مرسوم از یک رأس n ضلعی منتظم برابر است با: $\frac{۱۸۰}{n}$ ۵-هر n ضلعی منتظم n محور تقارن دارد.
۱۱	**شش ضلعی منتظم:** ۱- اگر از مرکز ۶ ضـلعی منتظم به رئوس آن وصل کنیم ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به دست می‌آید. بنابراین مساحت ۶ ضلعی منتظم (به ضلع a) برابر است با:  $۶\left(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}\right)$

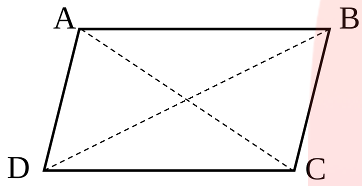
۲- به قطرهایی که از مرکز ۶ ضلعی عبور می‌کنند قطر بزرگ می‌گوییم. هر ۶ ضلعی منتظم دارای سه قطر بزرگ به طول ۲a می‌باشد.

۳- به قطرهایی که از مرکز ۶ ضلعی عبور نمی‌کنند قطر کوچک می‌گوییم. هر ۶ ضلعی ۶ قطر کوچک به طول $\sqrt{۳}a$ دارد.



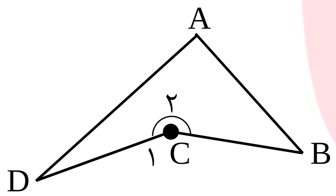
۱۲ **چهارضلعی‌ها:**

۱- در هر متوازی‌الاضلاع، مجموع مربعات اضلاع برابر است با مجموع مربعات قطرها



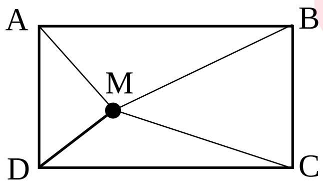
$$\overline{AB}^{۲}+\overline{BC}^{۲}+\overline{CD}^{۲}+\overline{DA}^{۲}=\overline{AC}^{۲}+\overline{BD}^{۲}$$

۲- در هر چهارضلعی مقعر مانند ABCD داریم:



$$\hat{C}_{۱}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}$$

۳- اگر نقطه‌ی دلخواه M درون یا بیرون مستطیل قرار داشته باشد، آن‌گاه داریم:



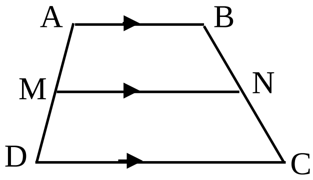
$$\overline{AM}^{۲}+\overline{MC}^{۲}=\overline{BM}^{۲}+\overline{MD}^{۲}$$

۴- از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع یک مستطیل یا ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین یک لوزی پدید می‌آید.

۵- از به هم وصل کردن وسط‌های اضلاع یک لوزی، یک مستطیل و از وصل کردن وسط‌های هر چهارضلعی دلخواه به طور متوالی یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید.

۶- از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع به دست می‌آید.

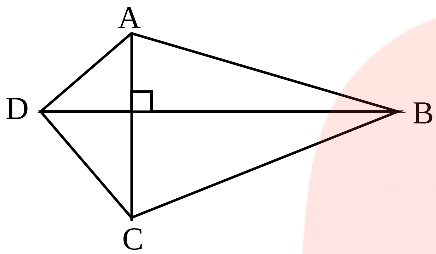
۷- اگر وسط دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل کنیم پاره‌خط ایجاد شده موازی با دو قاعده‌ی ذوزنقه و برابر نصف مجموع آن دو است.



به این پاره‌خط (MN) خط میانگین می‌گوییم.

$$\overline{MN}=\frac{\overline{AB}+\overline{DC}}{۲}$$

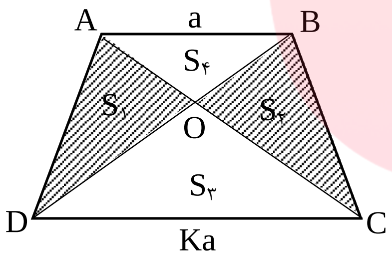
۸- در هر چهارضلعی که دو قطر عمود بر هم داشته باشد مجموع مربع‌های اضلاع مقابل با هم برابرند.



$$\overline{AB}^{۲}+\overline{DC}^{۲}=\overline{AD}^{۲}+\overline{BC}^{۲}$$

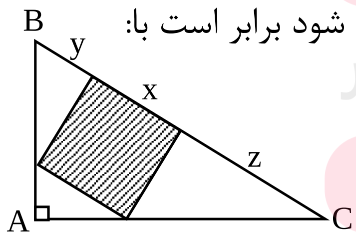
۹- در هر ذوزنقه با رسم دو قطر آن، مساحت دو مثلثی که اضلاع آن ساق‌ها هستند، برابر است، در شکل زیر مساحت دو مثلث هاشور خورده برابر است.

این قضیه، به قضیه شبه پروانه معروف است و دارای خواص زیر است:



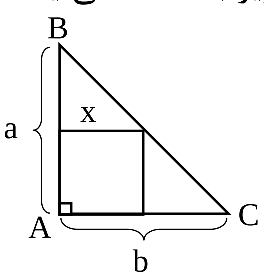
$$S_۱=S_۲$$
$$S_۳=K^۲S_۴$$
$$S_۱S_۲=S_۳S_۴$$

۱۳ مساحت مربع محاط در مثلث قائم‌الزاویه، به طوری که بر وتر منطبق شود برابر است با:

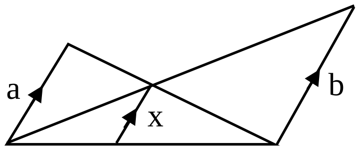


$$S=x^۲=yz$$

۱۴ هرگاه مربعی روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویه محاط شود طول ضلع آن از رابطه زیر به دست می‌آید:



$$x=\frac{ab}{a+b}$$

۱۵	در شکل مقابل ضلع‌های a و b و x موازی‌اند. اندازه‌ی ضلع x از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:  $x = \frac{ab}{a+b}$
۱۶	اگر اندازه‌ی شـــکلی K برابر شـــود محیط آن نیز K برابر خواهد شـــد ولی مســـاحت آن $K^{۲}$ و حجم حاصل از آن $K^{۳}$ برابر خواهد شد. بر همین اساس خواهیم داشت: ۱- نسبت محیط دو شکل متشابه برابر با نسبت تشابه دو شکل است. (K نسبت تشابه) $\frac{P_{۱}}{P_{۲}} = K$ ۲- نسبت مساحت دو شکل متشابه برابر با مجذور نسبت تشابه است. (K نسبت تشابه) $\frac{S_{۱}}{S_{۲}} = K^{۲}$
۱۷	سه شرط لازم برای تشابه دو چندضلعی: ۱- تعداد اضلاع برابر ۲- زوایای مُتناظر برابر ۳- اضلاع متناظر متناسب. دو شکل هم‌نهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها یک است.
۱۸	**چند نکته‌ی کوچک:** ۱- در دو شـــکل متشـــابه با نســـبت اضلاع $\frac{a}{b}$، ارتفاع‌ها، میانه‌ها، نیمسازها، محیط و قطرهای متناظر (در صورت وجود) نیز از همین نسبت پیروی می‌کنند. ۲- در شکل‌های متشابه، اضلاع متناظر متناسب هستند اما زاویه‌های دو شکل با هم برابرند. ۳- دو لوزی در حالی متشابه‌اند که یک زاویه‌ی برابر داشته باشند نه یک قطر برابر.
۱۹	شعاع دایره‌ی محیطی یک مثلث به طور کلی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید: $R = \frac{abc}{۴s}$
۲۰	شعاع دایره‌ی محاطی یک مثلث به طور کلی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید: $r = \frac{S}{P}$

۲۱	شعاع دایره‌ی محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $R = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$
۲۲	شعاع دایره‌ی محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با: $r = \frac{\sqrt{۳}}{۶}a$
۲۳	شعاع دایره‌ی محیطی مثلث قائم‌الزاویه به وتر a برابر است با نصف وتر: $R = \frac{a}{۲}$
۲۴	شعاع دایره‌ی محاطی مثلث قائم‌الزاویه به وتر a برابر است با: $r = \frac{b+c-a}{۲}$ یا $r = \frac{bc}{a+b+c}$