۱- اگر مساحت صفحه‌ی قطری یک مکعب $۶\sqrt{۲}$ باشد، مساحت کل آن چه‌قدر است؟

۱) ۴۲ ۲) $۳۰\sqrt{۲}$ ۳) $۴۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳۶

۲- وجوه جانبی هرمی که قاعده‌ی آن شش‌ضلعی منتظم است. مثلث‌هایی به ارتفاع ۵ و قاعده‌ی متناظر ۴ هستند. مساحت کل هرم چه‌قدر است؟ (قاعده‌ی مثلث‌ها، منطبق بر اضلاع شش‌ضلعی منتظم هستند.)

۱) $۶۰ + ۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۸۰ + ۲۴\sqrt{۳}$ ۳) $۶۰ + ۴۸\sqrt{۳}$ ۴) $۸۰ + ۴۸\sqrt{۳}$

۳- از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع قائم $۲\sqrt{۲}$ و ۴ حول وترش، حجمی با اندازه‌ی ..... به‌دست می‌آید.

۱) $\frac{۱۶\pi\sqrt{۶}}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶\pi\sqrt{۶}}{۹}$ ۳) $\frac{۳۲\pi\sqrt{۶}}{۹}$ ۴) $\frac{۳۲\pi\sqrt{۶}}{۳}$

۴- کره‌ای در داخل یک مکعب با یال a محاط است. حجم فضای بین کره و مکعب چه‌قدر است؟

۱) $a^۳\left(۱ - \frac{\pi}{۶}\right)$ ۲) $a^۳\left(۱ - \frac{\pi}{۴}\right)$ ۳) $a^۳\left(۱ - \frac{\pi}{۵}\right)$ ۴) $a^۳\left(۱ - \frac{\pi}{۷}\right)$

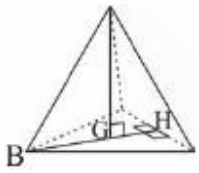
۵- قاعده‌ی یک منشور یک لوزی به ضلع ۴ و یک زاویه‌ی ۶۰° است. اگر ارتفاع این منشور برابر محیط قاعده باشد، حجم آن چه‌قدر است؟

۱) $۱۲۰\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲۴\sqrt{۳}$ ۳) $۱۲۸\sqrt{۳}$ ۴) $۲۵۶\sqrt{۳}$

۶- در مکعب مستطیلی به ابعاد a ، a و $۳a$ ، اندازه‌ی زاویه‌ی بین قطر و بزرگ‌ترین یال چه‌قدر است؟

۱) $\text{ArcSin}\left(\frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۱۱}\right)$ ۲) $\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt[۳]{۱۱}}{۱۱}\right)$ ۳) $\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)$ ۴) $\text{ArcCos}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۳}\right)$

۷- شکل مقابل، چهاروجهی منتظم می‌باشد. در صورتی که طول یال آن ۲ واحد و اندازه‌ی GH ثلث ارتفاع BH باشد، حجم چهاروجهی کدام است؟



۱) $\frac{\sqrt{۸}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۸}}{۶}$ ۳) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۶}$

۸- در کره‌ای به شعاع ۵، استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی ۳ محاط شده است. نسبت سطح کره به سطح جانبی استوانه کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲۵}{۸}$ ۳) $\frac{۲۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۲۵}{۱۲}$

۹- کیکی به شعاع نیم‌کره به شعاع یک واحد را از سمت مسطح آن روی سینی می‌گذاریم، اگر کیک را موازی با سینی و در ارتفاع‌های متفاوت برش دهیم. سطح مقطع برشی از کیک در ارتفاع $h=۰/۸$ از سینی چه‌قدر است؟

۱) $۰/۲\pi$ ۲) $۰/۸\pi$ ۳) $۰/۳۶\pi$ ۴) $۰/۶۴\pi$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۱۰- قاعده‌ی هرم منتظمی یک مربع به ضلع ۲ و ارتفاع هرم $۲\sqrt{۲}$ است. مساحت کل آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۱۱- یک استوانه‌ی قائم به شعاع قاعده‌ی $\sqrt{۲}$ و ارتفاع ۸ مفروض است. اگر به شعاع قاعده‌ی آن $\sqrt{۲}$ واحد اضافه و از ارتفاعش ۲ واحد کم کنیم، آن‌گاه مساحت کل آن چه‌قدر تغییر می‌کند؟

۱) $۱۲\pi\left(۱+\sqrt{۲}\right)$ ۲) $۴\pi\left(۳+\sqrt{۲}\right)$ ۳) $۴\pi\left(۳+۲\sqrt{۲}\right)$ ۴) $۶\pi\left(۲+۳\sqrt{۲}\right)$

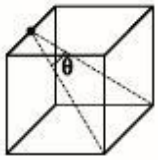
۱۲- یک منشور با قاعده‌ی مستطیل را درون یک منشور با قاعده‌ی شش ضلعی منتظم محاط کرده‌ایم، به گونه‌ای که در صفحه‌ی قاعده‌ها دو ضلع مستطیل منطبق بر دو ضلع قاعده‌ی منشور بزرگ‌تر است. اگر اندازه‌ی ضلع قاعده‌ی منشور شش ضلعی ۴ باشد، آن‌گاه نسبت حجم دو منشور کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۳- دو مخروط یکسان هم رأس و به ارتفاع ۶ را طوری درون یک استوانه‌ی قائم قرار داده‌ایم که محور مخروط ها منطبق بر محور استوانه و قاعده‌های دو مخروط نیز منطبق و مساوی قاعده‌های استوانه باشند. اگر حجم هر مخروط برابر $۱۸\pi^{۳}$ باشد، حجم فضای محصور میان مخروط ها و استوانه کدام است؟

۱) $۱۸\pi^{۳}$ ۲) $۳۶\pi^{۳}$ ۳) $۵۴\pi^{۳}$ ۴) $۷۲\pi^{۳}$

۱۴- در مکعب روبه‌رو، وسط یک یال را به دو رأس وجه روبه‌رویش وصل کرده‌ایم. کسینوس زاویه‌ی θ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$

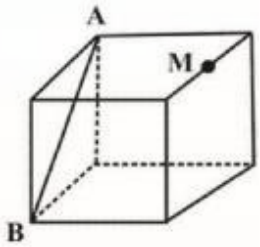
۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۱۵- یک مخروط و یک چهاروجهی منتظم در شرایط اصل کاوالیری صدق می‌کنند. اگر حجم چهاروجهی برابر $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ باشد، آن‌گاه مساحت قاعده‌ی مخروط کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ۴) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

۱۶- در مکعب شکل زیر، طول یال ۲ و نقطه‌ی M وسط یکی از یال‌هاست. فاصله‌ی M از قطر AB کدام است؟



۱) $\sqrt{۳}$
۲) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$
۳) $۳\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۴) $۴\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

۱۷- حجم شکل فضایی حاصل از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲، حول یکی از اضلاع آن چند برابر π است؟

۱) ۲
۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۳) $۲\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\sqrt{۳}$

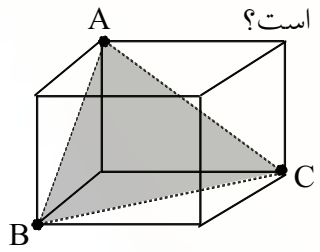
۱۸- دو ظرف یکی به شکل استوانه به شعاع قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۷ و دیگری به شکل مخروط به شعاع قاعده‌ی ۹ و ارتفاع ۳ را پر از آب کرده و درون کاسه‌ای به شکل نیمکره با شعاع ۶ خالی می‌کنیم. کدام گزینه صحیح است؟

۱) آب از کاسه سر ریز می‌شود.
۲) آب تا لبه‌ی کاسه می‌آید.
۳) مقداری از فضای کاسه خالی می‌ماند.
۴) نمی‌توان اظهارنظر قطعی کرد.

۱۹- هرمی که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۲ واحد است، در داخل یک مخروط طوری قرار دارد که رأس‌های آن‌ها مشترک و رئوس قاعده‌ی هرم روی محیط قاعده‌ی مخروط است. اگر حجم مخروط برابر ۲π باشد ارتفاع هرم کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۲۰- در مکعب شکل زیر، اگر مساحت مثلث ABC برابر $\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه حجم مکعب کدام است؟



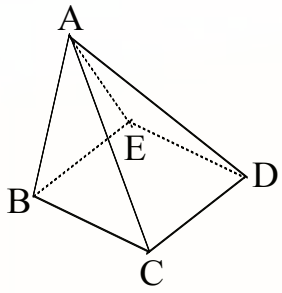
۱) ۸
۲) ۹
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۳}$

۲۱- برای محاسبه‌ی حجم یک نیمکره به شعاع R، با استفاده از اصل کاوالیری، حجم نیمکره با حجم کدام‌یک از احجام زیر مورد مقایسه قرار می‌گیرد؟

۱) استوانه‌ای قائم به شعاع قاعده و ارتفاع R که مخروط قائمی به شعاع قاعده و ارتفاع $\frac{R}{۲}$ از آن جدا شده است.
۲) استوانه‌ای قائم به شعاع قاعده و ارتفاع R که مخروط قائمی به شعاع قاعده و ارتفاع R از آن جدا شده است.
۳) مخروطی به شعاع قاعده و ارتفاع R
۴) مخروطی به شعاع قاعده‌ی $\frac{R}{۲}$ و ارتفاع $۲R$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

۲۲- در هرم شکل زیر، یال AB بر یال‌های BC و BE عمود و با آن‌ها برابر است. اگر چهارضلعی BCDE مربعی به مساحت ۹ واحد مربع باشد، آن‌گاه حجم هرم چند واحد مکعب است؟



۱) ۲۷ ۲) ۹
۳) ۱۸ ۴) ۶

۲۳- در یک کره، مکعب مستطیلی به طول یال‌های ۲ ، $۲\sqrt{۳}$ و $۲\sqrt{۵}$ محاط شده است. حجم این کره کدام است؟

۱) ۱۴۴π ۲) ۷۲π ۳) ۱۸π ۴) ۳۶π

۲۴- مثلث متساوی‌الساقینی را که زاویه‌ی رأس آن ۱۲۰° و طول قاعده‌ی آن $\sqrt{۳}$ است، حول ارتفاع وارد بر یکی از ساق‌ها، دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}\pi$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) π

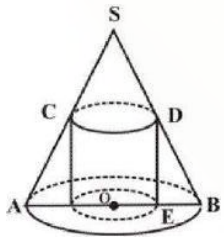
۲۵- ظرف دربسته‌ای به شکل نیم‌کره مفروض است. اگر مساحت ظرف برابر با $\frac{۲۷}{\pi}$ واحد باشد، حجم آن کدام است؟

۱) $\frac{۱۸}{\pi^۲}$ ۲) $\frac{۲۷\sqrt{۶}}{\pi^۲}$ ۳) $\frac{۳۶}{\pi^۲}$ ۴) $\frac{۵۴\sqrt{۶}}{\pi^۲}$

۲۶- همه‌ی یال‌های یک منشور مثلث‌القاعده‌ی قائم برابراند. اگر ارتفاع قاعده‌ی منشور $۳\sqrt{۳}$ باشد، حجم آن کدام است؟

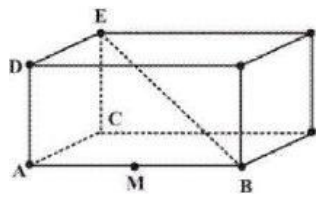
۱) $۵۴\sqrt{۳}$ ۲) $۴۸\sqrt{۳}$ ۳) $۳۶\sqrt{۳}$ ۴) $۷۲\sqrt{۳}$

۲۷- در شکل مقابل، استوانه‌ی قائم در مخروط قائم محاط است به طوری‌که $OE = BE$. نسبت حجم استوانه به حجم مخروط کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$
۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

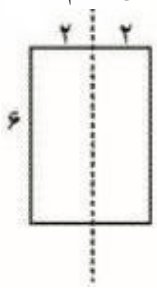
۲۸- در مکعب مستطیل شکل زیر، $AB = ۵$ و $AD = ۴$ و $AC = ۳$ و M نقطه‌ی وسط یال AB است. فاصله‌ی M از قطر BE کدام است؟



۱) $\frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۴}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲۹- مستطیلی به اضلاع ۴ و ۶ را حول محور تقارن عمودی آن مطابق شکل به اندازه‌ی زاویه‌ی 45° دوران می‌دهیم. حجم جسم حادث کدام است؟



۱) 3π
۲) 4π
۳) 6π
۴) 12π

۳۰- کره‌ای به شعاع ۱/۵ واحد از تمام رأس‌های مکعب‌مستطیلی به ابعاد $a, 2, 1$ واحد می‌گذرد. مساحت کل این مکعب مستطیل کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۴ ۳) ۲۰ ۴) ۱۶

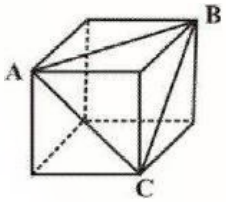
۳۱- اگر اندازه‌ی قطرهای وجوه یک مکعب مستطیل برابر $\sqrt{7}$، ۲ و $\sqrt{5}$ باشد، حجم آن کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) $4\sqrt{3}$ ۴) $4\sqrt{6}$

۳۲- درون یک کره به شعاع ۵، یک مخروط قائم و یک استوانه، هر دو به شعاع قاعده‌ی ۳ محاط کرده‌ایم. حجم استوانه از حجم مخروط چه‌قدر بیش‌تر است؟

۱) 27π ۲) 36π ۳) 45π ۴) حجم برابر دارند.

۳۳- در مکعب زیر نقاط A، B و C رأس‌های قطرهای وجوه‌اند. اگر مساحت کل مکعب برابر با ۱۰۸ باشد، آن‌گاه مساحت مثلث ABC چند برابر $\sqrt{3}$ است؟



۱) ۹ ۲) ۶
۳) $\frac{9}{2}$ ۴) ۳

۳۴- حجم هر م منتظم مربع‌القاعده‌ای که وجه‌های جانبی آن مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هستند برابر $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ است. طول هر یال این هرم کدام است؟

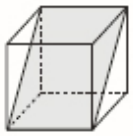
۱) ۳ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) ۶

۳۵- سطح مقطع یک مخروط قائم با صفحه‌ای که از رأس و یک قطر قاعده‌ی مخروط می‌گذرد، مثلث متساوی‌الساقینی به طول ساق ۵ و مساحت ۱۲ است. اگر در این مخروط، ارتفاع از شعاع قاعده بزرگ‌تر باشد، آن‌گاه حجم مخروط کدام است؟

۱) 12π ۲) 16π ۳) 8π ۴) 10π

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

۱- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. یک ضلع صفحه‌ی قطری مکعب، برابر یال آن و ضلع دیگر این صفحه برابر قطر وجه مکعب است. پس اگر یال مکعب را a بنامیم، مساحت صفحه‌ی قطری برابر $S = a \cdot a\sqrt{۲} = a^۲\sqrt{۲}$ است.



داریم: $a^۲\sqrt{۲} = ۶\sqrt{۲} \Rightarrow a^۲ = ۶$

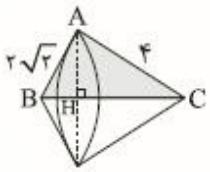
مساحت کل مکعب برابر است با: $S_{\text{کل}} = ۶a^۲ = ۶ \times ۶ = ۳۶$

۲- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. مساحت کل هرم از جمع مساحت مثلث‌های جانبی به علاوه‌ی مساحت قاعده که شش‌ضلعی منتظم است، تشکیل شده است. داریم:

$S_{\text{جانبی}} = ۶S_۱ = ۶۰$ $\quad S_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۴ = ۱۰$ (یک وجه جانبی)

$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}} = ۶۰ + ۲۴\sqrt{۳}$ $\quad S_{\text{قاعده}} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳ \times ۱۶\sqrt{۳}}{۲} = ۲۴\sqrt{۳}$

۳- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول وترش دو مخروط پدید می‌آید که از قاعده به یک‌دیگر چسبیده‌اند. شعاع قاعده‌ی آن‌ها همان ارتفاع وارد بر وتر است. ابتدا AH را به‌دست می‌آوریم:

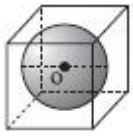


$$AB \times AC = AH \times BC \Rightarrow ۲\sqrt{۲} \times ۴ = AH \times ۲\sqrt{۶} \Rightarrow AH = \frac{۴}{\sqrt{۳}}$$

$$V_{\text{کل}} = V_۱ + V_۲ = \left(\frac{۱}{۳}\pi . AH^۲ . BH\right) + \left(\frac{۱}{۳}\pi . AH^۲ . CH\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}\pi AH^۲ (BH + CH) = \frac{۱}{۳}\pi . AH^۲ . BC = \frac{۱}{۳}\pi . \frac{۱۶}{۳} . ۲\sqrt{۶} = \frac{۳۲\pi\sqrt{۶}}{۹}$$

۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر کره‌ای در داخل یک مکعب محاط باشد، قطر آن برابر یال مکعب است.

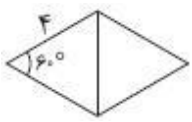


پس اگر R شعاع کره و a یال مکعب باشد، داریم: $a = ۲R \Rightarrow R = \frac{a}{۲}$

$V_{\text{مکعب}} = a^۳$ $\quad V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ = \frac{۴}{۳}\pi . \left(\frac{a}{۲}\right)^۳ = \frac{\pi a^۳}{۶}$

$$\text{حجم فضای بین مکعب و کره} = V_۲ - V_۱ = a^۳ - \frac{\pi a^۳}{۶} = a^۳\left(۱ - \frac{\pi}{۶}\right)$$

۵- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

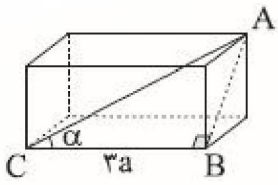


مساحت قاعده‌ی منشور برابر است با: $S = ۲ \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۲ \times ۴\sqrt{۳} = ۸\sqrt{۳}$

ارتفاع منشور برابر محیط قاعده یعنی $۴ \times ۴ = ۱۶$ است. پس: $V = S.h = ۱۶ \times ۸\sqrt{۳} = ۱۲۸\sqrt{۳}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، مثلث ABC در رأس B قائمه است. داریم:



$$AB = a\sqrt{۲}$$

$$BC = ۳a$$

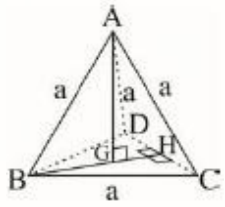
$$AC = \sqrt{a^۲ + a^۲ + ۹a^۲} = a\sqrt{۱۱}$$

$$\tan\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow \alpha = Arc\frac{\tan\sqrt{۲}}{۳}$$

در نتیجه:

$$Cos\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{۳a}{a\sqrt{۱۱}} = \frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱} \Rightarrow \alpha = ArcCos\frac{۳\sqrt{۱۱}}{۱۱}$$

۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

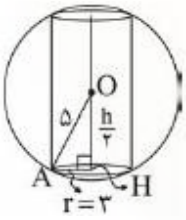


$$GH = \frac{۱}{۳}BH \Rightarrow BG = \frac{۲}{۳}BH = \frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{۲}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۲ \Rightarrow BG = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\triangle ABG : AB^۲ = AG^۲ + BG^۲ \Rightarrow AG = \sqrt{۴ - \frac{۴}{۳}} = \sqrt{\frac{۸}{۳}}$$

$$V_{هرم} = \frac{۱}{۳}S_{قاعده}\times\overbrace{AG}^{ارتفاع} \qquad V_{هرم} = \frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲\times AG = \frac{۱}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}\times۴\times\frac{\sqrt{۸}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۸}}{۳}$$

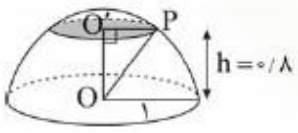
۸- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$\triangle OAH : OA^۲ = \left(\frac{h}{۲}\right)^۲ + r^۲ \Rightarrow ۲۵ = \left(\frac{h}{۲}\right)^۲ + ۹ \Rightarrow \left(\frac{h}{۲}\right)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \frac{h}{۲} = ۴ \Rightarrow h = ۸$$

$$\frac{S_{کره}}{S_{جانبی\ استوانه}} = \frac{۴\pi R^۲}{۲\pi rh} = \frac{۴\pi\times۲۵}{۲\pi\times۳\times۸} = \frac{۲۵}{۱۲}$$

۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل سطح مقطع در ارتفاع $h = ۰/۸$ دایره‌ای به شعاع $O'P$ است. با توجه به قائم‌الزاویه بودن $\triangle OO'P$ می‌توان رابطه‌ی فیثاغورس را نوشت:

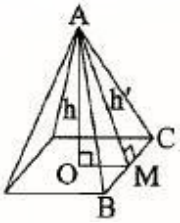


$$OP = R = ۱ \quad O'P = \sqrt{op^۲ - OO'^۲} = \sqrt{۱ - (۰/۸)^۲} = ۰/۶$$

سطح مقطع هاشور خورده = مساحت دایره به شعاع $O'P = \pi(O'P)^۲ = ۰/۳۶\pi$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

۱۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.



$$A\hat{O}M: h'^{۲} = h^{۲} + OM^{۲} \xrightarrow[OM = ۱]{h = ۲\sqrt{۲}} h'^{۲} = ۸ + ۱ = ۹ \Rightarrow h' = ۳$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times h' \times BC = \frac{۳ \times ۲}{۲} = ۳$$

$$S_{کل} = S_{جانبی} + S_{قاعده} \Rightarrow S_{کل} = ۴ \times ۳ + ۴ = ۱۶$$

۱۱- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. اگر استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h داشته باشیم، آن‌گاه مساحت کل آن (S) برابر است با:

$$S = ۲\pi r^{۲} + ۲\pi rh = ۲\pi r(r + h)$$

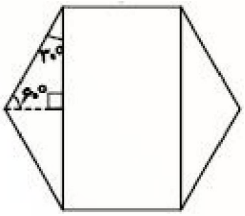
در این جا $r_۱ = \sqrt{۲}$ و $r_۲ = ۲\sqrt{۲}$ ، $h_۱ = ۸$ و $h_۲ = ۶$ است. پس خواهیم داشت:

$$S_۱ = ۲\sqrt{۲}\pi\left(\sqrt{۲} + ۸\right) \Rightarrow S_۱ = ۴\pi + ۱۶\sqrt{۲}\pi$$

$$S_۲ = ۴\sqrt{۲}\pi\left(۲\sqrt{۲} + ۶\right) \Rightarrow S_۲ = ۱۶\pi + ۲۴\sqrt{۲}\pi$$

$$\Rightarrow S_۲ - S_۱ = ۱۲\pi + ۸\sqrt{۲}\pi = ۴\pi\left(۳ + ۲\sqrt{۲}\right)$$

۱۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر از بالا به منشور نگاه کنیم، با توجه به شکل روبه‌رو که نشان‌دهنده‌ی مقطع عرضی قاعده است، خواهیم داشت:

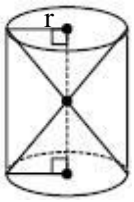


$$\text{طول مستطیل و } ۴ = \text{عرض مستطیل} = ۲(۴\cos ۳۰^\circ) = ۴\sqrt{۳}$$

حال اگر h ارتفاع مشترک دو منشور باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} V_۱ = \text{حجم منشور شش ضلعی} = S_{قاعده} \times h = \frac{۳}{۲} \times ۴^{۲}\sqrt{۳} \times h = \frac{۳}{۲}\left(۱۶\sqrt{۳}h\right) \\ V_۲ = \text{حجم منشور مستطیلی} = S_{قاعده} \times h = ۴ \times ۴\sqrt{۳} \times h = ۱۶\sqrt{۳}h \end{cases} \Rightarrow \frac{V_۱}{V_۲} = \frac{۳}{۲}$$

۱۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:

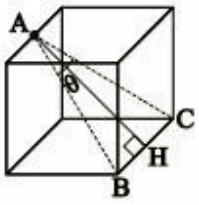


$$\begin{cases} \text{ارتفاع استوانه} = ۲ \times ۶ = ۱۲ \\ V_{مخروط} = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} \times ۶ = ۱۸\pi^{۳} \Rightarrow r^{۲} = ۹\pi^{۲} \\ V_{استوانه} = \pi r^{۲} h = ۱۲\pi \times ۹\pi^{۲} = ۱۰۸\pi^{۳} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{استوانه} - ۲V_{مخروط} = ۱۰۸\pi^{۳} - ۳۶\pi^{۳} = ۷۲\pi^{۳}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

۱۴- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر a طول یال مکعب باشد، داریم:



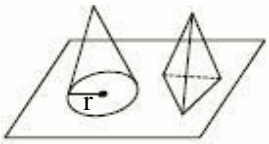
$$\overset{\triangle}{ABH}: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos\theta$$

حال به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم:

$$\xrightarrow{AB = AC} BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{2AB^2 - BC^2}{2AB^2} = \frac{\frac{9a^2}{2} - a^2}{\frac{9a^2}{2}} = \frac{7}{9}$$

۱۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دو شکل فضایی در شرایط اصل کاوالیری صدق می‌کنند پس، دارای ارتفاع‌های برابر و مساحت قاعده‌ی برابر هستند، اگر طول یال چهاروجهی منتظم برابر a باشد، داریم:



$$V_{\text{چهاروجهی}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

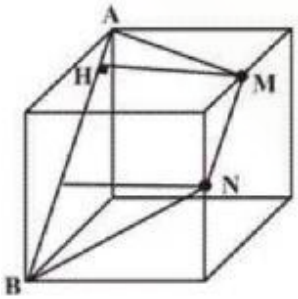
می‌دانیم که ارتفاع چهاروجهی منتظم به طول یال a برابر $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \,,\ a = 2 \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{6}}{3}\,,\ \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}\left(\pi r^2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \pi r^2 = \text{مساحت قاعده‌ی مخروط} = \sqrt{3}$$

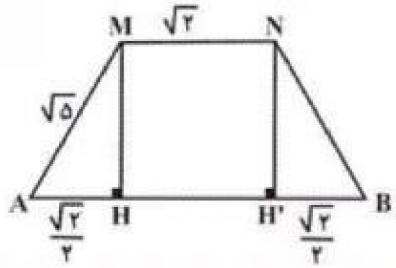
۱۶- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل، در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین AMNB داریم: (N وسط یال است.)



$$MN = \sqrt{2}\,,\ AM = BN = \sqrt{5}\,,\ AB = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{AB - MN}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

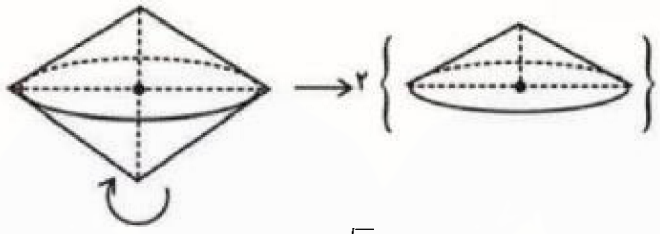


$$MH = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

مای درس
www.my-dars.ir

۱۷- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

شکل حاصل از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع، حول یک ضلع آن، دو مخروط است که از قاعده به هم چسبیده‌اند. پس کافی است حجم یکی از آن‌ها را محاسبه نموده و در ۲ ضرب کنیم:



شعاع قاعده و ارتفاع هر یک از مخروطها به‌ترتیب برابر $\sqrt{۳}$ و ۱ است. پس حجم شکل حاصل برابر است با:

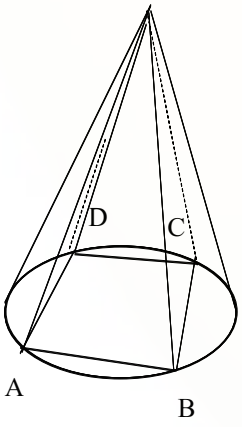
$$V=۲\left(\frac{۱}{۳}\pi\left(\sqrt{۳}\right)^{۲}\times ۱\right)=۲\pi$$

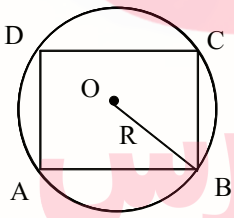
۱۸- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \text{حجم استوانه}=\pi(۳)^{۲}\times ۷=۶۳\pi \\ \text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\times\pi(۹)^{۲}\times ۳=۸۱\pi \\ \text{حجم نیمکره}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۳}\pi(۶)^{۳}=۱۴۴\pi \end{cases} \Rightarrow \text{حجم نیمکره}=\text{حجم مخروط}+\text{حجم استوانه}$$

آب دقیقاً تا لبه‌ی کاسه می‌آید.

۱۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.





$$AB=R\sqrt{۲}=۲\Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

$$\text{حجم مخروط}=\frac{۱}{۳}\pi R^{۲}h\Rightarrow ۲\pi=\frac{۱}{۳}(۲\pi h)\Rightarrow h=۳$$

پس ارتفاع هرم نیز برابر ۳ است.

۲۰- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_{ABC}=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}AB^{۲}=\sqrt{۳}\Rightarrow AB^{۲}=۴\Rightarrow AB=۲$$

$$\text{قطر وجه}=۲\Rightarrow a\sqrt{۲}=۲\Rightarrow a=\sqrt{۲}\Rightarrow \text{حجم مکعب}=a^{۳}=۲\sqrt{۲}$$

۲۱- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. برای محاسبه‌ی حجم یک نیمکره به شعاع R با استفاده از اصل کاوالیری، حجم آن را با حجم یک استوانه‌ی قائم با شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع R که مخروطی با همان شعاع قاعده و ارتفاع از آن جدا شده است، مقایسه می‌کنیم.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

۲۲- گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$S_{BCDE}=a^{۲}=۹ \Rightarrow a=۳$ (طول ضلع قاعده)

از طرفی AB بر BC و BE عمود است، بنابراین بر صفحه‌ی قاعده عمود است، پس AB ارتفاع هرم است.

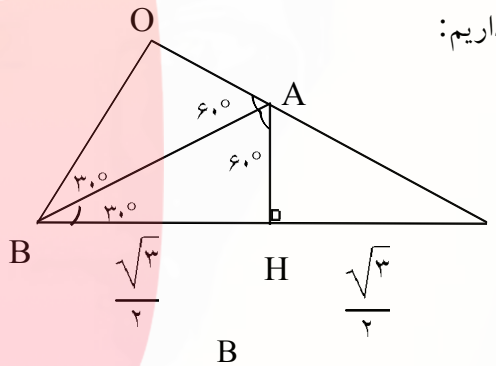
طبق فرض : $AB=BC \Rightarrow AB=۳$ (طول ارتفاع هرم)

حجم هرم : $V=\frac{۱}{۳}S.h \Rightarrow V=\frac{۱}{۳}\times ۹\times ۳=۹$

۲۳- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. طول قطر این کره، برابر طول قطر مکعب مستطیل است، داریم:

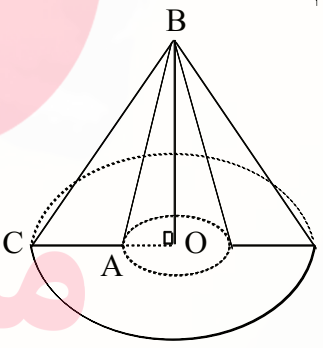
$۲R=d=\sqrt{۴+۱۲+۲۰}=۶ \Rightarrow R=۳ \Rightarrow$ حجم کره : $V=\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۴}{۳}\pi\times ۳^{۳}=۳۶\pi$

۲۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. مثلث ABC را که در آن $\hat{A}=۱۲۰^\circ$, $AB=AC$ و $BC=\sqrt{۳}$ در نظر می‌گیریم، داریم:



$\triangle ABH : \cos ۳۰^\circ=\frac{BH}{AB} \Rightarrow AB=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۱ \Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}AB=\frac{۱}{۲}$

$\triangle ABH \cong \triangle ABO \Rightarrow OB=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$, $AO=\frac{۱}{۲}$



$V=\frac{۱}{۳}\pi OC^{۲}.OB-\frac{۱}{۳}\pi OA^{۲}.OB$

$=\frac{۱}{۳}\pi OB\left(OC^{۲}-OA^{۲}\right)$

$=\frac{۱}{۳}\pi\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\left(\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\right)=\frac{\sqrt{۳}\pi}{۳}$

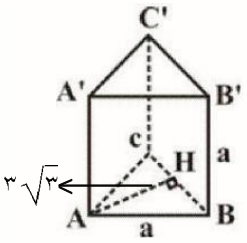
۲۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مساحت نیم‌کره‌ای به شعاع R برابر $۲\pi R^{۲}$ است، اما در این‌جا ظرف دربسته است و باید برای یافتن مساحت کل، مساحت بخش مسطح ظرف را هم در نظر گرفت. در نتیجه داریم:

مساحت کل ظرف $= ۲\pi R^{۲}+\pi R^{۲}=۳\pi R^{۲}=\frac{۲۷}{\pi} \Rightarrow R^{۲}=\frac{۹}{\pi^{۲}} \Rightarrow R=\frac{۳}{\pi}$

حجم ظرف $=$ حجم نیم کره $=\frac{۲}{۳}\pi R^{۳}=\frac{۲\pi}{۳}\times\frac{۲۷}{\pi^{۳}}=\frac{۱۸}{\pi^{۲}}$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

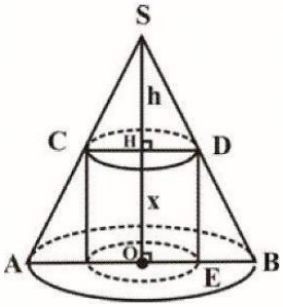
۲۶- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. چون منشور همه‌ی یال‌هایش برابر و قائم است، پس منتظم می‌باشد و قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع است. بنا به فرض $AH = ۳\sqrt{۳}$، در نتیجه:



$$\frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۶$$

$$\text{حجم منشور} = S_{(\triangle ABC)} \times BB' = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \times a = \frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴} \times ۶ = ۵۴\sqrt{۳}$$

۲۷- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. بنا به فرض، شعاع قاعده‌ی مخروط دو برابر شعاع قاعده‌ی اسوانه است.



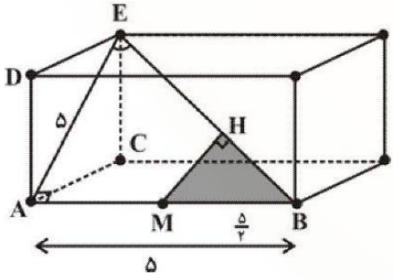
$$OB = ۲OE = ۲r$$

$$\frac{SH}{OS} = \frac{DH}{OB} \Rightarrow \frac{h}{h+x} = \frac{r}{۲r} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow h = x$$

$$OS = ۲h \quad \text{و} \quad OH = x = h$$

$$\frac{\text{حجم استوانه}}{\text{حجم مخروط}} = \frac{\pi r^۲ h}{\frac{۱}{۳}\pi(۲r)^۲(۲h)} = \frac{۳r^۲h}{۸r^۲h} = \frac{۳}{۸}$$

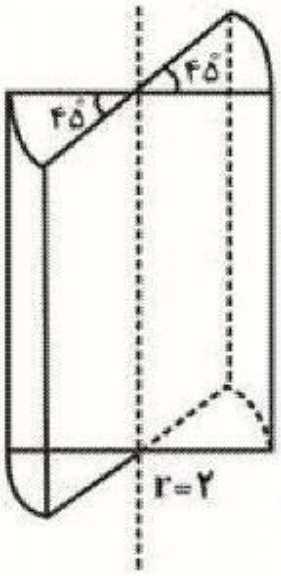
۲۸- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم یال AB بر وجه ADEC عمود است، بنابراین زاویه‌ی بین AB و AE، قائمه است و از طرفی چون $AE = AB = ۵$ نتیجه می‌شود که $\hat{B} = \hat{E} = ۴۵^\circ$ حال از M بر قطر BE، عمود MH را رسم می‌کنیم. در مثلث MBH داریم: $\hat{H} = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} = ۴۵^\circ$، پس مثلث MBH نیز قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است و خواهیم داشت:



$$MH = \frac{BM}{\sqrt{۲}} = \frac{\frac{۵}{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۴}$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in

۲۹- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. همان‌طور که واضح است، دو قطاع ۴۵° از استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۶ پدید می‌آید که در مجموع حجم آن‌ها با حجم یک ربع استوانه برابر است. لذا $h = ۶$ خواهیم داشت:



$$V = ۲\left(\frac{۴۵}{۳۶۰}\pi r^۲ h\right) = \frac{\pi r^۲ h}{۴} \Rightarrow V = \frac{\pi(۲)^۲(۶)}{۴} = ۶\pi$$

۳۰- گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

از آن‌جا که کره از تمام رأس‌های مکعب‌مستطیل می‌گذرد، پس قطر کره با قطر مکعب‌مستطیل برابر است:

$$۲R = d \Rightarrow ۲ \times ۱/۵ = \sqrt{۱^۲ + ۲^۲ + a^۲} \Rightarrow ۹ = ۱ + ۴ + a^۲ \Rightarrow a = ۲$$

$$a = ۲ \ , \ b = ۲ \ , \ c = ۱$$

مساحت کل مکعب‌مستطیل $= ۲(ab + bc + ca) = ۲(۴ + ۲ + ۲) = ۱۶$

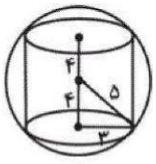
۳۱- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر اندازه‌ی یال‌های مکعب مستطیل را a، b و c فرض کنیم، آن‌گاه باید داشته باشیم:

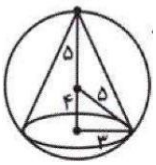
$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ = \left(\sqrt{۷}\right)^۲ = ۷ \\ a^۲ + b^۲ = ۲^۲ = ۴ \\ b^۲ + c^۲ = \left(\sqrt{۵}\right)^۲ = ۵ \end{cases} \Rightarrow ۲\left(a^۲ + b^۲ + c^۲\right) = ۷ + ۴ + ۵ = ۱۶ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۸$$

جای گذار از روابط با

$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۷ + c^۲ = ۸ \\ a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۴ + b^۲ = ۸ \\ a^۲ + b^۲ + c^۲ = ۵ + a^۲ = ۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = ۱ \\ b = ۲ \\ a = \sqrt{۳} \end{cases} \Rightarrow (\text{حجم}) V = abc = ۲\sqrt{۳}$$

۳۲- گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، ارتفاع استوانه برابر هشت است:





حجم استوانه : $V_۱ = \pi r^۲ h = \pi \times ۹ \times ۸ = ۷۲\pi$

هم‌چنین با توجه به شکل زیر، ارتفاع مخروط برابر است با $۹ = ۴ + ۵$.

حجم مخروط : $V_۲ = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h' = \frac{۱}{۳}\pi \times ۳^۲ \times ۹ = ۲۷\pi$

$$\Rightarrow V_۱ - V_۲ = ۷۲\pi - ۲۷\pi = ۴۵\pi$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

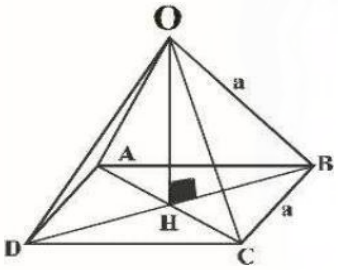
۳۳- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر اندازه‌ی یال مکعب را a بگیریم، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم:

$AB = BC = AC = a\sqrt{۲} \Rightarrow$ ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است.

$\text{مساحت کل مکعب} = ۶a^۲ = ۱۰۸ \Rightarrow a^۲ = ۱۸ \Rightarrow a = ۳\sqrt{۲}$

$$S(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{(AB)^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\left(a\sqrt{۲}\right)^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{\left(۳\sqrt{۲}\right)^۲\sqrt{۳}}{۲} = ۹\sqrt{۳}$$

۳۴- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. طول یال‌های این هرم را a در نظر می‌گیریم، داریم:

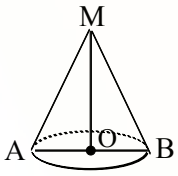


$$BH = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow OH = \sqrt{OB^۲ - BH^۲} = \sqrt{a^۲ - \frac{a^۲}{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$V = \frac{۱}{۳}S(ABCD).OH$$

$$\Rightarrow \frac{۹\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۳}a^۲ \times a\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a^۳ = ۲۷ \Rightarrow a = ۳$$

۳۵- گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. M رأس مخروط و AB یکی از قطرهای قاعده‌ی مخروط است. MO ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین MAB است. طبق فرض سؤال داریم:



$$\begin{cases} S(MAB) = ۱۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}MO.AB = ۱۲ \\ MA = MB = ۵ \end{cases}$$

$$\begin{cases} MO.AO = ۱۲ \\ \overset{\triangle}{AMO} \text{ فیثاغورس در } : MO^۲ + AO^۲ = MA^۲ = ۲۵ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض } : MO > AO} MO = h = ۴ \,,\, AO = R = ۳$$

پس حجم مخروط برابر است با:

$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h = \frac{\pi}{۳}(۹)(۴) = ۱۲\pi$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir
www.konkur.in