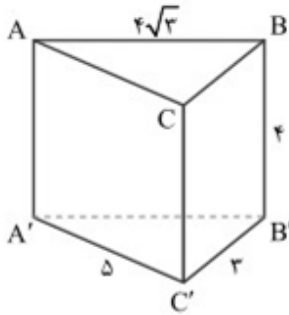


۵۰ تست هندسه دهم فصل ۴ - تجسم فضایی

۱) یک دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه به قاعده‌های ۲ و ۵ و ساق قائم ۳ واحد را حول ساق قائم دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل کدام است؟

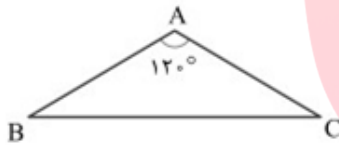
- ۳۶π (۱)      ۳۸π (۲)      ۳۹π (۳)      ۴۰π (۴)



۲) در منشور قائم شکل مقابل داریم  $BB' = 4$ ،  $B'C' = 3$ ،  $A'C' = 5$  و  $AB = 4\sqrt{3}$ ، صفحه‌ای از رأس B و یال  $A'C'$  می‌گذرد. مساحت مقطع حاصل کدام است؟

- ۱۲ (۱)      ۱۴ (۲)      ۲۴ (۳)      ۳۶ (۴)

۳) در مثلث متساوی‌الساقین ABC، اگر ارتفاع وارد بر قاعده، یک باشد، مثلث را حول ارتفاع یکی از ساق‌ها دوران می‌دهیم حجم شکل ایجاد شده چقدر است؟

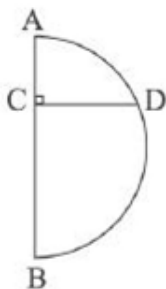


- $3\sqrt{3}\pi$  (۱)       $\frac{3\pi}{2}$  (۲)       $3\pi$  (۳)       $\frac{8\sqrt{3}}{3}$  (۴)

۴) کدام گزاره در فضا همواره درست است؟

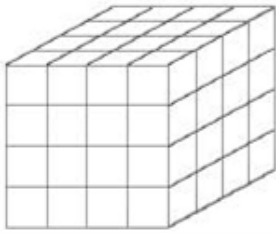
- (۱) دو خط عمود بر یک خط موازینند.  
 (۲) دو صفحه عمود بر یک صفحه موازینند.  
 (۳) خط و صفحه‌ی عمود بر یک صفحه موازی‌اند یا خط بر صفحه واقع است.  
 (۴) از هر نقطه غیر واقع بر صفحه بی‌شمار خط می‌توان بر آن صفحه عمود کرد.

۵) در شکل زیر  $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$  می‌باشد. نیم‌دایره را حول قطر AB دوران می‌دهیم، نسبت مساحت سطح ایجاد شده از دوران پاره‌خط CD حول قطر AB به مساحت رویه کره کدام است؟



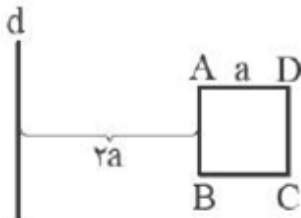
- ۰/۱ (۱)      ۰/۰۱ (۲)      ۰/۱۶ (۳)      ۰/۰۸ (۴)

- ۶ شکل زیر از ۶۴ مکعب کوچک  $1 \times 1 \times 1$  تشکیل شده است و همه وجه‌هایش به‌جز کف آن رنگ شده است. اگر  $a$  تعداد مکعب‌های کوچک با دو وجه رنگ شده و  $b$  تعداد مکعب‌های کوچک با سه وجه رنگ شده باشد، آن‌گاه حاصل  $a + b$  کدام است؟



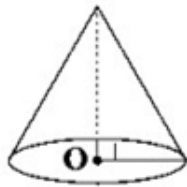
- (۱) ۲۰  
(۲) ۲۴  
(۳) ۲۸  
(۴) ۳۲

- ۷ اگر حجم حاصل از دوران مربع ABCD حول خط  $d$  که موازی AB است برابر  $1080\pi$  باشد،  $a$  کدام است؟



- (۱) ۵  
(۲) ۶  
(۳) ۸  
(۴) ۴

- ۸ از محور مخروط قائم صفحه‌ای عبور داده‌ایم تا بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد، اگر سطح مقطع حاصل از این برش یک مثلث متساوی‌الاضلاع به مساحت  $4\sqrt{3}$  باشد، حجم مخروط قائم چند برابر  $\sqrt{3}$  است؟



- (۱)  $\frac{8\pi}{3}$   
(۲)  $\frac{5\pi}{3}$   
(۳)  $8\pi$   
(۴)  $5\pi$

- ۹ حجم جسم حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه ABC با ضلع‌های قائم AB و AC، به ترتیب با اندازه‌های ۵ و  $2\sqrt{6}$  واحد، حول خط گذرا از رأس C و موازی ضلع AB، کدام است؟

- (۱)  $60\pi$  (۲)  $70\pi$  (۳)  $75\pi$  (۴)  $80\pi$

- ۱۰ اگر دو صفحه  $P$  و  $P'$  و نقطه  $A$  در فضا مفروض باشند به طوری که  $P \cap P' = L$ ،  $A \notin P$  و  $A \notin P'$ ، آن‌گاه تعداد صفحاتی که بر  $A$  بگذرند و با  $P$  و  $P'$  متقاطع باشند، کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

- ۱۱ خط  $d$  و صفحه‌ی  $P$  و نقطه‌ی  $A$  در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه‌ی  $A$ ، موازی صفحه‌ی  $P$  و متقاطع با خط  $d$ ، در کدام وضعیت، خط و صفحه‌ی مفروض، تنها یک جواب دارد؟

- (۱) الزاماً عمود (۲) منطبق (۳) موازی (۴) متقاطع

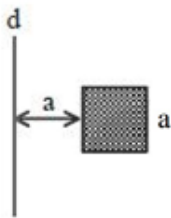
- ۱۲ مثلثی با اضلاع، ۲ و ۳ و  $\sqrt{5}$  را حول ضلع بزرگ‌تر دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

- (۱)  $\frac{17\pi}{9}$  (۲)  $\frac{19\pi}{9}$  (۳)  $\frac{20\pi}{9}$  (۴)  $\frac{7\pi}{3}$

- ۱۳ دو صفحه‌ی متقاطع  $P$  و  $Q$  بر صفحه‌ی  $R$  عمودند. فصل مشترک این دو صفحه نسبت به  $R$  لزوماً چه وضعی دارد؟

- (۱) موازی (۲) عمود (۳) متقاطع (۴) نامشخص

۱۴) مطابق شکل از دوران مربعی به ضلع  $a$  حول خط  $d$ ، جسمی به حجم  $24\pi$  به دست می‌آید. صفحه‌ای عمود بر  $d$  رسم می‌کنیم. مساحت مقطع حاصل از برخورد این صفحه و جسم حاصل کدام است؟



- ۱)  $12\pi$
- ۲)  $6\pi$
- ۳)  $24\pi$
- ۴)  $18\pi$

۱۵) دو خط  $d$  و  $d'$  بر صفحه  $P$  عمودند. اگر خط  $\Delta$  خط  $d$  را قطع کند، وضعیت  $\Delta$  و  $d'$  چگونه است؟

- ۱) موازی
- ۲) عمود بر هم
- ۳) متقاطع
- ۴) غیرمشخص

۱۶) فرض کنید ۲۵ تا مکعب واحد سفید و ۳۹ تا مکعب واحد مشکی داریم. می‌خواهیم توسط همه این مکعب‌های واحد، یک مکعب بزرگ بسازیم، در این صورت حداقل مساحت سطح سفید برابر است با:

- ۱) ۲۴
- ۲) ۲۲
- ۳) ۱۹
- ۴) ۱۷

۱۷) مساحت شکل حاصل از برخورد صفحه  $P$  با کره به شعاع ۷ سانتی‌متر را به دست آورید. (فاصله صفحه تا مرکز کره ۴ سانتی‌متر است.)

۱۸) سطح مقطع یک شکل را تعریف کنید.

۱۹) درست یا نادرست بودن جمله‌های زیر را مشخص کنید.

- الف) سطح مقطع استوانه با یک صفحه افقی دایره است.  درست  نادرست
- ب) سطح مقطع مکعب مستطیل با یک صفحه عمودی مربع است.  درست  نادرست

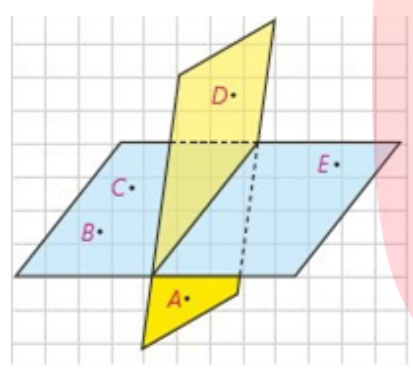
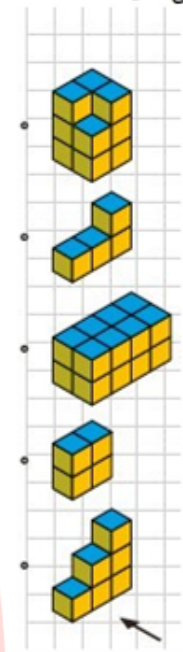
۲۰) سه خط  $I_1$  و  $I_2$  و  $I_3$  دو به دو متقاطع هستند ولی هم‌رس نیستند. ثابت کنید که این سه خط در یک صفحه قرار دارند.

۲۱) در هر شکل، مکعب گسترده‌ی سمت چپ مربوط به کدام یک از مکعب‌های سمت راست است؟

	(۱)	(۲)	(۳)	الف)
	(۱)	(۲)	(۳)	ب)
	(۱)	(۲)	(۳)	ج)

نمای روبه‌رو، چپ و بالای مکعب‌های سمت راست در ستون سمت چپ رسم شده است. هر شکل را به نماهای مربوط به آن وصل کنید.

نمای روبه‌رو	نمای چپ	نمای بالا

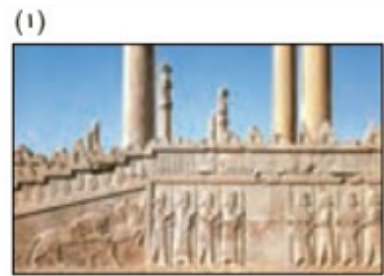
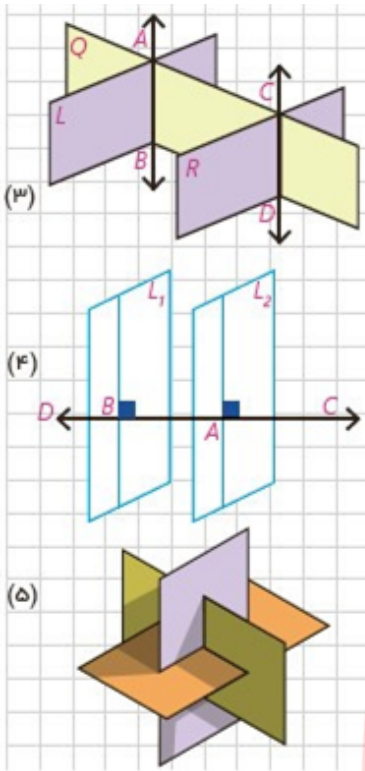


با توجه به شکل به سوالات پاسخ دهید:  
 الف) چند صفحه در شکل می‌بینید، نام ببرید.  
 ب) سه نقطه پیدا کنید که در یک صفحه‌اند.  
 ج) چهار نقطه پیدا کنید که در یک صفحه نیستند.  
 د) دو خط  $AB$  و  $CE$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟  $AC$  و  $CE$  چطور؟

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



می‌دانیم که در صفحه، دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.  
 الف) آیا دو خط عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟  
 ب) آیا دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه همیشه با هم موازی‌اند؟  
 ج) دو صفحه‌ی عمود بر یک خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟  
 د) اگر خطی بر یکی از دو صفحه‌ی موازی عمود باشد، نسبت به دیگری چه وضعیتی دارد؟  
 ه) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، وضعیت خط دوم با صفحه را بررسی کنید.

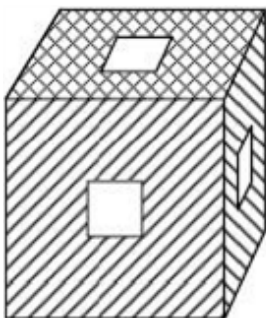
۲۵) در مکعب مفروض، صفحه‌ای بر یک یال و وسط یال دیگر گذشته است. مساحت مقطع حاصل، چند برابر مساحت یکی از وجوه مکعب است؟

- (۱)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  (۲)  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  (۳)  $\frac{3}{2}$  (۴)  $\sqrt{2}$

۲۶) خط  $d$  و صفحه‌ی  $P$  و نقطه‌ی  $A$  در خارج آن دو مفروض است. در رسم خطی گذرا از نقطه‌ی  $A$ ، موازی صفحه‌ی  $P$  و متقاطع با خط  $d$ ، در کدام وضعیت، خط و صفحه مفروض، تنها یک جواب دارد؟  
 (۱) الزاماً عمود (۲) منطبق (۳) موازی (۴) متقاطع

۲۷) نقطه  $M$  از تمام رأس‌های یک مکعب به طول یال ۱۲ واحد، به یک فاصله است. این فاصله کدام است؟

- (۱)  $\frac{7}{5}$  (۲) ۹ (۳)  $6\sqrt{3}$  (۴)  $8\sqrt{3}$

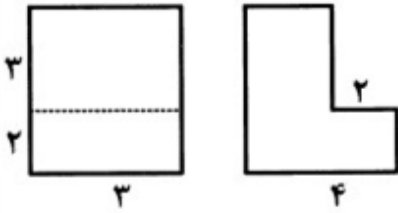


۲۸) از مکعبی به ابعاد  $5 \times 5 \times 5$ ، سه حفره به ابعاد  $1 \times 1 \times 5$  مطابق شکل در وسط وجه‌ها ایجاد می‌کنیم. حجم شکل باقی‌مانده چند سانتی‌متر مکعب است؟

- (۱) ۱۱۰ (۲) ۱۱۱ (۳) ۱۱۲ (۴) ۱۱۴

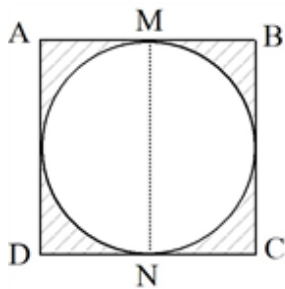
۲۹ کدام گزینه صحیح نیست؟

- (۱) از هر نقطه غیر واقع بر یک صفحه، تنها یک خط می‌توان بر صفحه عمود کرد.  
 (۲) اگر خط  $d$  بر صفحه  $P$  عمود باشد، تنها یک صفحه از خط  $d$  می‌گذرد که بر صفحه  $P$  عمود است.  
 (۳) سه خط دوجه دو متقاطع یا هم‌رسند و یا در یک صفحه قرار دارند.  
 (۴) اگر سه صفحه دوجه دو متقاطع باشند، فصل مشترک‌های این سه صفحه یا موازی‌اند یا هم‌رس.



۳۰ تصویر قائم و تصویر جانبی جسمی داده شده است. حجم آن کدام است؟

- (۱) ۳۲  
 (۲) ۳۶  
 (۳) ۴۲  
 (۴) ۴۵



۳۱ در شکل روبه‌رو، مربع ABCD به طول ضلع ۴ را حول پاره‌خط MN دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل از دوران قسمت هاشورخورده برابر کدام است؟

- (۱)  $8\pi$   
 (۲)  $\frac{8\pi}{3}$   
 (۳)  $16\pi$   
 (۴)  $\frac{16\pi}{3}$

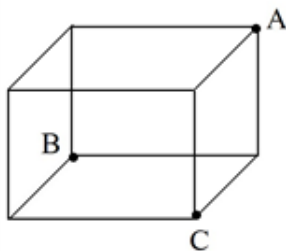
۳۲ ارتفاع مخروطی برابر قطر قاعده آن است. اگر سطح جانبی مخروط  $16\pi\sqrt{5}$  باشد، مساحت سطح مقطع حاصل از

- برخورد صفحه‌ی افقی که از وسط ارتفاع این مخروط می‌گذرد با مخروط فوق برابر کدام است؟  
 (۱)  $9\pi$   
 (۲)  $16\pi$   
 (۳)  $4\pi$   
 (۴)  $8\pi$

۳۳ از دوران مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه ۳ و  $3\sqrt{3}$  حول وتر آن چه شکل فضایی به وجود می‌آید؟

- (۱) مخروط با قاعده‌ی به شعاع  $3\sqrt{3}$   
 (۲) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک به شعاع  $3\sqrt{3}$   
 (۳) مخروط با قاعده‌ی به شعاع  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$   
 (۴) دو مخروط با قاعده‌ی مشترک به شعاع  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۳۴ در مکعب شکل مقابل، نسبت مساحت سطح مقطع صفحه‌ی گذرنده از A، B و C به مساحت کل مکعب کدام است؟

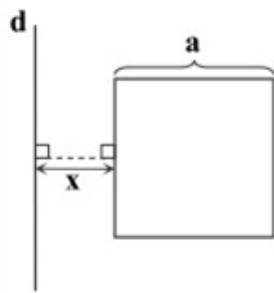


www.my-dars.ir

- (۱)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 (۲)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$   
 (۳)  $\frac{\sqrt{3}}{12}$   
 (۴)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$

۳۵ دو خط  $d$  و  $l$  در فضا موازی‌اند. اگر خط  $d$  را حول  $l$  دوران دهیم، فصل مشترک یک صفحه مانند  $p$  که با  $d$  موازی باشد با سطح دوران یافته، چه شکل‌هایی می‌تواند باشد؟

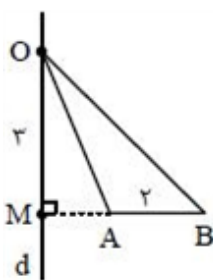
- (۱) تهی، یک خط، دو خط موازی  
(۲) دو خط موازی، یک صفحه  
(۳) یک خط، یک صفحه، تهی  
(۴) یک خط، دو خط موازی، یک صفحه



۳۶ مطابق شکل مقابل، مربعی به ضلع  $a$  را حول خط  $d$  دوران می‌دهیم. اگر  $x = \frac{1}{4}a$  و

حجم شکل حاصل از دوران برابر  $54\pi$  باشد، محیط مربع کدام است؟

- (۱) ۸  
(۲) ۱۲  
(۳) ۹  
(۴) ۱۶



۳۷ در شکل مقابل امتداد  $AB$  بر خط  $d$  عمود می‌باشد. حجم شکل حاصل از دوران مثلث  $OAB$  حول خط  $d$  کدام است؟ ( $AM = 1$ )

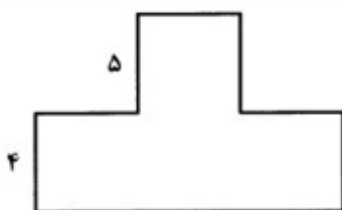
- (۱)  $9\pi$   
(۲)  $8\pi$   
(۳)  $24\pi$   
(۴)  $12\pi$

۳۸ یک کره به شعاع  $3k$  را با صفحه‌ای که از مرکز کره به فاصله  $k$  است قطع می‌دهیم. نسبت مساحت کره به مساحت مقطع حاصل کدام است؟

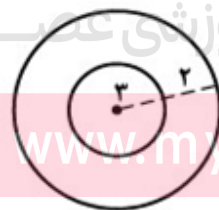
- (۱) ۴  
(۲)  $4/5$   
(۳) ۵  
(۴)  $16/3$

۳۹ مکعبی به ضلع  $a$  را به مکعب‌های  $1 \times 1 \times 1$  تقسیم کرده‌ایم و سپس تمام وجه‌های مکعب را رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. اگر تعداد مکعب‌های  $1 \times 1 \times 1$  رنگ شده ۹۸ باشد، چند مکعب  $1 \times 1 \times 1$  وجود دارد که فقط دو وجه آن رنگی شده باشد؟

- (۱) ۱۲  
(۲) ۲۴  
(۳) ۳۶  
(۴) ۴۸



۴۰ نمای بالا و نمای روبه‌رو از شکلی به صورت زیر است. حجم این شکل فضایی چند برابر  $\pi$  است؟



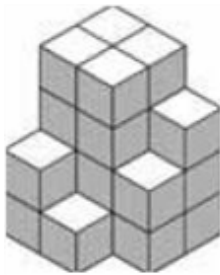
- (۱) ۱۲۰  
(۲) ۱۲۵  
(۳) ۱۳۵  
(۴) ۱۴۵

۴۱ قاعده‌ی منشور قائم، شش ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن  $7/5$  واحد است. حجم بزرگ‌ترین استوانه که در داخل این منشور جای گیرد، چند برابر  $\pi$  است؟

- (۱) ۷۵  
(۲) ۸۴  
(۳) ۹۰  
(۴) ۱۰۵

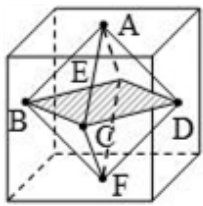
خط  $d$  با صفحه‌ی  $P$  متقاطع است و عمود بر هم نیستند. چند صفحه شامل  $d$  و عمود بر  $P$  وجود دارد؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

مساحت کل منشور قائمی که قاعده آن یک لوزی با زاویه حاده  $60^\circ$  باشد، برابر  $32 + 4\sqrt{3}$  است. اگر مجموع ارتفاع و ضلع قاعده این منشور ۶ باشد، طول ارتفاع آن کدام می‌تواند باشد؟  
 (۱)  $\frac{7}{2}$  (۲)  $2\sqrt{3}$  (۳) ۳ (۴) ۴



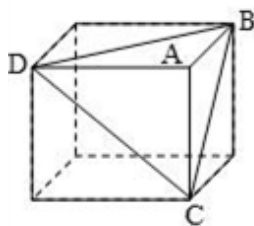
نسبت مساحت نمای چپ به مساحت نمای روبه‌رو در شکل مقابل کدام است؟  
 (۱)  $\frac{11}{10}$  (۲)  $\frac{11}{9}$  (۳)  $\frac{10}{9}$  (۴) ۱

دو خط متناظر در فضا مفروض‌اند. چند صفحه وجود دارد که بر هر دو خط عمود باشد؟  
 (۱) یک (۲) هیچ (۳) دو (۴) بی‌شمار

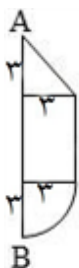


مکعبی به ضلع  $2\sqrt{3}$  مفروض است. اگر مرکز تقارن هر کدام از وجه‌های جانبی، رأس‌های یک هشت‌وجهی منتظم باشند، حجم این هشت‌وجهی منتظم کدام است؟  
 (۱)  $4\sqrt{3}$  (۲)  $6\sqrt{3}$  (۳)  $8\sqrt{3}$  (۴)  $12\sqrt{3}$

در کره‌ای به شعاع  $R$  یک مخروط به ارتفاع  $\frac{3R}{2}$  محاط شده است. نسبت حجم مخروط به حجم کره کدام است؟  
 (۱)  $\frac{3}{8}$  (۲)  $\frac{9}{32}$  (۳)  $\frac{5}{8}$  (۴)  $\frac{27}{32}$



در مکعب مقابل به ضلع  $a$  فاصله نقطه  $A$  از صفحه  $BCD$  چیست؟  
 (۱)  $\frac{a}{2}$  (۲)  $\frac{a}{3}$  (۳)  $\frac{a}{\sqrt{3}}$  (۴)  $\frac{a}{\sqrt{2}}$



اگر شکل روبرو را که شامل یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین و یک مستطیل و یک ربع دایره است، حول  $AB$  دوران می‌دهیم. آنگاه حجم شکل حادث کدام است؟  
 (۱)  $63\pi$  (۲)  $47\pi$  (۳)  $118\pi$  (۴)  $46\pi$



در یک چهاروجهی منتظم به ضلع ۲ مساحت کل برابر کدام است؟

۶ $\sqrt{3}$  (۴)

۸ $\sqrt{3}$  (۳)

۲ $\sqrt{3}$  (۲)

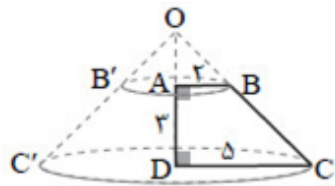
۴ $\sqrt{3}$  (۱)



# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از دوران دوزنقه قائم‌الزاویه  $ABCD$  حول ساق قائم  $AD$  یک مخروط ناقص ایجاد می‌شود. با ادامه دادن ساق‌های  $BC$  و  $B'C'$  این مخروط ناقص به یک مخروط قائم تبدیل می‌شود.

برای پیدا کردن حجم مخروط ناقص کافی است حجم مخروط کوچک‌تر را از حجم مخروط بزرگ‌تر کم کنیم. برای این کار ابتدا ارتفاع  $OA$  مخروط کوچک را به دست می‌آوریم:

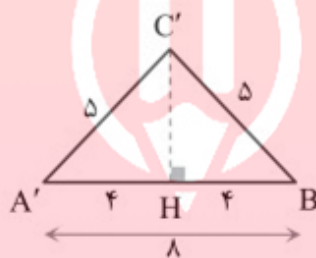
$$\triangle ODC : AB \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{2}{5} \xrightarrow{\text{تفضیل از مخرج}} \frac{OA}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{OA}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow OA = 2$$

$$\text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\pi(5)^2(3) = \frac{125}{3}\pi$$

$$\text{حجم مخروط کوچک} = \frac{1}{3}s'h' = \frac{1}{3}\pi(2)^2(2) = \frac{8}{3}\pi$$

$$\text{حجم مخروط ناقص} = \frac{125\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{117\pi}{3} = 39\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفحه‌ی گذرنده از  $B$  و یال  $A'C'$ ، مقطع مثلث  $A'BC'$  را به وجود می‌آورد. داریم:



$$\triangle BB'C' : BC'^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC' = 5, \quad A'C' = 5$$

$$\triangle AA'B' : A'B^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 = 48 + 16 = 64 \Rightarrow A'B = 8$$

$$\triangle A'C'B : C'H^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow C'H = 3$$

$$S_{\triangle A'C'B} = \frac{1}{2} \times 3 \times 8 = 12$$

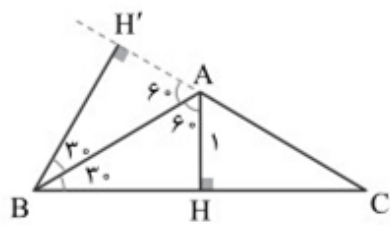
مای درسی

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث ABC حول ارتفاع BH' دو مخروط بزرگ و کوچک ایجاد می‌شود به طوری که BH' ارتفاع هر دوی آنها و AH' و CH' شعاع قاعده‌ی آنها است.



$$\triangle ABH : \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = AC = 2$$

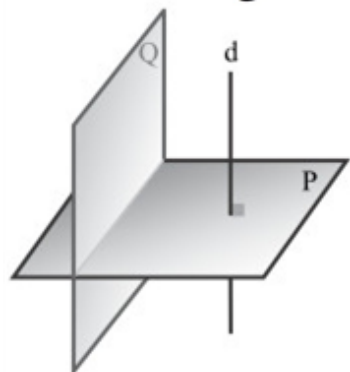
$$\triangle ABH' : \sin 60^\circ = \frac{BH'}{AB} \Rightarrow BH' = \sqrt{3}$$

در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه ABH' ضلع AH' روبه‌روی زاویه‌ی ۳۰ درجه است. پس نصف AB و برابر یک است. بنابراین  $CH' = 3$  داریم.

$$\text{حجم مخروط کوچک} - \text{حجم مخروط بزرگ} = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{3} \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \pi$$

۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط و صفحه‌ی عمود بر یک صفحه یا موازی‌اند یا خط بر صفحه واقع است.



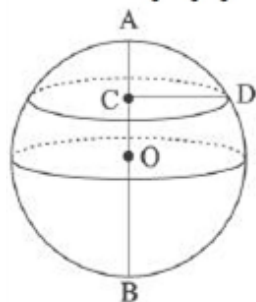
$$\left. \begin{matrix} Q \perp P \\ d \perp P \end{matrix} \right\} \Rightarrow d \parallel Q$$

ولی در فضا دو خط عمود بر یک خط می‌توانند متناظر یا متقاطع هم باشند و دو صفحه‌ی عمود بر یک صفحه می‌توانند متقاطع باشند و از هر نقطه فقط یک خط عمود بر یک صفحه می‌توان رسم کرد. پس گزینه‌های «۱»، «۲» و «۴» نادرست هستند.

www.my-dars.ir

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

شکل حاصل از دوران حول قطر  $AB$  یک کره است که  $OA = OB = OD = R$  و نقطه  $O$  مرکز کره است.



می‌دانیم مساحت رویه کره برابر  $4\pi R^2$  است.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \xrightarrow{AB = 2R} AC = \frac{1}{2}R$$

$$\Rightarrow OC = OA - AC = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

$$\triangle OCD (\hat{C} = 90^\circ): CD = \sqrt{OD^2 - OC^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

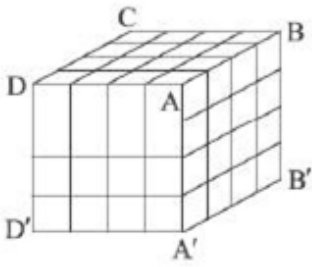
مساحت ایجاد شده از دوران پاره خط  $CD$  حول قطر  $AB$  برابر است با:

$$\pi CD^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 = \frac{3}{4}\pi R^2 \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{16}$$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



(۱) روی یال‌های  $AB$  و  $BC$  و  $DC$  و  $AD$  هر کدام دو مکعب با دو وجه رنگی وجود دارد، پس  $۲ \times ۲ = ۸$  مکعب داریم.

(۲) روی یال‌های  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  و  $DD'$  هر کدام سه مکعب با دو وجه رنگی وجود دارد، پس  $۳ \times ۴ = ۱۲$  مکعب داریم.

(۳) روی یال‌های  $A'B'$  و  $B'C'$  و  $C'D'$  و  $A'D'$  مکعب‌های هر سر یال دارای دو وجه رنگی هستند که در بخش ۲ آن‌ها شمرده شده‌اند، بنابراین تعداد مکعب‌های با دو وجه رنگی برابر  $۲۰ = ۱۲ + ۸ = a$  است. در ضمن فقط رئوس مکعب بزرگ می‌توانند دارای سه وجه رنگ شده باشند، آن‌ها عبارت‌اند از رأس‌های  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$ . توجه کنید چون کف مکعب بزرگ رنگ نشده است، رئوس پایینی سه وجه رنگ شده ندارد، بنابراین تعداد مکعب‌های با سه وجه رنگ شده برابر  $b = ۴$  است، پس  $a + b = ۲۴$  است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حجم حاصل از دوران فضای بین دو استوانه است که استوانه بزرگ‌تر دارای شعاع  $۳a$  و ارتفاع  $a$  است و استوانه کوچک‌تر دارای شعاع  $۲a$  و ارتفاع  $a$  است. ۷

$$۱۰۸۰\pi = (۳a)^2 a\pi - (۲a)^2 a\pi \Rightarrow ۱۰۸۰\pi = ۹a^3\pi - ۴a^3\pi$$

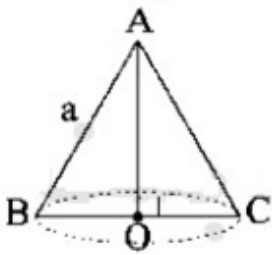
$$\Rightarrow ۱۰۸۰\pi = ۵a^3\pi \Rightarrow ۵a^3 = ۱۰۸۰ \Rightarrow a^3 = ۲۱۶ \Rightarrow a = ۶$$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$$S_{\text{مساوی الاضلاع}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

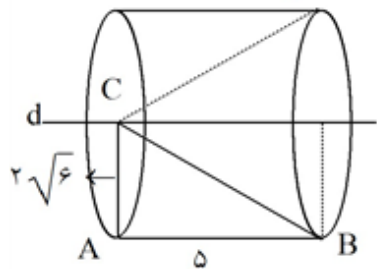


قطر قاعده = ۴

$$\text{ارتفاع مثلث مساوی الاضلاع} = OA = \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \times (\text{مساحت قاعده}) \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{3} \times \pi (2)^2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8\pi}{3} \sqrt{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مثلث قائم الزاویه ABC حول خط d یک استوانه که از آن مخروطی جدا شده است به دست می‌آید. به طوری که ارتفاع استوانه و مخروط ۵ و شعاع قاعده‌ی هر دو آن‌ها  $2\sqrt{6}$  است. ۹



$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = 24 \times 5\pi$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{6})^2 (5) = \frac{24 \times 5}{3} \pi$$

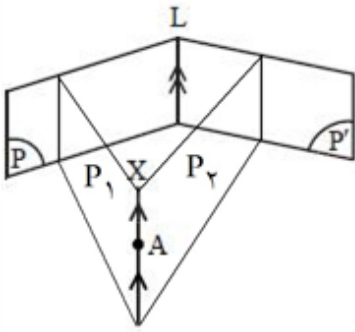
$$\text{حجم خواسته شده} = 24 \times 5\pi - \frac{24 \times 5}{3} \pi = \frac{2 \times 24 \times 5}{3} \pi = 80\pi$$

بنابراین:

گروه آموزشی عصر

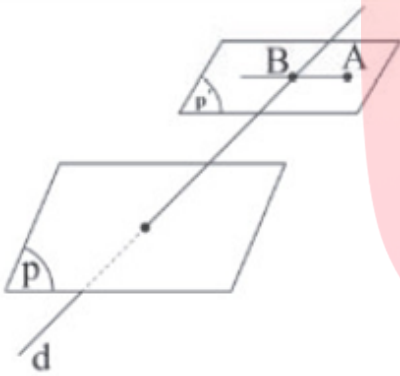
www.my-dars.ir

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. به روش رسم شکل به شرح زیر داریم:

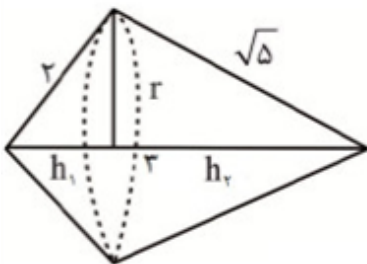


اکنون از A خط AX را موازی L رسم می‌کنیم. از این خط بی‌شمار صفحه مانند  $P_1, P_2, \dots, P_n$  می‌گذرد که دو صفحه P و P' را قطع می‌کند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید خط d و صفحه‌ی P متقاطع باشند. از نقطه‌ی A، صفحه‌ی P' را موازی صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. خط d صفحه‌ی P' را در نقطه‌ی B قطع می‌کند. در این صورت خط گذرنده از نقاط A و B، تنها خطی است که خط d را قطع کرده است و با صفحه‌ی P موازی است. پس باید خط d با صفحه‌ی P متقاطع باشد تا مسئله یک جواب داشته باشد و مسلماً عمود بودن خط d بر صفحه‌ی P تأثیری در جواب ندارد. همان متقاطع بودن کفایت.



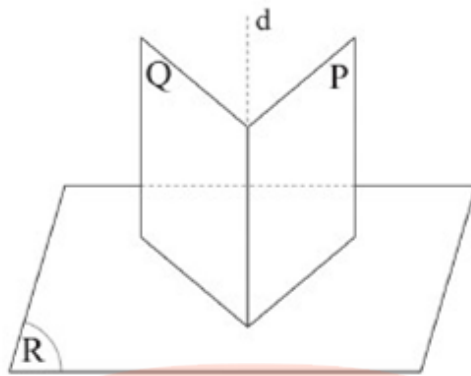
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث با اضلاع موردنظر قائم‌الزاویه بوده پس از دوران این مثلث حول وتر دو مخروط ایجاد می‌شود و حجم شکل حاصل برابر است با:



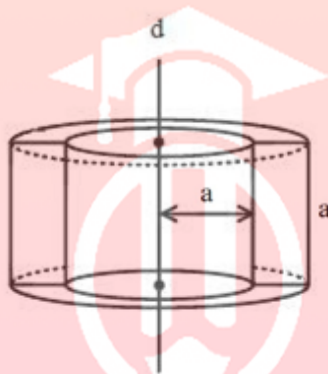
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{20}{9} \pi$$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  $d$  فصل مشترک دو صفحه‌ی متقاطع  $P$  و  $Q$  است، چون هر دو صفحه بر  $R$  عمودند، پس  $d$  نیز بر  $R$  عمود است. (مطابق شکل)



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم حاصل از دوران مربع به ضلع  $a$  حول خط  $d$ ، جسمی به شکل زیر به دست می‌آید، داریم:

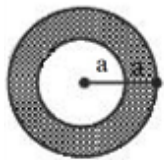


حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده  $a$  و ارتفاع  $a$  - حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده  $2a$  و ارتفاع  $a$  = حجم جسم حاصل

$$V = \pi \times (2a)^2 \times a - \pi \times a^2 \times a = 4\pi a^3 - \pi a^3 = 3\pi a^3$$

$$\Rightarrow V = 24\pi \Rightarrow 3\pi a^3 = 24\pi \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

با رسم صفحه‌ای عمود بر  $d$ ، مقطع حاصل برابر است با:



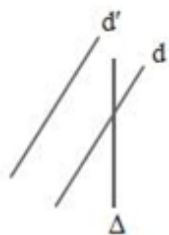
$$S = \pi \times (2a)^2 - \pi a^2 = 4\pi a^2 - \pi a^2 = 3\pi a^2 = 3\pi \times 2^2 = 12\pi$$

مای درس

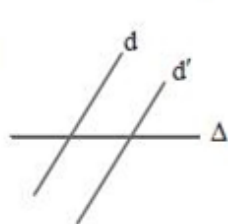
گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

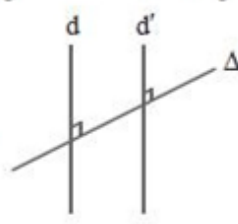
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وقتی  $d$  و  $d'$  بر صفحه‌ای عمود هستند یعنی با هم موازیند. اگر خط  $\Delta$  خط  $d$  را قطع کند، تمام حالت‌های زیر ممکن است برای  $d'$  و  $\Delta$  پیش آید، پس وضعیت مشخصی ندارند.



$d'$  و  $\Delta$  غیرموازی



$d'$  و  $\Delta$  متقاطع



$d'$  و  $\Delta$  عمود بر هم

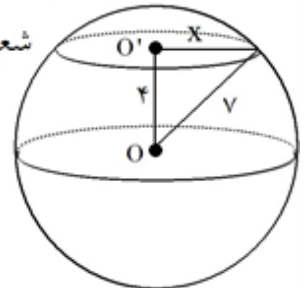


۱۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کلاً  $25 + 39 = 64$  مکعب داریم. چون  $4 \times 4 \times 4 = 64$  پس مکعبی داریم که همه ابعاد آن ۴ واحد است. برای حداقل شدن سطح سفید، همه مکعب‌هایی که هیچ وجه آن‌ها قابل مشاهده نیست را سفید می‌گذاریم که این تعداد برابر است با:  $(4-2)(4-2)(4-2) = 8$  یعنی ۸ مکعب سفید در مرکز مکعب  $4 \times 4 \times 4$  قرار می‌گیرد و دیده نمی‌شود. حال  $25 - 8 = 17$  مکعب سفید می‌ماند. چون قرار است که مساحت سطح سفید حداقل شود، سطوحی که تنها یک وجه آن‌ها قابل مشاهده است را سفید قرار می‌دهیم که تعداد این مکعب‌ها برابر است با:  $6 \times 2 \times 2 = 24$  پس ۲۴ تا مکعب که فقط یک وجه آن‌ها قابل مشاهده می‌باشد. ۱۷ تا را انتخاب کرده و سفید می‌کنیم که این یعنی حداقل مساحت سفید، ۱۷ می‌باشد.

۱۷ شکل سطح مقطع، دایره است که شعاع آن از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$v^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 49 - 16 \Rightarrow x^2 = 33 \Rightarrow x = \sqrt{33}$$

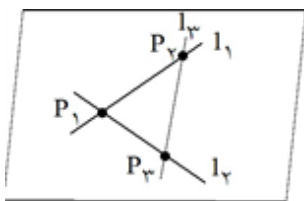
$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2 \Rightarrow \text{مساحت سطح مقطع} = \pi (\sqrt{33})^2 = 33\pi$$



۱۸ شکی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

۱۹ الف) درست ب) نادرست

۲۰ چون ۳ خط دو به دو متقاطع هستند، فرض می‌کنیم که  $P_1$  و  $P_2$  و  $P_3$  نقاط برخورد باشند. از طرفی این ۳ نقطه متمایز هستند و بر یک خط واقع نمی‌شوند. همچنین که از ۳ نقطه متمایز یک صفحه عبور می‌کند و از هر خط دو نقطه‌اش روی این صفحه واقع است، بنابراین هر سه روی این صفحه قرار دارند.



۲۱ الف) شکل ۲

ب) شکل ۱

ج) شکل ۳

۲۲

نمای روبه‌رو	نمای چپ	نمای بالا

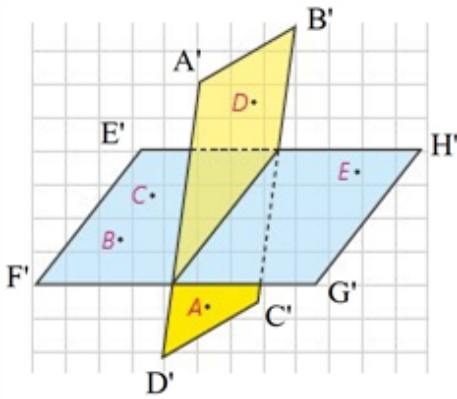
الف) دو صفحه‌ی متقاطع  $A'B'C'D'$  و  $E'F'G'H'$

ب)  $B, C, E$

ج)  $B, E, A, D$

د) دو خط  $AB$  و  $CE$  متناظر هستند و دو خط  $AC$  و  $CE$

در نقطه‌ی  $C$  متقاطع هستند.



الف) بله، دو خط عمود بر یک صفحه با هم موازی‌اند. (مطابق شکل ۱)

ب) خیر، دو صفحه متقاطع هم می‌توانند بر یک صفحه عمود باشند. (مطابق شکل ۲ یا ۵)

ج) با هم موازی‌اند. (مطابق شکل ۴)

د) بر دیگری نیز عمود است. (مطابق شکل ۴)

ه) خط دوم نیز بر آن صفحه عمود است. (مطابق شکل ۳)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفحه‌ای که از یال  $AD$  و از وسط یال  $A'B'$  (یعنی

نقطه  $M$ ) بگذرد از وسط یال  $C'D'$  (یعنی نقطه  $N$ ) نیز می‌گذرد و مستطیل  $AMND$  سطح مقطع آن صفحه با مکعب است. اگر طول یال مکعب  $a$  باشد،

آن‌گاه  $D'N = \frac{a}{2}$  و  $DD' = a$  است و در مثلث قائم‌الزاویه  $DD'N$  داریم:

$$DN^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DN = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$S_{\text{مقطع}} = S_{AMND} = AD \cdot DD' = a \times \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{5}}{2}$$

پس:

مساحت هر وجه مکعب  $a^2$  است، پس مساحت مقطع  $\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$  برابر آن است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تمام خطهایی که از  $A$  می‌گذرند و موازی با صفحه  $P$

هستند روی صفحه‌ای قرار دارند که شامل نقطه  $A$  است و با صفحه  $P$  موازی

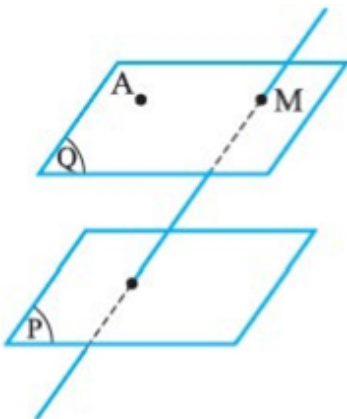
می‌باشد. (صفحه  $Q$ )

اگر خط  $d$  موازی با  $P$  باشد ولی روی  $Q$  نباشد هر خطی که نقطه  $A$  را به یک نقطه از  $d$  وصل کند،  $P$  را قطع می‌کند. در این صورت مساله جواب ندارد.

اگر روی  $d$  باشد، آن‌گاه هر خطی که نقطه  $A$  را به یک نقطه از  $d$  وصل کند جواب مساله است و مساله بی‌نهایت جواب دارد.

اما اگر  $d$ ، صفحه  $P$  را قطع کند،  $Q$  را نیز در  $M$  قطع می‌کند و  $AM$  تنها جواب مساله است. یعنی اگر خط  $d$  صفحه  $P$  را قطع کند، آن‌گاه فقط یک خط وجود دارد

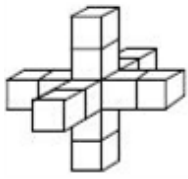
که از  $A$  می‌گذرد،  $d$  را قطع می‌کند و با صفحه  $P$  موازی است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۷

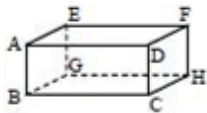
نقطه M در وسط قطر مکعب است قطر مکعب  $12\sqrt{3}$  می باشد پس فاصله از رأس‌ها برابر است با  $6\sqrt{3}$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حفره‌ها مطابق شکل زیر خواهند بود یعنی در مجموع ۱۳ مکعب  $1 \times 1 \times 1$  خواهیم داشت، پس: ۲۸



$$\text{حجم باقی مانده} = 5 \times 5 \times 5 - 13(1 \times 1 \times 1) = 125 - 13 = 112$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گزینه‌های ۱، ۳ و ۴، همگی صحیح می‌باشند، ولی با توجه به شکل زیر، گزینه (۲) نادرست است. ۲۹



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مکعب مستطیل به ابعاد ۵ و ۳ و ۴ واحد یک مکعب مستطیل به ابعاد ۲ و ۳ و ۳ واحد بریده شده است پس حجم جسم مفروض  $42 = (5 \times 3 \times 4) - (3 \times 3 \times 2)$  ۳۰

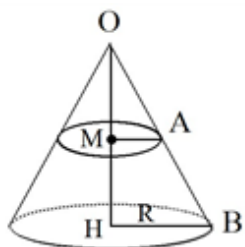
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از دوران مربع MNd<sub>h</sub> یک استوانه به شعاع قاعده‌ی ۲ و ارتفاع ۴ ایجاد می‌شود و از دوران دایره حول MN یک کره به شعاع ۲ به دست می‌آید. توجه کنید که: ۳۱

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi R^2 h = \pi \times 2^2 \times 4 = 16\pi$$

حجم خواسته شده محدوده‌ی بین این استوانه و کره است.

$$\text{حجم خواسته شده} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم کره} = \frac{16\pi}{3}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید M وسط ارتفاع OH باشد. اگر صفحه‌ی افقی از M عبور کند، مقطع حاصل دایره‌ای به شعاع MA است. ۳۲

چون سطح جانبی مخروط از رابطه‌ی  $\pi RL$  به دست می‌آید که در آن R شعاع قاعده و L اندازه‌ی مولد آن است. پس: گروه آموزشی عصر

$$\pi RL = 16\sqrt{5}\pi \Rightarrow RL = 16\sqrt{5} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\begin{aligned} \triangle OBH: OH^2 + HB^2 &= OB^2 \Rightarrow OH^2 + R^2 = OB^2 \xrightarrow{OH = 2R} \\ (2R)^2 + R^2 &= OB^2 \Rightarrow OB = \sqrt{5}R \Rightarrow L = \sqrt{5}R \quad (2) \end{aligned}$$

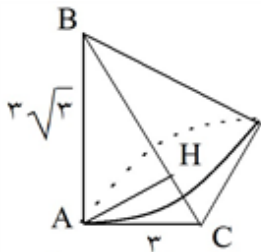
از تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

$$R(\sqrt{5}R) = 16\sqrt{5} \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$$

چون M وسط ارتفاع OH و موازی BH است، پس بنابر قضیه‌ی میان خط ۲. بنابراین:  $MA = \frac{BH}{2} = 2$

$$\text{مساحت مقطع} = \pi MA^2 = 4\pi$$

۳۳



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم ارتفاع AH در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC این مثلث به دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABH و ACH تقسیم می‌شود. می‌دانیم از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول ضلع قائم آن مخروط به وجود می‌آید. بنابراین از دوران این دو مثلث حول خط BC دو مخروط با قاعده‌ی مشترک و شعاع قاعده‌ی AH ایجاد می‌شود. از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه نتیجه می‌شود.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 27 + 9 = 36 \Rightarrow BC = 6$$

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 6AH = 3\sqrt{3} \times 3 \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

پس شکل فضایی ایجاد شده دو مخروط با قاعده‌ی مشترک به شعاع  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  است.

۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اندازه‌ی یال مکعب را  $a$  در نظر می‌گیریم. سطح مقطع موردنظر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC با طول ضلع  $a\sqrt{2}$  است. در نتیجه:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{مکعب}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} (a\sqrt{2})^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر خط  $d$  را حول  $l$  دوران دهیم یک سطح استوانه‌ای شکل ایجاد می‌شود. صفحه‌ای که موازی  $p$  باشد نسبت به سطح استوانه‌ای سه حالت زیر را دارد:  
 الف) اگر فاصله‌ی صفحه‌ی  $p$  از خط  $l$  کم‌تر از فاصله‌ی  $d$  و  $l$  باشد، فصل مشترک، دو خط موازی خواهد بود.  
 ب) اگر فاصله‌ی  $p$  از خط  $l$  دقیقاً برابر فاصله‌ی دو خط  $d$  و  $l$  باشد، آن‌گاه  $p$  بر سطح استوانه‌ای شکل مماس شده و فصل مشترک، یک خط خواهد بود.  
 ج) اگر فاصله‌ی  $p$  از خط  $l$  بیش‌تر از فاصله‌ی  $d$  و  $l$  باشد، فصل مشترک ندارند و مکان تهی است.

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نکته: حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ی  $r$  و ارتفاع  $h$  برابر با  $V = \pi r^2 h$  است. شکل حاصل از دوران مربع حول خط  $d$ ، فضای بین دو استوانه به ارتفاع  $a$  و شعاع‌های قاعده‌ی  $x$  و  $a+x$  است. پس داریم:

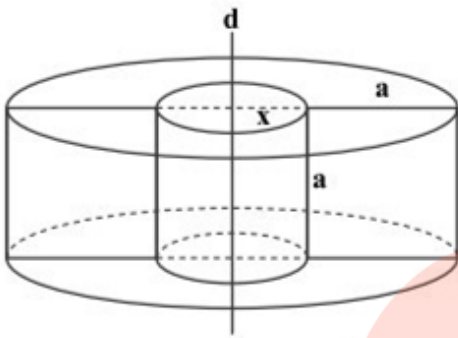
$$r_1 = a + x: \text{شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی بزرگ}$$

$$r_2 = x: \text{شعاع قاعده‌ی استوانه‌ی کوچک}$$

$$h = a: \text{ارتفاع هر دو استوانه}$$

$$V_1 = \pi r_1^2 h = \pi (a+x)^2 a: \text{حجم استوانه‌ی بزرگ}$$

$$V_2 = \pi r_2^2 h = \pi x^2 a: \text{حجم استوانه‌ی کوچک}$$



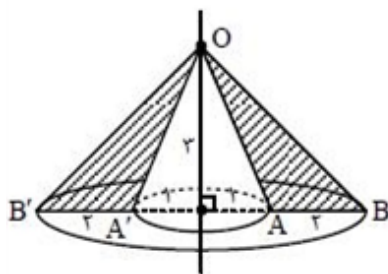
$$(V = V_1 - V_2 = \pi(a+x)^2 a - \pi x^2 a = \pi a (a+x)^2 - x^2)$$

$$= \pi a (a^2 + x^2 + 2ax - x^2) = \pi a (a^2 + 2ax)$$

$$= \pi a^2 (a + 2x) \stackrel{2x=a}{=} \pi a^2 (a+a) \Rightarrow V = \pi a^2 \times 2a = 2\pi a^3$$

$$\xrightarrow{V=54\pi} 2\pi a^3 = 54\pi \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a=3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل، حجم مورد نظر، تفاضل حجم دو مخروط، یکی با شعاع قاعده ۳ و دیگری با شعاع قاعده ۱ می‌باشد:



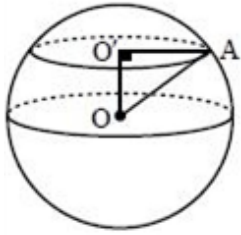
$$V = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 3 - \frac{1}{3}\pi \times 1^2 \times 3 = 9\pi - \pi = 8\pi$$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل مقطع حاصل دایره‌ای به شعاع  $O'A$  است. با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث  $OO'A$  داریم:



$$O'A^2 = OA^2 - OO'^2 = 9k^2 - k^2 = 8k^2$$

در نتیجه مساحت مقطع برابر است با:

$$\pi O'A^2 = 8k^2 \pi$$

از طرفی مساحت کره برابر است با:  $4\pi(OA)^2 = 4\pi(3k)^2 = 36k^2\pi$  پس نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{8k^2\pi}{36k^2\pi} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = \frac{4}{18}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $a^3$  مکعب کوچک در این شکل وجود دارد، مکعب‌هایی که رنگ نشده‌اند مکعب‌هایی هستند که درون مکعب بزرگ‌تر قرار دارند و با هم مکعبی تشکیل می‌دهند که به اندازه هر یال آن ۲ تا کم‌تر از اندازه یال مکعب بزرگ‌تر است، در نتیجه تعداد آنها برابر است با  $(a-2)^3$ . بنابراین برای به دست آوردن تعداد مکعب‌های رنگ شده کافی است تعداد کل مکعب‌ها را منهای تعداد مکعب‌های رنگ نشده کنیم.

$$a^3 - (a-2)^3$$

$$a^3 - (a-2)^3 = 98 \Rightarrow a^3 - a^3 - 12a + 6a^2 + 8 = 98$$

$$\Rightarrow 6a^2 - 12a - 90 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 15 = 0 \Rightarrow (a-5)(a+3) = 0 \Rightarrow a = 5$$

مکعب‌هایی که فقط دو وجه رنگ شده دارند مکعب‌هایی هستند که یال‌های مکعب بزرگ آن‌ها نیز است و غیر از مکعب‌های گوشه‌ای هستند روی هر یال  $3 - 2 = 1$  مکعب قرار دارد و هر مکعب ۱۲ یال دارد، بنابراین تعداد مطلوب برابر است با:  $12 \times 3 = 36$ .

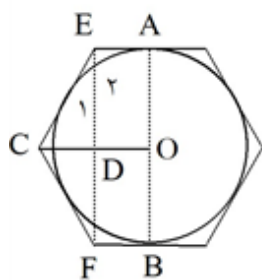
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. استوانه به شعاع ۳ و ارتفاع ۵ بر روی استوانه دیگری به شعاع ۵ و ارتفاع ۴ قرار دارد حجم شکل فضایی برابر مجموع حجم‌های دو استوانه است.

$$V = \pi(9 \times 5) + \pi(25 \times 4)$$

پس اندازه حجم ۱۴۵ برابر  $\pi$  است. [www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بزرگ‌ترین دایره‌ای که داخل ۶ ضلعی قرار می‌گیرد بر همه اضلاع آن مماس است.

هر زاویه  $\Rightarrow 120^\circ = 720^\circ$  = مجموع زوایای داخلی ۶ ضلعی

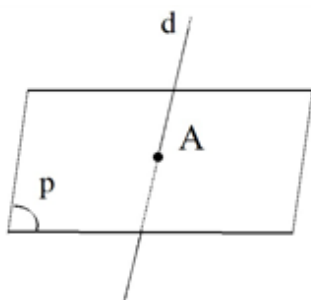


$$E_1 = 120 - 90 = 30 \Rightarrow ED = \frac{\cos 120^\circ}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow EF = 2\sqrt{3} \xrightarrow{EF = AB} AB = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$V = \pi \times (\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{5} = 90$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم  $d$ ، در نقطه‌ی  $A$ ، با صفحه‌ی  $P$  متقاطع

است. از نقطه‌ی  $A$  خطی عمود بر  $P$  رسم می‌کنیم و سپس صفحه‌ی شامل  $d$  و خط عمود را در نظر می‌گیریم، این صفحه، شامل  $d$  و بر  $P$  عمود است و چون خط عمود یکتاست، پس این صفحه نیز یکتاست.

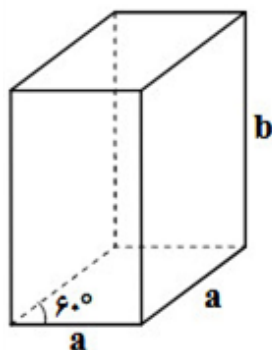
# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

$a^2 \sin \theta$

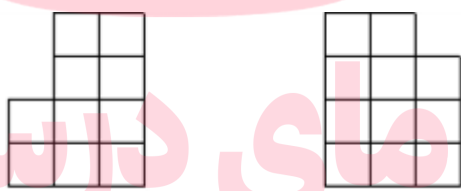
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: مساحت یک لوزی به ضلع  $a$  با زاویه حاده  $\theta$  برابر است با: اگر طول ضلع قاعده را  $a$  و ارتفاع را  $b$  در نظر بگیریم، داریم:



$$\begin{aligned}
 & \text{مساحت دو قاعده} \quad \quad \quad \text{مساحت جانبی} \\
 & \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 & \text{مساحت کل: } S = 2a^2 \sin 60^\circ + 4ab = \sqrt{3}a^2 + 4ab \\
 & S = 4\sqrt{3} + 32 \\
 & \xrightarrow{\hspace{10em}} \sqrt{3}a^2 + 4ab = 4\sqrt{3} + 32
 \end{aligned}$$

طبق فرض  $a + b = 6$  پس  $b = 6 - a$ . با جایگذاری این مقدار در معادله بالا داریم:

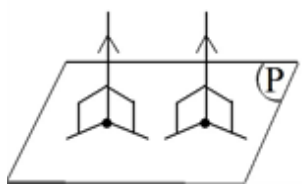
$$\begin{aligned}
 \sqrt{3}a^2 + 4a(6 - a) &= 4\sqrt{3} + 32 \Rightarrow \sqrt{3}(a^2 - 4) + 24a - 4a^2 - 32 = 0 \\
 \Rightarrow \sqrt{3}(a^2 - 4) - 4a^2 + 16 + 24a - 48 &= 0 \Rightarrow \sqrt{3}(a^2 - 4) - 4(a^2 - 4) + 24(a - 2) = 0 \\
 \Rightarrow (\sqrt{3} - 4)(a^2 - 4) + 24(a - 2) &= 0 \Rightarrow (a - 2)((\sqrt{3} - 4)(a + 2) + 24) = 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \xrightarrow{b = 6 - a} b = 4 \\ a = \frac{24}{4 - \sqrt{3}} - 2 \xrightarrow{b = 6 - a} b = 4 - \frac{24}{4 - \sqrt{3}} \end{cases}
 \end{aligned}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نمای چپ (۱۱ مربع)      نمای روبه رو (۱۰ مربع)

گزینه ۲ صحیح است. اگر دو خط بر صفحه‌ای عمود باشند، یا هم موازی اند و نمی‌توانند متنافر باشند.



[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)



۴۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کافی است حجم هرم ABCDE را به دست آورده دو برابر کنیم. ارتفاع این هرم نصف ضلع مکعب برابر  $\sqrt{3}$  می باشد. از طرفی قطر BD از قاعده ی مربع BCDE برابر یال مکعب یعنی  $2\sqrt{3}$  می باشد، پس ضلع  $BC = \sqrt{6}$  است.

$$\text{حجم هرم } ABCDE = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}(\sqrt{6})^2(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{حجم هشت وجهی} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

۴۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر O مرکز کره باشد آنگاه در مثلث قائم الزاویه OAO' داریم:

$$O'A^2 = OA^2 - OO'^2 \Rightarrow O'A^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\Rightarrow O'A = \frac{\sqrt{3}R}{2} \text{ شعاع قاعده مخروط}$$

$$\frac{\text{حجم مخروط}}{\text{حجم کره}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R'^2 h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\frac{1}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2 \times \frac{3R}{2}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{9R^3}{8R^3} = \frac{9}{8}$$

۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر مثلث ADC را قاعده ی هرم در نظر بگیریم آنگاه  $AB = a$  ارتفاع هرم خواهد بود.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times a \times \frac{a^2}{2} = \frac{1}{6}a^3$$

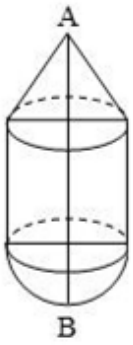
حالا اگر مثلث BDC را قاعده ی هرم در نظر بگیریم باید حجم بدست آمده با حجم هرم با این قاعده برابر باشد. در این حالت مثلث متساوی الاضلاع BDC با ضلع  $a\sqrt{2}$  قاعده است.

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times h \times \frac{2\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h$$

$$\frac{1}{6}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 h \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

۴۹

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. از دوران شکل داده شده یک مخروط به ارتفاع ۳ و شعاع قاعده‌ی ۳ و یک استوانه به ارتفاع ۴ و شعاع قاعده ۳ و یک نیمکره به شعاع ۳ بوجود می‌آید.



$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(3)^2(3) = 9\pi$$

$$V_{\text{استوانه}} = \pi R^2 h = \pi(3)^2(4) = 36\pi$$

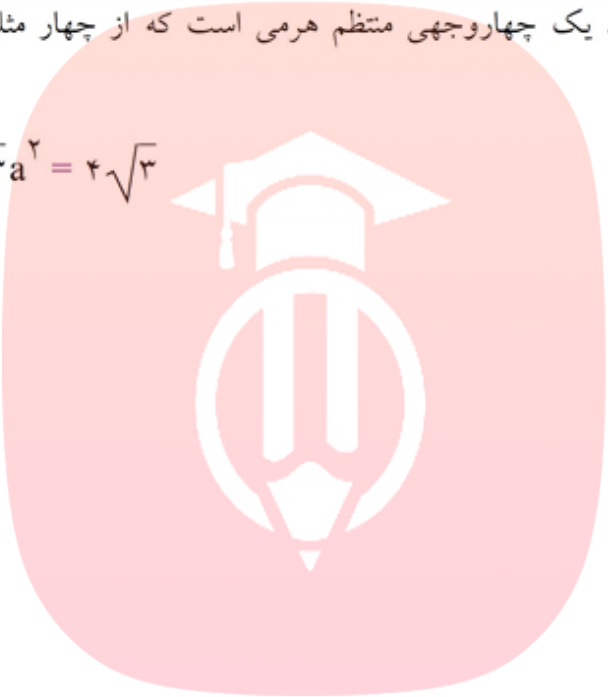
$$V_{\text{نیمکره}} = \frac{2}{3}\pi R^3 h = \frac{2}{3}\pi(3)^3 = 18\pi$$

پس حجم کل برابر  $18\pi + 36\pi + 9\pi = 63\pi$  است.

۵۰

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. یک چهاروجهی منتظم هرمی است که از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است، داریم:

$$S_{\text{کل}} = 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \sqrt{3} a^2 = 4\sqrt{3}$$



# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴

۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴



# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)