

۱- با حروف کلمه‌ی «گل پیرا» و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «گل» شروع می‌شود؟

ب) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت؟

پ) چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه‌ی ۴ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف کلمه‌ی «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

« پاسخ »

الف) ۶! - ۴!

ب)  $P(6, 4) = 360$

پ)  $2 \times 3 \times 4 \times 3$

ت) جابه‌جایی گلی یا ل و پیرا

ث) ؟؟

$$4! \times 2 \times 2 = 96$$

۲- با عددهای ۵ و ۳ و ۲ و ۱ چند عدد سه رقمی با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

« پاسخ »

$$P(4, 3) = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

۳- یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش‌رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می‌توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

« پاسخ »

$$P(6, 4) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

مای درسیس  
گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

- ۴-۱) تعداد کلمات هفت حرفی که بدون تکرار حروف با حروف  $a, b, c, d, e, f, s, t$  می‌توان نوشت؛ یعنی تعداد جایگشت‌های هفت شیء متمایز برابر است با .....
- ۲) حال با توجه به اصل ضرب می‌خواهیم تعداد کلمات سه حرفی با حروف متمایز را که با همان هفت حرف بالا می‌توان نوشت، به دست آوریم.
- برای انتخاب اولین حرف از حروف کلمه‌ی سه حرفی چند انتخاب داریم؟ برای انتخاب دوم و سوم حرف چگونه؟
  - بنابراین تعداد کلمات سه حرفی موردنظر برابر است با .....
- ۳) تعداد جایگشت‌های چهارتایی از نه شیء متمایز را به دست آورید.
- ۴) اعداد به دست آمده در مراحل ۲ و ۳ را با استفاده از فاکتوریل بنویسید.
- ۵) تعداد جایگشت‌های سه‌تایی از  $n$  شیء متمایز را به دست آورید و آنرا با استفاده از فاکتوریل بنویسید.
- ۶) تعداد جایگشت‌های  $r$  تایی از  $n$  شیء متمایز ( $0 \leq r \leq n$ ) را به دست آورید و آنرا با استفاده از فاکتوریل بنویسید.

« پاسخ »

$$7! \quad (1)$$

۲) • ۷ - برای دومین حرف ۶ انتخاب و برای سومین ۵ انتخاب داریم.

$$7 \times 6 \times 5 \quad \bullet$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \quad (3)$$

$$7 \times 6 \times 5 = \frac{7!}{4!} \quad (4) \text{ مرحله دوم:}$$

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!} \quad \text{مرحله سوم:}$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} \quad (5)$$

$$\frac{n!}{(n-r)!} \quad (6)$$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۵- حاصل ضرب‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

ب)  $9 \times 8 \times 7 \times 6$

ت) ۸

ج)  $n(n-1)(n-2)(n-3)$

الف)  $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$

پ)  $11 \times 10 \times 9$

ث)  $n(n-1)$

« پاسخ »

ب)  $9 \times 8 \times 7 \times 6 = \frac{9!}{5!}$

پ)  $11 \times 10 \times 9 = \frac{11!}{8!}$

ت)  $8 = \frac{8!}{7!}$

ث)  $n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$

ج)  $n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$

۶- با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

« پاسخ »

$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

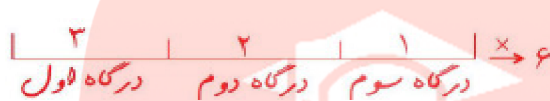
a	b	c
a	c	b

۷-۱) فرض کنید فیض‌ها را  $a$  و  $b$  و  $c$  بنامیم. حالت‌های مختلف قرار دادن آن‌ها را در مربع‌های زیر بنویسید.

۲) آیا در سه مربع به هم چسبیده، حرفی می‌تواند تکرار شود؟

۳) با توجه به اصل ضرب چگونه می‌توان تعداد این چینش‌ها را به دست آورد؟

a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a



« پاسخ »

(۱)

(۲) خیر

(۳)

۸- می‌خواهیم از بین ۱۰ نفر که ۳ تای آن‌ها برادرند یک تیم ۴ نفره انتخاب کنیم، به چند حالت می‌توانیم این تیم را انتخاب کنیم به شرطی که:

(الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.

(ب) حداقل یک برادر در تیم باشد.

(ج) هیچ برادری نباشد.

« پاسخ »

(الف)  $\binom{10}{4}$

(ب)  $\binom{3}{3}\binom{7}{1} + \binom{3}{2}\binom{7}{2} + \binom{3}{1}\binom{7}{3}$

(ج)  $\binom{7}{4}$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

۹- به چند طریق می‌توان با ۵ دختر و ۳ پسر یک صف تشکیل داد به طوری که هیچ دو پسری در کنار هم قرار نگیرد؟

« پاسخ »

$4 \times 5 \times 6 \times 5!$

۱۰- الف)  $n$  را بیابید.

$$P(n, 5) = 45P(n-1, 3)$$

ب) با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۵ و ۸ چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

« پاسخ »

$$P(n, 5) = 45P(n-1, 3) \Rightarrow \frac{n!}{(n-5)!} = \frac{45(n-1)!}{(n-4)!} \Rightarrow n = 9$$

ب)  $\left. \begin{array}{l} \text{تعداد اعداد سه رقمی} : 4 \times 4 \times 3 = 48 \\ \text{تعداد اعداد فرد سه رقمی} : 3 \times 3 \times 2 = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow 48 - 18 = 30$   
 $\Rightarrow$  تعداد اعداد سه رقمی فرد - تعداد اعداد سه رقمی زوج =  $48 - 18 = 30$

۱۱- چهار دبیر فیزیک و پنج دبیر ریاضی به چند طریق می توانند کنار هم بنشینند به طوری که هر ۵ دبیر ریاضی کنار هم نباشند؟

« پاسخ »

باید از متمم استفاده کنیم یعنی:  
پنج دبیر ریاضی کنار هم باشند - کل حالتها =  $5! \times 9!$

۱۲- از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در فکسه ای بچینیم اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تاست؟

« پاسخ »

$$P(n, 3) = 210 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 210 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 210$$
$$n(n-1)(n-2) = 210 \Rightarrow n = 7$$

۱۳- با حروف کلمه «مهربانی» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت؟

ب) چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت که شامل «مهر» باشد؟

ج) چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت که حروف «م» و «ن» کنار هم باشند؟

« پاسخ »

الف)  $7!$

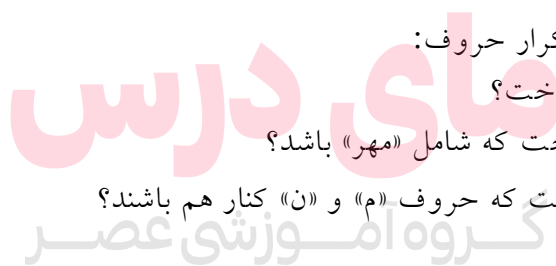
ب) مهر را یک شی در نظر می گیریم پس ۵ شی «مهر»، «ب»، «ا»، «ن»، «ی» داریم که  $5!$  جایگشت دارند.

پ) دو حرف «م ن» را در یک دسته قرار می دهیم، پس ۶ شی داریم بنابراین تعداد کلمه ها برابر است با

$$6! \times 2!$$



جایگشت های (م ن)



www.my-dars.ir

۱۴- مقدار  $n$  را حساب کنید.

$$P(n, 2) = 2n$$

« پاسخ »

$$P(n, 2) = 2n \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 2n \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 2n \Rightarrow n-1 = 2 \Rightarrow n = 3$$

۱۵- با حروف کلمه «جهرم» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت؟

ب) چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت که شامل «جم» باشد؟

ج) چند کلمه ۴ حرفی می توان ساخت که حروف «ج» و «م» کنار هم باشند؟

« پاسخ »

(الف)

(ب)

(ج)

$$4! = 24$$

$$1! \times 3! = 6$$

$$2! \times 3! = 12$$

۱۶- با حروف کلمه «شیراز» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت؟

ب) چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که شامل «شیر» باشد؟

ج) چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که حروف «ش»، «ی» و «ر» کنار هم باشند؟

« پاسخ »

(الف)

(ب)

(ج)

$$5! = 120$$

$$1! \times 3! = 6$$

$$3! \times 3! = 36$$

مای درس

۱۷- با حروف کلمه «جمهوری» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت؟

ب) چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که شامل «هور» باشد؟

ج) چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که حروف «ج»، «م» و «ه» کنار هم باشند؟

« پاسخ »

(الف)

(ب)

(ج)

$$6! = 720$$

$$1! \times 4! = 24$$

$$3! \times 4! = 144$$

www.my-dars.ir

۱۸- از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم ۲ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۹۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

« پاسخ »

$$P(n, 2) = 90 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 90 \Rightarrow \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!} = 90 \Rightarrow n(n-1) = 90 \Rightarrow n = 10$$

۱۹- از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم ۲ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۳۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

« پاسخ »

$$P(n, 2) = 30 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!} = 30 \Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$$

۲۰- از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم ۲ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های مختلف برای این کار ۷۲ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند تا است؟

« پاسخ »

$$P(n, 2) = 72 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 72 \Rightarrow \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!} = 72 \Rightarrow n(n-1) = 72 \Rightarrow n = 8$$

۲۱- اگر  $P(n, 2) + 5n = 60$  باشد، مقدار  $n$  را به دست آورید.

« پاسخ »

۱ نمره

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(\cancel{n-2})!}{(\cancel{n-2})!} = n(n-1), P(n, 2) + 5n = 60$$

$$\Rightarrow n(n-1) + 5n = 60 \Rightarrow n^2 + 4n - 60 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+10) = 0$$

$$\Rightarrow n = 6 \text{ یا } n = -10 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 6$$

۲۲- با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ چند عدد شش رقمی می‌توان ساخت به طوری که ارقام زوج به کار رفته در آن کنار هم باشند؟ (تکرار مجاز نیست)

« پاسخ »

دو حالت وجود دارد:

حالت اول: عدد کنار گذاشته شده زوج است.

حالت دوم: عدد کنار گذاشته شده فرد است.

در حالت اول تعداد اعداد برابر است با:

$$\binom{3}{1} \times 2! \times 5! = 720$$

در واقع دو عدد زوج را یک بسته می‌گیریم. (این دو عدد خود ۲! جایگشت دارند) و این بسته به اتفاق چهار رقم دیگر ۵ شیء می‌شوند که ۵! جایگشت دارند.

به طور مشابه در حالت دوم تعداد اعداد برابر است با  $576 = 4! \times 3! \times \binom{4}{1}$ . پس تعداد کل اعداد برابر  $720 + 576 = 1296$  است.

۲۳- به چند طریق می‌توان ۲۰ عدد سیب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کرد، به طوری که به نفر اول حداقل ۳ سیب، به نفر دوم حداقل ۴ سیب و دو نفر دیگر حداقل یک سیب برسد؟

« پاسخ »

به نفر اول ۳ سیب، به نفر دوم ۴ سیب و دو نفر دیگر هر کدام یک سیب می‌دهیم. بدین ترتیب ۱۱ سیب باقی می‌ماند که می‌توانیم به هر یک از ۴ نفر از صفر سیب تا ۱۱ سیب بدهیم. سیب‌ها را با A نشان می‌دهیم. اگر یازده A را کنار هم به صورت A...AA بچینیم، کافی است برای تقسیم کردن سیب‌ها بین ۴ نفر از سه شاخص مانند B استفاده کنیم و جایگشت‌های یازده A و سه B را پیدا کنیم. مثلاً جایگشت AABAAAAABBAAAA نشان می‌دهد به نفر اول ۲ سیب، به نفر دوم ۵ سیب، نفر سوم ۰ سیب و نفر چهارم ۴ سیب می‌رسد. پس جواب مسأله برابر تعداد جایگشت‌های یازده A و سه B است. این تعداد برابر  $\frac{4!}{3! \times 11!}$  است.

۲۴- به چند طریق می‌توان اعداد ۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۵, ۶ را در یک ردیف مرتب کرد. به طوری که ۲ قبل از ۳ و ۳ قبل از ۴ باشد؟

« پاسخ »

تعداد کل جایگشت‌ها برابر  $\frac{8!}{2! \times 2!}$  است. در هر جایگشت با ثابت نگه داشتن مکان اعداد ۱, ۱, ۵, ۵, ۶ اعداد ۲, ۳, ۴ می‌توانند ۳! جایگشت داشته باشند. این ۳! جایگشت عبارتند از: ۲۳۴, ۲۴۳, ۳۲۴, ۳۴۲, ۴۲۳, ۴۳۲ که از بین این ۶ جایگشت فقط حالت ۲۳۴ قابل قبول است. پس  $\frac{1}{6}$  از کل جایگشت‌ها قابل قبول است یعنی جواب

$$\frac{8!}{6 \times 2! \times 2!} \text{ است.}$$



۲۵- با ارقام ۱، ۱، ۰، ۰، ۲، ۲ چند عدد چهاررقمی می‌توان ساخت؟

« پاسخ »

باید دو رقم را کنار بگذاریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{00} \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \\ \xrightarrow{01 \text{ یا } 02} 2 \left( \frac{4!}{2!} - \frac{3!}{2!} \right) = 18 \Rightarrow \text{جواب} = 36 \\ \xrightarrow{11 \text{ یا } 22} 2 \times 3 = 6 \\ \xrightarrow{21} 2 \times 3 = 6 \end{array} \right.$$

۲۶- به چند طریق می‌توان با چهار مهره‌ی A، B، C و D یک گردنبند ساخت؟

« پاسخ »

تعداد گردنبندهایی (تعداد دسته‌کلیدهایی) که می‌توان با n مهره ساخت برابر  $\frac{(n-1)!}{2}$  است. در این مثال جواب  $\frac{(4-1)!}{2} = 3$  است.

۲۷- با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت؟

« پاسخ »

اگر  $n_1$  شیء نوع ۱،  $n_2$  شیء نوع ۲، ... و  $n_k$  شیء نوع k را بخواهیم در یک صف مرتب کنیم، تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$\frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

در این مثال ۲ عدد ۱ و ۳ عدد ۳ داریم. تعداد جایگشت‌ها برابر است با:

$$7 \frac{!}{2! \times 3!} = 420$$

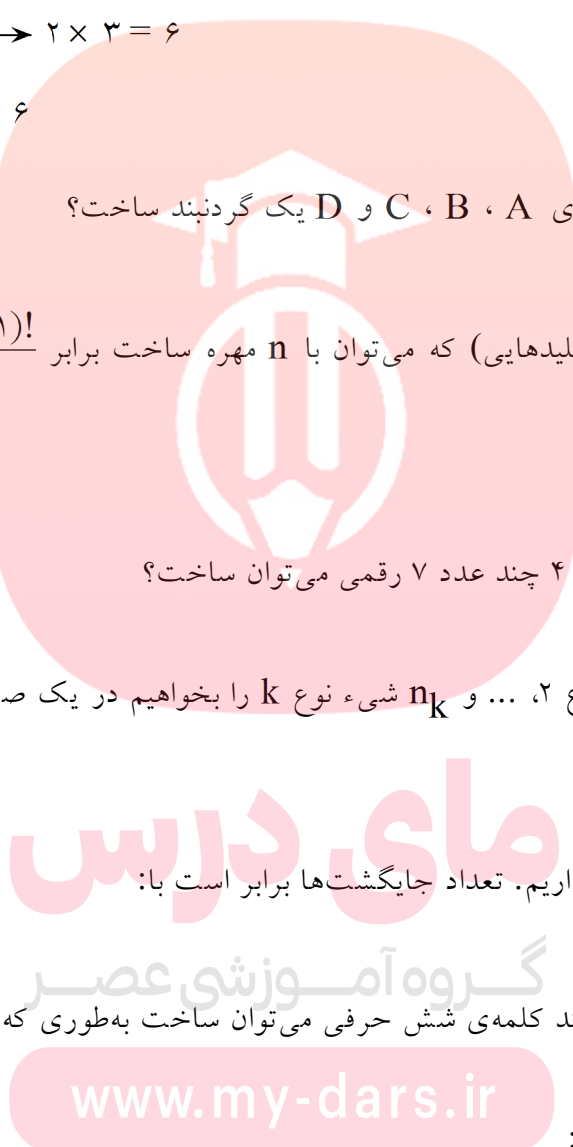
۲۸- با حروف کلمه‌ی PIROOZI چند کلمه‌ی شش حرفی می‌توان ساخت به طوری که با O شروع شود؟

« پاسخ »

یکی از حروف را باید حذف کنیم:

$n_1 = 5!$  حذف I شود

$n_2 = 4 \times \frac{5!}{2!} \rightarrow$  تعداد کلمات =  $n_1 + n_2 = 360$   
 حذف P یا R یا O یا Z



۲۹- با حروف کلمه ESTEGHLAL چند کلمه ی ۸ حرفی می توان ساخت؟

« پاسخ »

تعداد کلمات ۸ حرفی با تعداد کلمات ۹ حرفی برابر است. بدون در نظر گرفتن حروف تکراری، ۹! کلمه ی ۹ حرفی می توان ساخت، ولی ۲! حرف E و ۲! حرف L جایگشت تکراری دارند. پس جواب برابرست با  $\frac{9!}{2! \times 2!}$

۳۰- به چند طریق می توان ۸ مداد رنگی متمایز را در یک ردیف چید، اگر قرار باشد ۲ مداد مخصوص کنار هم باشد.

« پاسخ »

دو مداد مخصوص A و B را به هم می بندیم و یک بسته در نظر می گیریم. این بسته به اتفاق ۶ مداد دیگر به صورت ۷ شیء به تعداد ۷! جایگشت خواهند داشت حال دو مداد A و B خود ۲! جایگشت دارند که جواب برابر است با  $7! \times 2!$

۳۱- n را از تساوی زیر به دست آورید.

$$n P(5, 3) = P(7, 5)$$

« پاسخ »

$$n P(5, 3) = P(7, 5) \rightarrow n \times \frac{5!}{2!} = \frac{7!}{2!} \rightarrow n = 7 \times 6 = 42$$

$$\frac{(n+2)!}{n!}$$

۳۲- ساده کنید:

« پاسخ »

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

۳۳- مقادیر عددی زیر را تعیین کنید.

$$7!, 8!, 9!, P(7, 2), P(8, 3), P(4, 3).$$

« پاسخ »

$$7! = 5040, 8! = 40320, 9! = 362880$$

$$P(7, 2) = \frac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

$$P(8, 3) = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

$$P(4, 3) = \frac{4!}{1!} = 24$$

۳۴- n را از تساوی زیر به دست آورید.

$$P(n, 4) = 4 \cdot P(n-1, 2)$$

« پاسخ »

$$P(n, 4) = 4 \cdot P(n-1, 2) \rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 4 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$
$$\rightarrow \frac{n(n-1)!}{(n-4)!} = 4 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-3)(n-4)!} \rightarrow n = \frac{4}{n-3} \rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0 \rightarrow n = 8$$

۳۵- فاطمه ۵ کتاب مختلف دارد. به چند طریق می‌تواند آن‌ها را در یک قفسه کنار هم بچیند؟

« پاسخ »

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$



# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)