

- ۱- یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هرگاه:
- الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه‌ها نداشته باشد؟
- ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟
- پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟
- ت) ادویه‌ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می‌شوند که هیچ‌یک از ادویه‌های دسته اول با هیچ‌یک از ادویه‌های دسته دوم سازگاری ندارند؟

« پاسخ »

$$\text{الف)} \binom{10}{3} = 120$$

ب) اگر این دو ادویه استفاده شوند، ادویه سوم از ۸ ادویه باقیمانده انتخاب خواهد شد و در نتیجه:

$$\text{تعداد حالات وجود دو ادویه با هم} = \binom{8}{1}$$

تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده می‌شوند - تعداد کل حالات = تعداد حالاتی که دو ادویه با هم استفاده نشود

$$= \binom{10}{3} - \binom{8}{1} = 120 - 8 = 112$$

تعداد حالاتی که هر سه استفاده شده - تعداد کل حالات = تعداد حالاتی که هر سه نباید استفاده شوند (پ)

$$= \binom{10}{3} - \binom{3}{3} = 120 - 1 = 119$$

ت) هر سه ادویه باید از دسته‌ی اول انتخاب شده یا هر سه ادویه از دسته‌ی دوم انتخاب شوند. بنابراین:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20$$

- ۲- هفت نقطه‌ی A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

« پاسخ »

$$\binom{7}{3} = 35$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

۳- یک نقاش قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید به دست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟
چرا با این‌که در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می‌شود، اما تعداد رنگ‌های حاصل بیش‌تر از جواب شماست؟

« پاسخ »

$$4 + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$$

چون ممکن است میزان ترکیب رنگ‌ها یکسان نباشد به طور مثال یک‌بار ۵۰٪ از یک رنگ و ۵۰٪ از رنگ دیگر استفاده شود و بار دیگر ۶۰٪ از یکی و ۴۰٪ از دیگری استفاده شود و در این دو حالت دو رنگ متفاوت به دست آید.

۴- یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای ۱ رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه‌ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح‌های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می‌تواند انتخاب شود، هرگاه:
(الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟
(ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟
(پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

« پاسخ »

$$\text{الف) } \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{14}{3} = 1 \times 3 \times 364 = 1092$$

$$\text{ب) } \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{2} = 1 \times 3 \times 3 \times 55 = 495$$

$$\text{پ) } \binom{1}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{9}{1} = 1 \times 3 \times 3 \times 2 \times 9 = 162$$

۵- از میان ۸ ریاضی‌دان و ۶ فیزیک‌دان و ۵ شیمی‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

(الف) کمیته‌ی ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

(ب) کمیته‌ی ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

(پ) کمیته‌ی ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد؟

www.my-dars.ir

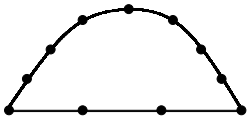
« پاسخ »

$$\text{الف) } \binom{5}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{8}{2} = 10 \times 15 \times 28 = 4200$$

$$\text{ب) } \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{8}{1} = 5 \times 6 \times 8 = 240$$

$$\text{پ) } \binom{8}{1} \times \binom{11}{1} \times \binom{8}{2} = 88 + 28 = 116$$

۶- با استفاده از نقاط موجود در شکل مقابل به چند طریق می‌توان یک مثلث ساخت؟



« پاسخ »

$$\binom{4}{2} \binom{7}{1} + \binom{4}{1} \binom{7}{2}$$

۷- در کیسه‌ای ۵ مهره آبی و ۶ مهره قرمز وجود دارد. می‌خواهیم سه مهره به تصادف انتخاب کنیم. به چند طریق:
الف) هر سه مهره هم‌رنگ هستند؟
ب) حداقل دو مهره آبی است؟

« پاسخ »

$$\text{الف) } \binom{5}{3} + \binom{6}{3} \quad \text{ب) } \binom{5}{2} \binom{6}{1} + \binom{5}{3}$$

۸- هفت نقطه‌ی A, B, C, D, E, F, G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

« پاسخ »

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!} = 35$$

۹- گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد، او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

« پاسخ »

$$\binom{10}{3} + \binom{10}{4} + \binom{10}{5} = 582$$

مای درس گروه آموزشی عصر

۱۰- اگر $P(n, 4) = 12 C(n-2, 2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

« پاسخ »

www.my-dars.ir

$$\left. \begin{aligned} P(n, 4) &= \frac{n!}{(n-4)!} \\ C(n-2, 2) &= \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{n!}{(n-4)!} = 12 \times \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \Rightarrow n(n-1) = 6 \Rightarrow n = 3$$

۱۱- با توجه به تساوی‌های زیر مقدار n را بیابید.

الف) ${}^3P_n + C(3, 1) = P(4, 2)$

ب) $C(n, n-1) = 9$

« پاسخ »

الف) ${}^3P_n + C(3, 1) = P(4, 2) \Rightarrow 3n + \frac{3!}{(3-1)! \times 1!} = \frac{4!}{(4-2)!} \Rightarrow 3n + 3 = 12$

$\Rightarrow 3n = 9 \Rightarrow n = 3$

ب) $C(n, n-1) = 9 \Rightarrow C(n, 1) = 9 \Rightarrow n = 9$

۱۲- مقدار n را حساب کنید.

الف) $2P(n-2, 1) = C(n, 3)$

ب) $P(n, 2) + C(15, 2) = C(7, 2)$

« پاسخ »

الف) $2P(n-2, 1) = C(n, 3) \Rightarrow 2 \times \frac{(n-2)!}{(n-2-1)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$

$\Rightarrow \frac{2 \times (n-2)!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-3)! \times 6} \Rightarrow 2 = \frac{n(n-1)}{6} \Rightarrow n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 4$

ب) $P(n, 2) + C(15, 2) = C(7, 2) \Rightarrow n(n-1) + 1 = 21 \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow n = 5$

۱۳- در کیسه‌ای ۹ مهره‌ی زرد و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد. می‌خواهیم سه مهره به تصادف انتخاب کنیم. به چند دلیل:

الف) هر سه مهره هم‌رنگ هستند؟

ب) حداقل یک مهره سبز است؟

« پاسخ »

الف) $\binom{9}{3} + \binom{5}{3} = 84 + 10 = 94$

ب) $\binom{5}{1} \binom{9}{2} + \binom{5}{2} \binom{9}{1} + \binom{5}{3} = 5 \times 36 + 10 \times 9 + 10 = 280$

گروه آموزشی عصر

۱۴- در کیسه‌ای ۸ مهره‌ی آبی و ۴ مهره‌ی قرمز وجود دارد. می‌خواهیم سه مهره به تصادف انتخاب کنیم. به چند طریق:

الف) هر سه مهره قرمز است؟

ب) دو مهره آبی و یک مهره قرمز است؟

« پاسخ »

الف) $\binom{4}{3} = 4$

ب) $\binom{8}{2} \binom{4}{1} = 28 \times 4 = 112$

www.my-dars.ir

۱۵- در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه وجود دارد. می‌خواهیم سه مهره به تصادف انتخاب کنیم. به چند طریق:

الف) هر سه مهره هم‌رنگ هستند؟

ب) حداکثر یک مهره سفید است؟

« پاسخ »

$$\binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 10 + 1 = 11$$

الف)

$$\binom{5}{1} \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 5 \times 3 + 1 = 16$$

ب)

۱۶- می‌خواهیم از بین ۸ نفر که ۳ تای آنها برادرند یک تیم ۴ نفره انتخاب کنیم، به چند حالت می‌توانیم این تیم را انتخاب کنیم به شرطی که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم؟

ب) حداکثر یک برادر در تیم باشد؟

ج) هیچ برادری در تیم نباشد؟

« پاسخ »

$$\binom{8}{4} = 70$$

الف)

$$\binom{3}{1} \binom{5}{3} + \binom{5}{4} = 30 + 5 = 35$$

ب)

$$\binom{5}{4} = 5$$

ج)

۱۷- گل‌فروشی در فروشگاه خود ۹ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۲ تا ۴ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او

چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

« پاسخ »

$$\binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 36 + 84 + 126 = 246$$

۱۸- گل‌فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۲ تا ۴ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او

چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

« پاسخ »

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = 45 + 120 + 210 = 375$$

۱۹- از بین ۴ دانش‌آموز سال نهم و ۵ دانش‌آموز سال دهم به چند طریق می‌توان کمیته‌ای چهار نفره تشکیل داد به طوری که:

(آ) کمیته شامل دقیقاً ۲ دانش‌آموز سال دهم باشد.
 (ب) تعداد دانش‌آموزان سال دهم بیش‌تر باشد.

« پاسخ »

۱/۵ نمره

$$(ب) \binom{5}{3} \binom{4}{1} + \binom{5}{4} = 10 \times 4 + 5 = 45$$

$$(آ) \binom{4}{2} \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

۲۰- در یک جعبه ۱۵ لامپ موجود است که ۵ تای آن معیوب است، سه لامپ به تصادف با هم انتخاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی را حساب کنید که:

(الف) هر سه لامپ معیوب باشند.
 (ب) فقط یکی معیوب باشد.

« پاسخ »

۱/۲۵ نمره

$$(الف) \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

$$(ب) \binom{5}{1} \times \binom{10}{2} = 5 \times \frac{10!}{2! \times 8!} = 5 \times 45 = 225$$

۲۱- از بین ۶ منجم و ۵ مهندس و ۳ ریاضی دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه:

(الف) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟
 (ب) کمیته ۲ نفر باشد و حداقل یک مهندس در آن باشد؟

« پاسخ »

۱/۵ نمره

(الف)

$$\binom{6}{1} \binom{5}{1} \binom{3}{1} = 90$$

(ب)

$$\binom{5}{1} \binom{9}{1} + \binom{5}{2} = 45 + 10 = 55$$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

۲۲- با حروف کلمه‌ی MANCHESTER چند کلمه‌ی ۹ حرفی می‌توان ساخت به طوری که هر دو حرف E در آن به کار رفته باشد؟

« پاسخ »

۷ حرف باید از بین حروف M, A, N, C, H, E, S, T, E, R انتخاب کنیم. تعداد انتخاب‌های ما $\binom{8}{7}$ است. حال با این ۷ حرف و ۲ حرف E به تعداد $\frac{9!}{2!}$ جایگشت داریم. پس جواب برابر است با:

$$\binom{8}{7} \times \frac{9!}{2!} = 4 \times 9!$$

۲۳- به چند طریق می‌توان یک کمیته را از میان ۱۰ نفر دانش‌آموز سال اول و ۱۲ نفر دانش‌آموز سال دوم انتخاب کرد هرگاه اعضای کمیته از ۴ نفر دانش‌آموز سال اول و ۳ نفر از دانش‌آموزان سال دوم تشکیل گردد؟

« پاسخ »

۴ نفر از ۱۰ نفر سال اول و ۳ نفر از ۱۲ نفر سال دوم انتخاب می‌کنیم.

$$\text{جواب} = \binom{10}{4} \times \binom{12}{3}$$

۲۴- یک کیسه محتوی ۴ مهره‌ی آبی و ۸ مهره‌ی سبز است. تعیین کنید به چند طریق می‌توان ۴ مهره متشکل از ۲ مهره آبی و ۲ مهره سبز را از کیسه انتخاب کرد.

« پاسخ »

$$\text{جواب} = \binom{4}{2} \times \binom{8}{2} = \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{8 \times 7}{2} = 168$$

$$C(8, 5) = C(7, 5) + C(7, 4)$$

۲۵- نشان دهید که:

« پاسخ »

$$\left\{ \begin{array}{l} C(7, 5) = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21 \\ C(7, 4) = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35 \\ C(8, 5) = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{بدیهی است که}} 56 = 21 + 35$$

www.my-dars.ir

۲۶- مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟
 (ب) چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی شامل عدد ۱ و فاقد ۳ و ۴ دارد؟

« پاسخ »

۱/۵ نمره

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15 \text{ (ب)}$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84 \text{ (آ)}$$

۲۷- گل‌فروشی در فروشگاه خود ۸ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل، از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟

« پاسخ »

$$\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} = 56 + 70 + 56 = 182$$

۲۸- مقدار n را حساب کنید.

$$P(n, 2) - C(n, 3) = n$$

« پاسخ »

$$P(n, 2) - C(n, 3) = \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)! \times 6} = n \Rightarrow n(n-1) \left(1 - \frac{n-2}{6}\right) = n$$

$$(n-1) \left(\frac{6-n+2}{6}\right) = 1 \Rightarrow (n-1)(8-n) = 6 \Rightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=2 & \text{ق ق غ} \\ n=7 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

۲۹- مقدار n را حساب کنید.

$$3C(n, 2) + n = 70$$

« پاسخ »

$$3 \times \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} + n = 70 \Rightarrow \frac{3n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} + n = 70 \Rightarrow 3n^2 - 3n + 2n = 140$$

$$\Rightarrow 3n^2 - n - 140 = 0 \Rightarrow \frac{(3n-21)(3n+20)}{3} = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=7 & \text{ق ق} \\ n=-\frac{20}{3} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳۰- مقدار n را حساب کنید.

$$C(n, 3) - C(n, 2) = \frac{7n}{2}$$

« پاسخ »

$$\frac{n!}{(n-3)! \times 3!} - \frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \frac{7n}{2} \Rightarrow \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)(\cancel{n-3})!}{(n-3)! \times 6} - \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} = \frac{7\cancel{n}}{2}$$
$$n^2 - 3n + 2 - 3n + 3 = 21 \Rightarrow n^2 - 6n - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 8 \text{ ق ق} \\ n = -2 \text{ ق غ} \end{cases}$$



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir