

۳۵- با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} \quad (\text{ب})$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \tan\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha} = \tan\alpha \quad (\text{پ})$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad (\text{ث})$$

**پاسخ**

$$\frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} \times \frac{1 - \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1 - \sin\theta)}{1 - \sin^2\theta} = \frac{\cos\theta(1 - \sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha} = \frac{1 + \tan\alpha}{1 + \frac{1}{\tan\alpha}} = \frac{\tan\alpha(1 + \tan\alpha)}{\tan\alpha + 1} = \tan\alpha \quad (\text{پ})$$

$$1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} \quad (\text{ت})$$

$$= 1 - 1 + \sin x = \sin x$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \quad (\text{ث})$$

$$= \frac{\cos x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

۳۶- اگر  $\tan 240^\circ = \sqrt{3}$  باشد، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی  $240^\circ$  را به دست آورید.

**پاسخ**

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha$$

$$= \sqrt{3} \times -\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۳۷- اگر  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی  $135^\circ$  را به دست آورید.

### پاسخ »

$$\cos^2 135^\circ = 1 - \sin^2 135^\circ = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

۳۸- فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی  $\alpha$  را به دست آورید.

### پاسخ »

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \div \frac{-3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{-5}{3} = -\frac{4}{3}$$

۳۹- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد است؟ چرا؟

(الف)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(ب)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

### پاسخ »

$$\text{ما درس} \quad \text{گروه آموزشی عصر} \\ \alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تساوی صحیح نیست  $\Rightarrow$

$$\text{ما درس} \quad \text{گروه آموزشی عصر} \\ \alpha = 30^\circ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{16} + \frac{9}{16} = 1 - \frac{6}{16}$$

تساوی صحیح است  $\Rightarrow$

حال باید درستی آنرا در حالت کلی اثبات نماییم:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

۴۰- در این قسمت رابطه‌ای برای تانژانت برحسب کسینوس یک زاویه و همچنین رابطه‌ای برای کتانژانت برحسب سینوس، به دست می‌آوریم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \dots \quad \dots$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \dots = \dots$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$

(۳) اگر  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  و  $\tan \alpha = \frac{-3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $\alpha$  را به دست آورید.

**پاسخ**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0) \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0) \quad (2)$$

$$r) \frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

-۴۱- اگر  $\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$  و انتهای کمان  $\alpha$  در ربع سوم باشد، مقدار  $\tan \alpha$  را به دست آورید.

**پاسخ »**

$\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$  در ربع سوم:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}$$



-۴۲- اگر  $\sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$  و  $\theta$  در ربع سوم مثلثاتی باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.

**پاسخ »**

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

# مای دلرس

## گروه آموزشی عصر

-۴۳- فرض کنید  $\theta$  زاویه‌ای در ناحیه سوم مثلثاتی باشد و  $\tan \theta = \frac{3}{4}$ ، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویه  $\theta$  را به دست آورید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

**پاسخ »**

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{\sin \theta}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \sin \theta = -\frac{3}{5}, \cot \theta = \frac{4}{3}$$

-۴۴- فرض کنید  $\alpha$  زاویه‌ای در ناحیهٔ سوم مثلثاتی باشد و  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه  $\alpha$  را به دست آورید.

**پاسخ »**

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \Rightarrow 5 = \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \Rightarrow \operatorname{Cos} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{Sin}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{Sin}^2 \alpha + \frac{1}{5} = 1 \Rightarrow \operatorname{Sin}^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{Sin} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{Cotg} \alpha = 2$$

-۴۵- ثابت کنید:

$$\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} + \frac{\operatorname{Cotg} x - \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x} = \frac{2}{\operatorname{Sin} x}$$

**پاسخ »**

$$\begin{aligned} \frac{1 + \operatorname{Sin} x}{\operatorname{Sin} x} + \frac{\operatorname{Cotg} x - \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Cos} x} &= \frac{(1 + \operatorname{Sin} x) \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x \left( \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cos} x \right)}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} \\ &= \frac{(1 + \operatorname{Sin} x) \operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x \left( \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cos} x \right)}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} x + \operatorname{Sin} x \cancel{\operatorname{Cos} x} + \operatorname{Cos} x - \operatorname{Sin} x \cancel{\operatorname{Cos} x}}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{2 \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x} = \frac{2}{\operatorname{Sin} x}$$

سمت چپ تساوی با سمت راست آن برابر شد، پس رابطهٔ داده شده صحیح است.

گروه آموزشی عصر

را ثابت کنید.

-۴۶- اتحاد مثلثاتی  $\frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cotg} x = \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x}$

**پاسخ »**

۱/۲۵ نمره

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \operatorname{Cotg} x &= \frac{1}{\operatorname{Sin} x} - \frac{\operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{1 - \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x} \times \frac{1 + \operatorname{Cos} x}{1 + \operatorname{Cos} x} = \frac{1 - \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Sin} x (1 + \operatorname{Cos} x)} \\ &= \frac{\operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Sin} x (1 + \operatorname{Cos} x)} = \frac{\operatorname{Sin} x}{1 + \operatorname{Cos} x} \end{aligned}$$

۴۷- اتحاد مثلثاتی  $\frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \sin^2 \theta$  را ثابت کنید.

پاسخ »  
۰/۵ نمره

$$1 + \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sin^2 \theta$$

۴۸- اگر  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$  باشد، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی  $150^\circ$  را به دست آورید.

پاسخ »  
۰/۷۵ نمره

$90^\circ < 150^\circ < 180^\circ \Rightarrow \theta$  در ناحیه دوم قرار دارد

در ناحیه‌ی دوم  $\sin \theta$ ، مثبت و بقیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی  $\theta$  منفی هستند، پس داریم:

$$\cos 150^\circ = -\sqrt{1 - \sin^2 150^\circ} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{Cotg} 150^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 150^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\sqrt{3}$$

# ما درس

۴۹- درستی تساوی  $1 - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = 2 \cos^2 \theta - 1$  را ثابت کنید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

پاسخ »  
۱/۲۵ نمره

$$\begin{aligned} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

۵۰- درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف -  $\frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha} = \tan\alpha$

ب -  $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$

پاسخ »

۲ نمره

$$\frac{1 + \tan\alpha}{1 + \cot\alpha} = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \quad \text{الف -}$$

$$\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} \times \frac{1 - \sin\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta(1 - \sin\theta)}{1 - \sin^2\theta} = \frac{\cos\theta(1 - \sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{ب -}$$

۵۱- مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = ((\sin^2(50^\circ) + \cos^2(50^\circ)) + 2 \tan^2(45^\circ))$$

پاسخ »

$$A = (\sin^2(50^\circ) + \cos^2(50^\circ) + 2 \tan^2(45^\circ)) = 1 + 2(1)^2 = 3 \quad (1)$$

۵۲- درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \sin\theta \cdot \cos\theta$$

مای درس

پاسخ »

$$\frac{\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{\sin\theta \cdot \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \sin\theta \cdot \cos\theta$$

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

-۵۳- درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید.

$$\cos^2 \theta (\gamma + \tan^2 \theta) = \gamma - \sin^2 \theta \quad (\text{ب})$$

$$\frac{2\cos 60^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 30^\circ} = 2\sin 90^\circ \quad (\text{الف})$$

**پاسخ »**

$$\frac{2\cos 60^\circ}{\cot 45^\circ - \sin 30^\circ} = 2\sin 90^\circ \Rightarrow \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow 2 = 2 \quad (\text{الف})$$

(ب)

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta (\gamma + \tan^2 \theta) &= \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cdot \tan^2 \theta = 2(1 - \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta = \\ &= 2 - 2\sin^2 \theta + \sin^2 \theta = 2 - \sin^2 \theta \end{aligned}$$

-۵۴- اگر  $\sin \alpha = \frac{1}{m+1}$  باشد مقدار عددی  $\cos \alpha = m-1$  را باید.

**پاسخ »**

در رابطه‌ی  $\cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  از فرض سؤال قرار می‌دهیم.

$$1 + (m-1)^2 = (m+1)^2 \Rightarrow 1 + m^2 - 2m + 1 = m^2 + 2m + 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \alpha \text{ در ربع دوم است.}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}$$

-۵۵- اگر  $\cot \theta = 2$  باشد حاصل عددی عبارت  $\frac{2\sin \theta + 2\cos \theta}{5\sin \theta - 4\cos \theta}$  را باید.

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)

**پاسخ »**

$$\cot \theta = 2 \Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \Rightarrow \cos \theta = 2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin \theta + 2\cos \theta}{5\sin \theta - 4\cos \theta} = \frac{2\sin \theta + 2(2\sin \theta)}{5\sin \theta - 4(2\sin \theta)} = \frac{6\sin \theta}{-3\sin \theta} = -2$$

.a بحسب حساب Cosθ . Sinθ عبارت مثلثاتی مطابقت محاسبه مطلوب است باشد.

پاسخ »

$$\sin \theta + \cos \theta = a \Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = a^2 \Rightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = a^2$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = a^2 - 1 \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{a^2 - 1}{2}$$



# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)