فصل هفتم توان و جذر

تعریف توان :

عبارتی مانند ؛ **۲ × ۲ × ۲ × ۲ × ۲** را در ریاضیات برای ساده تر شدن به صورت **$۲^{۵}$** می نویسیم و آن را چنین می خوانیم **۲** به توان **۵** .

در عبارت **$۲^{۵}$** ، **۲** را **پایه** و **۵** را **توان** می نامیم .درست شبیه همان کاری که در ساده کردن و خلاصه کردن جمع انجام می دادیم.
(۲ + ۲ + ۲ + ۲ + ۲ = ۵ ×۲)

✻ از توان به منظور مختصر نویسی ضرب های تکراری یک عدد استفاده می کنند .

✻ به توان ، **نما** و **قوّه** هم گفته می شود .

✻ هر عدد به توان یک برابر خودش می شود : $a^{1} = a$

✻ عدد یک به توان هر عددی برابر یک می شود : $۱^{۵۲} = ۱$

✻ هر عدد به توان صفر ، ۱ می شود . $۱۲^{۰} = ۱$

✻ عدد صفر به توان هر عددی برابر صفر می شود . $۰^{۱۵} = ۰$

✻ صفر به توان صفر تعریف نشده است . $۰^{۰} =$ ***تعریف نشده***

نقش پرانتز در اعداد توان دار :

- اگر عددی منفی داخل پرانتز به توان زوج رسید ، حاصل عددی مثبت می شود .

$(-۳)^{۲} = (-۳) \times (-۳) = +۹$

- اگر توان عددی منفی داخل پرانتز بود ، پرانتز در توان رساندن عدد نقشی ندارد .

$(-۳^{۲}) = -(۳ \times ۳) = -۹$

- اگر عددی منفی بدون پرانتز به توان برسد ، حاصل عددی منفی می شود .

$-۴^{۲} = -(۴ \times ۴) = -۱۶$

- اگر یک کسر داخل پرانتز به توان برسد ، توان شامل صورت و مخرج هر دو می شود .

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} = \frac{۱ \times ۱ \times ۱}{۲ \times ۲ \times ۲} = \frac{۱}{۸}$$

- اگر کسری داخل پرانتز به توان گرفت ، یا توان در صورت یا مخرج کسر باشد ، پرانتز هیچ نقشی در توان ندارد .

$$\left(\frac{۲^{۳}}{۵}\right) = \frac{۲ \times ۲ \times ۲}{۵} = \frac{۸}{۵}$$

$$\frac{۷}{۳^{۲}} = \frac{۷}{۳ \times ۳} = \frac{۷}{۹}$$

- اگر یک عبارت جبری داخل پرانتز به توان برسد ، توان شامل تک تک جمله های عبارت می شود .

$(۲ab)^{۲} = ۲^{۲}a^{۲}b^{۲} = ۴a^{۲}b^{۲}$

- اگر جمله ای از یک عبارت جبری توان نداشت ، توانش **۱** می باشد .

$۵a^{۲}bx^{۸} = ۵a^{۲}b^{۱}x^{۸}$

محاسبهٔ عبارت توان دار :

با توجه به درس توان ، ترتیب انجام دادن عملیات مختلف ریاضی به صورت

۱) پرانتز ۲) توان ۳) ضرب و تقسیم ۴) جمع و تفریق ، انجام می شود.

$$\frac{۴^۳ \times ۴ + ۹ - ۶}{۵^۲ + ۲^۳} =$$

گستردهٔ توانی یک عدد :

در نوشتن گستردهٔ توانی هر عدد ، ارزش مکانی رقمهای

را به صورت توانی از ۱۰ می نویسیم .

$$۵۰۶۲ = ۵۰۰۰ + ۶۰ + ۲$$
$$= ۵ \times ۱۰^۳ + ۰ \times ۱۰^۲ + ۶ \times ۱۰^۱ + ۲ \times ۱۰^۰$$

ساده کردن عبارت های توان دار :

۱ - در ضرب عددهای توان دار با پایه های مساوی ، یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را جمع می کنیم .

$$(-۳)^۲ \times (-۳)^۴ = (-۳)^۶$$

۲ - در ضرب عددهای توان دار با توان های مساوی ، پایه ها را در هم ضرب و یکی از توان ها را می نویسیم.

$$۵^۴ \times (-۳)^۴ = (-۱۵)^۴$$

۳ - اگر ظاهر پایه ها مثل هم نبود ، مثلاً یکی عدد و دیگری کسر بود ، سعی میکنیم آنها به یک شکل تبدیل کنیم

$$(\frac{۱}{۲})^۳ \times (۰/۵)^۶ =$$

داریم : $(۰/۵) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

درنتیجه : $(\frac{۱}{۲})^۳ \times (\frac{۱}{۲})^۶ = (\frac{۱}{۲})^۹$

۴ - یک عدد توان دار را در صورت نیاز می توان به صورت ضرب دو یا چند عدد توان دار تبدیل کرد .

$۳^۷ = ۳^۲ \times ۳ \times ۳^۴$ و یا $۱۵^۴ = ۳^۴ \times ۵^۴$

این خواص کمک به حل بسیاری از سوالات اعداد توان دار می نماید .

الف - اگر $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ باشد ، حاصل $۲^{۱۲}$ را به دست آورید .

$$۲^{۱۲} = ۲^{۱۰} \times ۲^۲ = ۱۰۲۴ \times ۴ = ۴۰۹۶$$

ب - باز شدهٔ عدد توان دار زیر را بنویسید :

$$۱۲^۷ = (۲ \times ۶)^۷ = ۲^۷ \times ۶^۷$$

ج - ساده کردن عبارت های توان دار :

$$\underbrace{۵^۲ \times ۵^۷}_{\text{ضرب پایه های مساوی}} \times ۷^۹ = \underbrace{۵^۹ \times ۷^۹}_{\text{ضرب توان های مساوی}} = ۳۵^۹$$

د - پیش بینی ارقام یک عدد توان دار :

اگر $۴^۵ = ۱۰۲۴$ باشد ، عدد $۴^{۱۰}$ چند رقمی است ؟ $۴^{۱۰} = ۴^۵ \times ۴^۵$

اگر $۴^۵$ را ۱۰۰۰ فرض کنیم ، پس داریم : $۱۰۰۰ \times ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰۰$

در نتیجه $۴^{۱۰}$ ؛ هفت رقمی خواهد بود .

هـ - استثنای تفریق اعداد توان دار :

$$۱۰^{۲} - ۶^{۲} = ۴^{۳}$$
$$۲۱^{۲} - ۱۵^{۲} = ۶^{۳}$$

و - استثنای جمع اعداد توان دار :

$$۳^{۹} + ۳^{۹} + ۳^{۹} = ۳^{۹} \times ۳ = ۳^{۱۰}$$

ز - محاسبهٔ عبارت توان دار به کمک مقدار داده شده:

اگر $۷ = ۲^{a}$ باشد ، مقدار $۲^{a+۱}$ را بدست آورید .

$$۲^{a+۱} = ۲^{a} \times ۲^{۱} = ۷ \times ۲ = ۱۴$$

جذر یا ریشهٔ دوم :

هر گاه عددی در خودش ضرب شود ، این حاصل را **مجذور** و به عددی که در خوش ضرب شده **جذر** میگوییم .

❊ هر عدد مثبت دارای دو ریشه ، یکی مثبت و دیگری منفی می باشد . مانند عدد **۲۵** که دو ریشهٔ **۵+** و **۵−** را دارد .

❊ به ریشهٔ دوم مثبت هر عدد **جذر** آن عدد گفته میشود.

❊ علامت جذر $\sqrt{\ }$ است .

❊ جذر هر عدد ، برابر است با دو عدد که قرینهٔ یکدیگرند

❊ به جذر یک عدد ، ریشهٔ دوم آن نیز گفته میشود .

❊ اعداد منفی جذر ندارند . زیرا حاصل ضرب هیچ عددی در خوش ، منفی نمی شود .

❊ عدد صفر تنها یک ریشه داردکه آن خود عدد صفر است .

انواع جذر :

جذر کامل :

❊ اعدادطبیعی که جذر کامل دارند ؛ یعنی جذر آنها یک عدد طبیعی می شود را مجذور کامل گویند ،

مانند ؛ **۱** ، **۴** ، **۹** ، **۱۶** ، **۲۵** و . . . . برای رسیدن به جذر کامل از خود سوال کنید چه عددی در خوش ضرب شده که عدد زیر رادیکال را تشکیل داده است ؟ مانند : $\sqrt{۴۹} = ۷$

جذر تقریبی :

❊ جذرهایی که یک عدد اعشاری شوند .

برای رسیدن به جذر تقریبی یک عدد ابتدا باید معلوم کنید که عدد زیر رایکال شما بین کدام دو عدد صحیح قرار گرفته است .

مانند $\sqrt{۱۸}$ که بین دو رایکال $\sqrt{۱۶}$ و $\sqrt{۲۵}$ قرار گرفته یعنی : $\sqrt{۱۶} < \sqrt{۱۸} < \sqrt{۲۵}$ پس $\sqrt{۱۸}$ بین دو عدد **۴** و **۵** قرار گرفته است .

این فاصله را نصف کرده به توان **۲** برسانید .

بسیار مهم :

ضمناً می توانید اگر به عدد کوچکتر نزدیک بود ؛ **۰/۱** ، **۰/۱** به عدد کوچکتر اضافه کنید تا به حدود جذر مورد نظر برسید و اگر به عدد بزرگتر نزدیک بود ؛ **۰/۱** ، **۰/۱** از عدد بزرگتر کم کنید تا به حدود جذر مورد نظر برسید.

عدد	۴/۵	۴/۱	۴/۲	۴/۳
مجذور	۲۰/۲۵	۱۶/۸۲	۱۷/۶۴	۱۸/۴۹

پس داریم : $\sqrt{۱۸} \simeq ۴/۲$