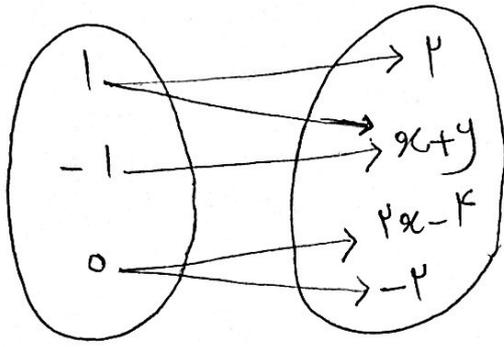


مسئله: نمودار داده شده، مناسب یک تابع است. مقدار x و y را محاسبه کنید.



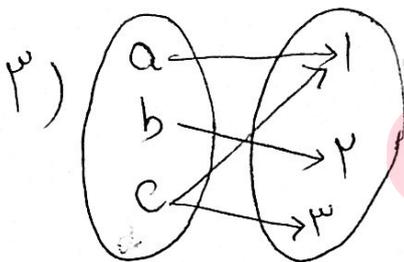
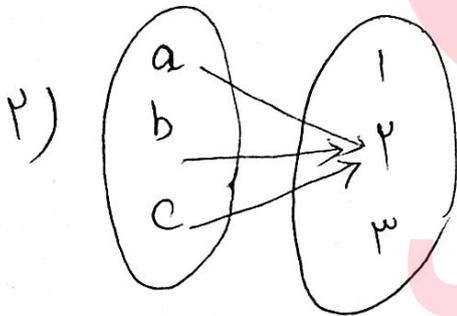
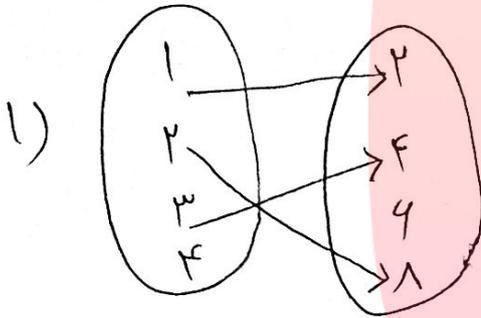
طبق تعریف تابع از نظر پیکانی

از هر عضو مجموعه اول باید یک فلش خارج

شود پس:

$$\begin{cases} x+y=2 \Rightarrow y=2-x \\ 2x-4=-2 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

سؤال ۲) کدام یک از نمودارها و پیکانی داده شده تابع است و کدام تابع نیست؟ چرا؟



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تذکره: هر دانشمندی که پیکانی روابط از مجموعه A به B زمانی تابع است که از همه اعضای مجموعه A دقیقاً یک پیکان خارج شود نه بیشتر نه کمتر اما ممکن است به برخی اعضا مجموعه B پیکان وارد نشود و یا آن که بیش از یک پیکان وارد شوند

زوج مرتب:

تعریف: هر دو تایی که به صورت (a, b) نشان داده شده است و ترتیب آن‌ها در آن‌ها اهمیت دارد را زوج مرتب می‌نامند.

توجه: در زوج مرتب (a, b) a مؤلفه اول و b مؤلفه دوم می‌گویند.

نکته: دو زوج مرتب با شرط با هم برابر هستند که مؤلفه‌های اول با هم و مؤلفه‌های دوم هم با هم برابر باشند.

مثال: مقادیر x و y را طوری بیابید که زوج مرتب $(3, x)$ و $(y, x+3)$ با هم برابر باشند.

$$(3, x) = (y, x+3) \Rightarrow \begin{cases} 3 = y \\ x = x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = y \\ 0 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -7y = 0 \Rightarrow y = 0, \quad 2x - y = 4 \xrightarrow{y=0} 2x - 0 = 4 \Rightarrow x = 2$$

سؤال ۳: مقادیر m و n را طوری بیابید که دو زوج مرتب $(3, m-n)$ و $(m+n, 4)$ با هم برابر باشند.

مای درس

گروه آموزشی عصر

تعریف تابع از نظر زوج مرتب: اگر یک رابطه به صورت زوج مرتب نمایش داده شود

www.my-dars.ir

نماین این رابطه مدیول به یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفه اول یکسان نباشند و اگر مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب یکسان بودند، باید مؤلفه‌های دوم آن دو نیز با هم برابر باشند.

مثال: اگر رابطه $\{(3, 4), (1, 4), (2, 3), (3, 3), (3, 1)\}$ تابع باشد مقدار x را

مماسه کشید. $x^2 - 2 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

الگون با جای x اعداد به دست آمده را قرار می دهیم تا ببینیم کدام یک قابل قبول است.

$x = 1$ قابل قبول نیست. $\Rightarrow \{(1, 4), (1, 6), (3, -1), (3, 3), (2, 3), (1, -1)\}$

$x = -1$ قابل قبول است. $\Rightarrow \{(1, -4), (1, 6), (3, -1), (3, 3), (2, 3), (1, -1)\}$

مثال: اگر رابطه $\{(1, -1), (3, 3), (1, a+b), (2, 3), (2, a-b)\} = f$ یک تابع باشد

مقدار $2a+b$ را حساب کنید.

$$\begin{cases} a-b=3 \\ a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1, \quad a+b=-1 \Rightarrow 1+b=-1 \rightarrow b=-2 \\ \Rightarrow 2a+b=2(1)+(-2)=0$$

سؤال ۴: مقدار a و b را چنان بیابید که رابطه داده شده تابع باشد.

$R = \{(4, 21), (4, 6), (5, 6), (7, -2), (7, 1), (9, b^3+1), (5, a^2-5a)\}$

نمایش تابع از روی جدول: دانش حالت مسابله زوج مرتب است.

توجه: اگر مقادیر بالای جدول (سطر اول) با هم برابر بودند باید مقادیر متناظر آنها در پایین جدول (سطر دوم) با هم برابر باشند.

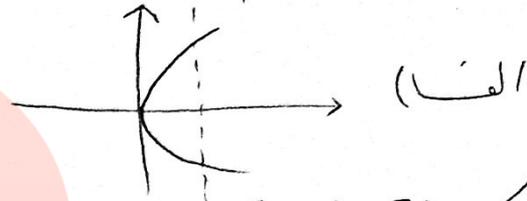
توجه: در صورت متناظر بودن مقادیر بالای جدول لزوم ندارد مقادیر پایین جدول همگی یکسان باشند.

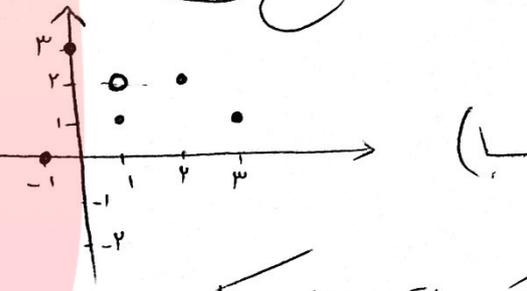
مثال: جدول $\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline y & -1 & 1 & -1 & 3 \end{array}$ نمایش یک تابع است اما جدول $\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$ نمایش یک تابع نیست.

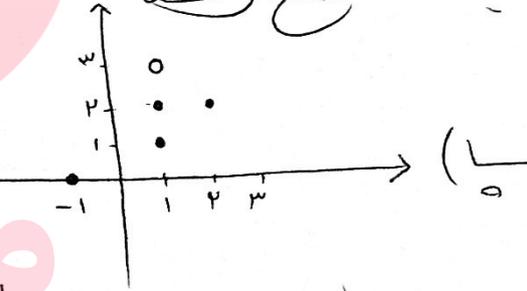
نمایش تابع از روی نمودار:

یک رابطه وقتی تابع است که در نمودار مختصاً آن، هر خطی موازی محور y نمودار رابطه را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

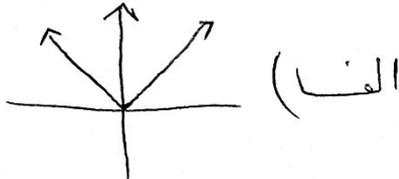
مثال: کدام یک از نمودارهای زیر تابع است؟ چرا؟

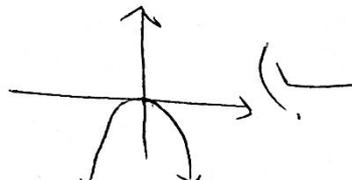
الف)  تابع نیست زیرا خط موازی محور y ها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

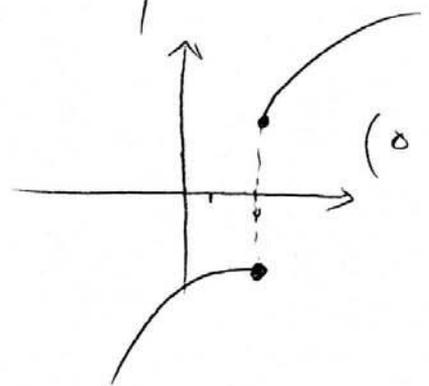
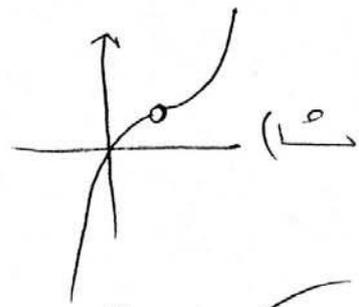
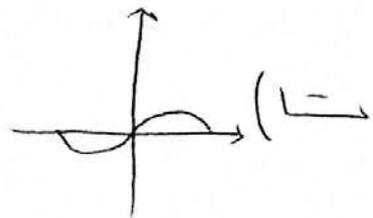
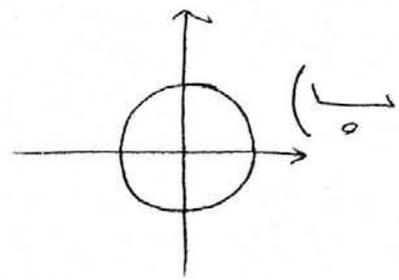
ب)  تابع است زیرا هر خط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ج)  تابع نیست زیرا خطی که از روی $x=1$ موازی محور y ها رسم شود نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

سؤال ۵) کدام یک از نمودارهای زیر تابع است و کدام یک تابع نیست؟ چرا؟

الف) 

ب) 



نماینده‌های یا ضابطه‌های تابع:

این نوع نمائش، نمائش یک عبارت جبری از یک متغیر است. معمولاً تابع را با نمادهای y ، $f(x)$ ، $g(x)$ یا \dots نمائش می‌دهیم که در آنها x متغیر است.

www.my-dars.ir

مثال: $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x} - 1$ و $y = x^2 + 2$ و \dots نمونه‌هایی از نمائش

جبری یک تابع هستند.

مثال: آیا $f(x) = x - 5$ ضابطه یک تابع است چرا؟

بله زیرا اگر به جای x مقدار هر دو عدد ده از هر مقدار و فقط یک مقدار برای y درست می‌آید.
 $f(x) = \{ \dots (2, -3), (1, -4), (0, -5) \}$

مثال: تابع بودن یا نبودن هر یک از ضابطه‌های زیر را مشخص کنید (با ذکر دلیل)

الف) $|x| + |y| = 2$

$x=0 \Rightarrow 0 + |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow \{ \dots, (0, -2), (0, 2) \}$
تابع نیست.

ب) $x^2 - 2y = 4$

$x=0 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \{ \dots, (0, -2) \}$
تابع است.

پ) $xy = 0 \quad (x \neq 0)$

$x=1 \rightarrow y=0$ و $x=2 \rightarrow y=0 \Rightarrow \{ \dots, (1, 0), (2, 0) \}$
تابع است.

سؤال ۶) با ذکر دلیل تابع بودن یا نبودن ضابطه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $x + y^2 = 4$

ب) $2x + y = 3$

پ) $\frac{2-y}{x} + x^2 = 10$

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

تعریف: مجموعه همه مؤلفاتهای اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهنده هر تابع را «دامنه» و مجموعه همه مؤلفاتهای دوم را «برد» تابع گویند.

توجه: دامنه تابع f را با D_f و برد تابع f را با R_f نمایش می‌دهند.

نکته ۱: اگر تابع با نموداریک از مجموعه A به مجموعه B نمایش داده شده باشد، دامنه تابع همان مجموعه A و برد تابع، عضوهای آن مجموعه B است که به آنها فلش وارد شده است.

نکته ۲: اگر تابع به صورت زوج مرتب (یا به صورت جدول) داده شده باشد مجموعه مؤلفاتهای اول هم زوج‌های مرتب (مجموعه مؤلفاتهای سطر بالا) دامنه و مجموعه مؤلفاتهای دوم تمام زوج‌های مرتب (مجموعه مؤلفاتهای سطر پایین) برد گویند.

نکته ۳: اگر تابع به صورت نمودار مختصاً داده شده باشد از سمت چپ نمودار، جایی که شروع می‌شوند تا جایی که انتهاست دامنه تابع و از پایین‌ترین

عرض نمودار تا بالاترین عرض نمودار، برد تابع را تشکیل می‌دهند که به صورت جایی نشان داده می‌شود.
تذکر: اگر نمودار به صورت نقاط خطا باشد مجموعه شامل طول نقاطها دامنه تابع و مجموعه شامل عرض نقاطها، برد تابع است.

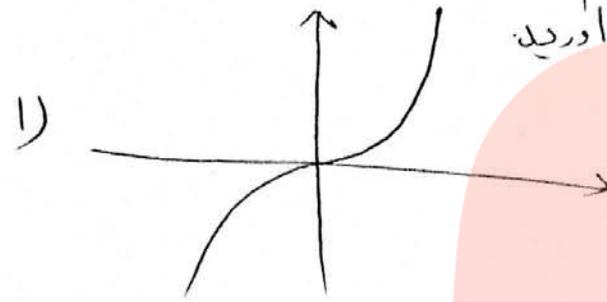
مثال: اگر $(a^2 - 7a)$ و $(a و 5)$ و $(2 و 4)$ و $(1 و 12)$ یک تابع باشد دامنه این

تابع را بنویسید.
 $a^2 - 7a = -12 \Rightarrow a^2 - 7a + 12 = 0 \Rightarrow (a-3)(a-4) = 0 \Rightarrow a=3 \text{ یا } a=4$
با توجه به رابطه داده شده هر دو قابل قبول هستند پس:
 $D: \{1, 2, 3, 4\}$

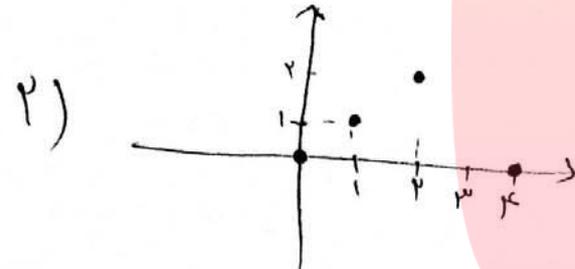
مثال: اگر رابطه $f = \{(a-1, 2), (5, a-2), (a-2, b+3), (3, 5), (5, 3), (4, b+2)\}$ تابع باشد آنگاه برد تابع را بنویسید.

$a-2 = 3 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow f = \{(1, 2), (5, 3), (3, b+3), (5, 3), (3, 5), (4, b+2)\}$
 $\Rightarrow b+3 = 5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow R_f = \{2, 3, 5, 4\}$

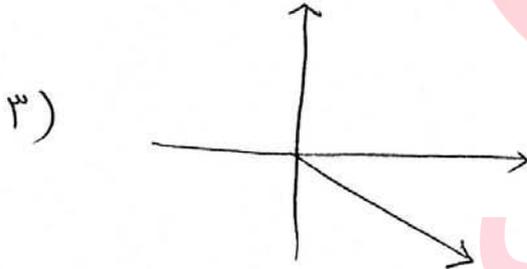
مثال: دامنه و برد را در هر يك از تابع ها و زیر عدد ستا آورید.



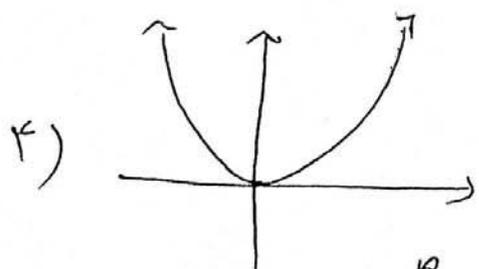
$D_f: (-\infty, +\infty), R_f: (-\infty, +\infty)$



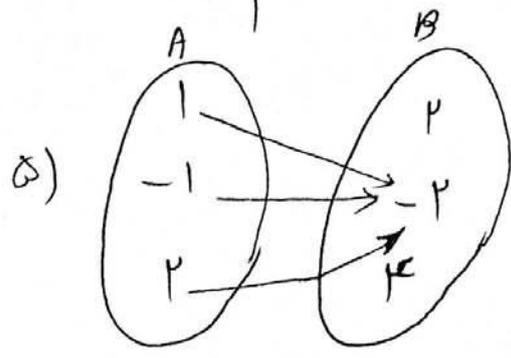
$D_f: \{0, 1, 2, 3, 4\}, R_f: \{0, 1, 2, 3, 4\}$



$D_f: [0, +\infty), R_f: (-\infty, 0]$



$D_f: (-\infty, +\infty), R_f: [0, +\infty)$



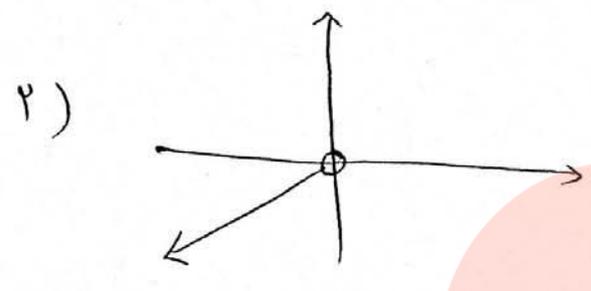
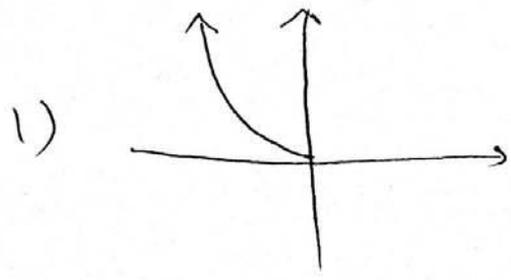
$D_f: \{1, -1, 2\}$

$R_f: \{2, -2, 4\}$

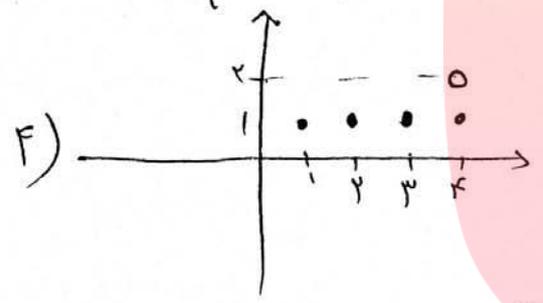
مای درس

www.my-dars.ir

سوال ۷) در هر يك از حالاتي زير، دامنه و برد را بنويسيد.



۳) $f(x) = \{(1,2), (2,4), (3,4)\}$ ؟



تقریب ضابطه یا مانورن تابع: اگر f یک تابع باشد و $(x, y) \in f$ در این صورت

من نویسم $y = f(x)$ که x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته به x می نامیم و $y = f(x)$ را ضابطه تابع می گوئیم

گروه آم $f: A \rightarrow B$ نامش می دهند.

www.miy-dars.ir

تابع خطی: هر تابعی که به صورت $f(x) = ax + b$ در آن a و b اعداد حقیقی باشند تابع خطی نام دارند.

نویسه: اگر دو نقطه از یک خط یک تابع خطی را در اختیار داشته باشیم می توانیم از طریق یافتن ضریب

پاره خط واصل بین دو نقطه مقدار ضریب را بدست آورد و با استفاده از فرمول $y - y_1 = m(x - x_1)$ معادله خط را بدست آورد.

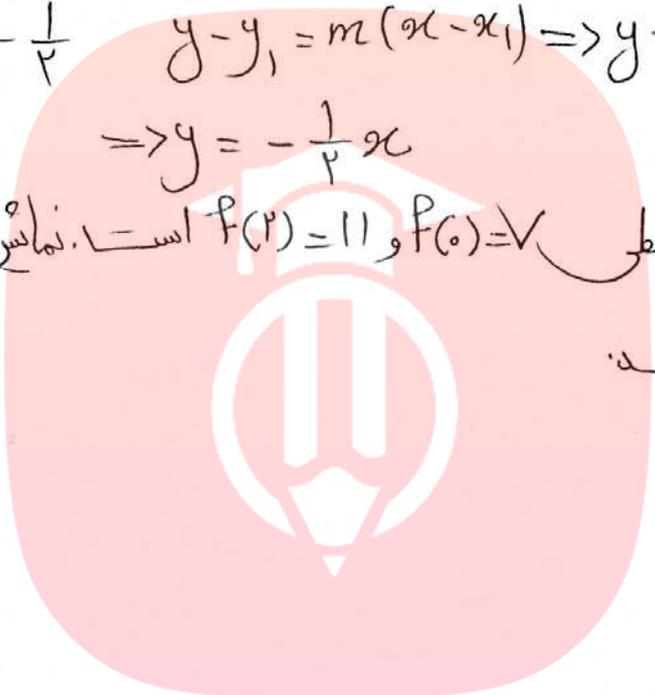
مثال: معادله خط را بنویسید که $F(0) = 1$ و $F(2) = 5$ را می‌باشد.

$$F(0) = 1 \rightarrow (0, 1) \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$
$$F(2) = 5 \rightarrow (2, 5) \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}$$
$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{2 - 0} = 2$$
$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 1$$

مثال: معادله خط را بنویسید که از مبدأ مختصات می‌گذرد و دارای شیب $-\frac{1}{2}$ می‌باشد.

$$(0, 0) \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}$$
$$m = -\frac{1}{2}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

سؤال 11) در یک تابع خطی $F(0) = 7$ و $F(2) = 11$ است. نامش چقدر است؟
و نمودار آن را رسم کنید.



سؤال 9) معادله خط را بنویسید که از $A(1, 2)$ می‌گذرد و دارای شیب 2 باشد.

مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

درس سوم: انواع تابع:

1) توابع چند جمله‌ای: توابعی که نامش چقدر آنها چند جمله‌ای از یک متغیر هستند.
توابع چند جمله‌ای می‌توانند مانند $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$ و $g(x) = 2x^2 - \sqrt{5}$ و ...

(۲) تابعی با دامنه و برد یکسان که هر عضو دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود اگر دامنه تابعها R باشد نامش جبری آن $x = f(x)$ که f بر R باشد و نمودار آن نیز مستقیم عمود بر محور x است

مثال: اگر f یک تابع باشد مقادیر a و b را محاسبه کنید

$$f = \{(1, 3a-2), (-5, 4b+1), (4, 4)\}$$

طبق تعریفها، هر x با خودش نظیر شود پس:

$$3a-2=1 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1 \quad \text{و} \quad 4b+1=-5 \Rightarrow 4b=-6 \Rightarrow b=-\frac{3}{2}$$

سؤال (۱۰) اگر f تابع همان دامنه R باشد و $f(3-4a) = 2a-9$ مقدار a را بیابید

(۳) تابع ثابت: تابعی که برد آن فقط دارای یک عضو است. اگر دامنه این نوع تابع R باشد نامش جبری آن $f(x) = k$ که k عددی حقیقی و ثابت است و نمودار آن خطی موازی محور x است.

مثال: اگر $f = \{(1, a+b), (3, 4a), (4, ab)\}$ تابعی ثابت باشد مقدار a را بیابید.

طبق تعریف تابع ثابتها و با هم برابرند پس:

$$a+b = 4a = ab \Rightarrow \begin{cases} a+b = 4a \Rightarrow b = 3a \\ 4a = ab \Rightarrow 4a = 3a^2 \Rightarrow 3a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(3a-4) = 0 \\ \Rightarrow a=0 \quad \text{یا} \quad a = \frac{4}{3} \end{cases}$$

www.my-dars.ir

سؤال (۱۱) اگر $f = \{(1, a-b), (2, 3), (3, 2a+b)\}$ تابعی ثابت باشد مقدار a و b را محاسبه کنید.

مقدار تابع: اگر زوج مرتب (a, b) را در تابع f در نظر بگیریم به معنای $f(a) = b$ من باشد در واقع مقدار تابع f در نقطه a برابر b است.

توجه: برای یافتن مقدار تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ است با جای x مقدار a را در ضابطه تابع قرار دهیم و حاصل را بیابیم.

مثال: هرگاه $f(x) = x^2 - 2$ و $g(x) = (x - 5)^2$ مقدارها زیر را بیابید.

الف) $f(2) - g(5) = (4 - 2) - ((5 - 5)^2) = 2 - 0 = 2$

ب) $\frac{4f(0) - 2g(2)}{3g(3)} = \frac{4x - 2 - 2 \times 9}{3 \times 4} = \frac{-8 - 18}{12} = \frac{-26}{12} = \frac{-13}{6}$

سؤال ۱۲: هرگاه $f(x) = \frac{2x - 8}{3}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x}$ حاصل عبارتهای زیر را بیابید.

الف) $f(-2) + 2g(3) =$

ب) $\frac{f(\frac{5}{4}) - g(0)}{g(-5)} =$

مای درس

تابع قدر مطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر من کند

تابع قدر مطلق نامیده می شود که آن را بصورت $f(x) = |x|$ یا

www.my-dars.ir

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نمایش می دهیم.

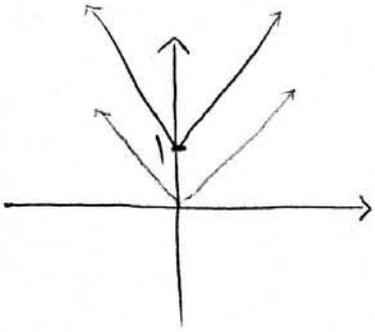
رسم بر فرض توابع به کمک انتقال:

با داشتن نمودار تابع مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در امتداد محور y ها بدست آورد. اگر k باشد انتقال به سمت بالا و اگر k باشد

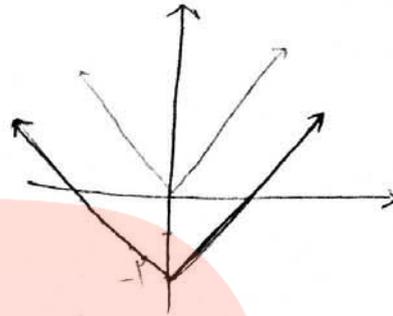
انتقال با سمت پائین خواهد بود.

مثال: نمودارهای زیر را با کمک انتقال رسم کنید

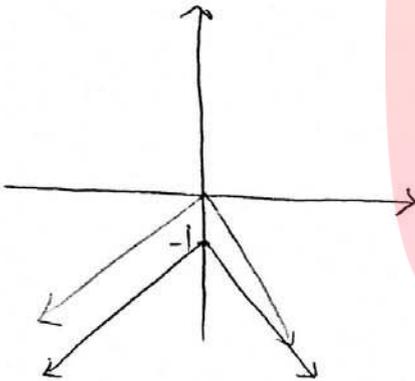
$$1) f(x) = |x| + 1$$



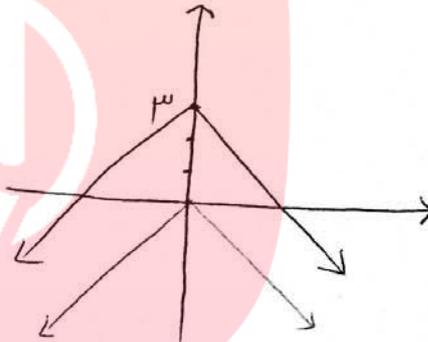
$$2) f(x) = |x| - 2$$



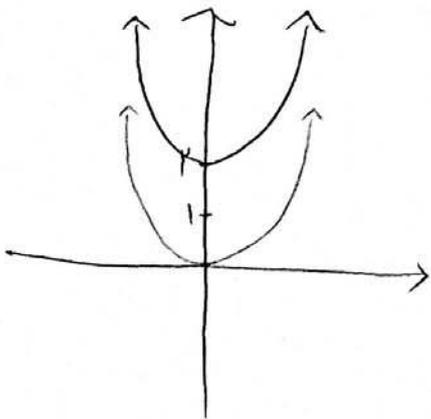
$$3) f(x) = -|x| - 1$$



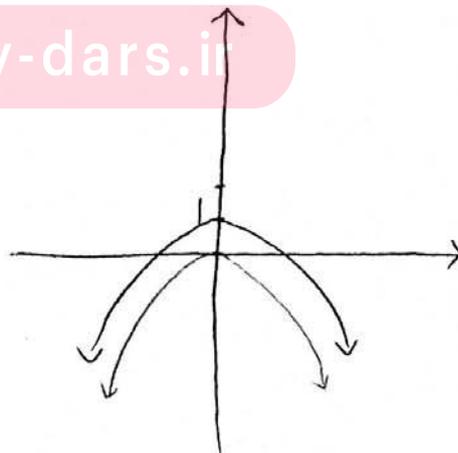
$$4) f(x) = -|x| + 3$$



$$5) f(x) = x^2 + 2$$



$$6) f(x) = -x^2 + 1$$



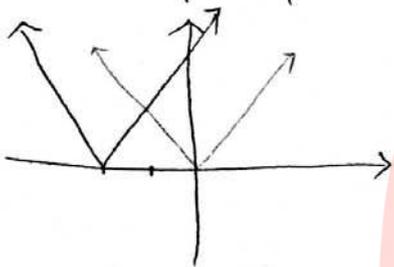
مای درس

www.my-dars.ir

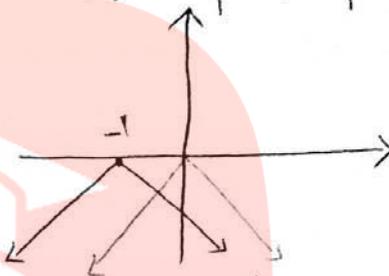
برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافیست نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x به
 انتقال دهیم اگر k باشد انتقال در جهت منفی و اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت مثبت
 خواهد بود

مثال: نمودارهای زیر را به روش انتقال رسم کنید.

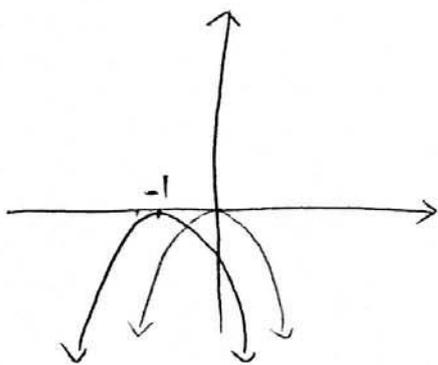
۱) $f(x) = |x+2|$



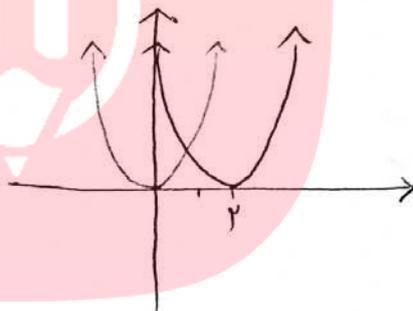
۲) $f(x) = -|x+1|$



۳) $f(x) = -(x+1)^2$

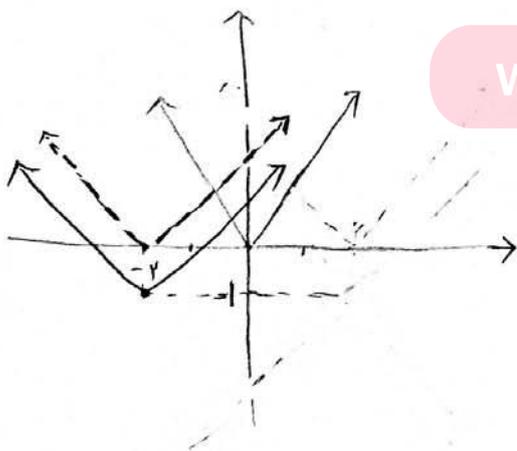


۴) $f(x) = (x-2)^2$

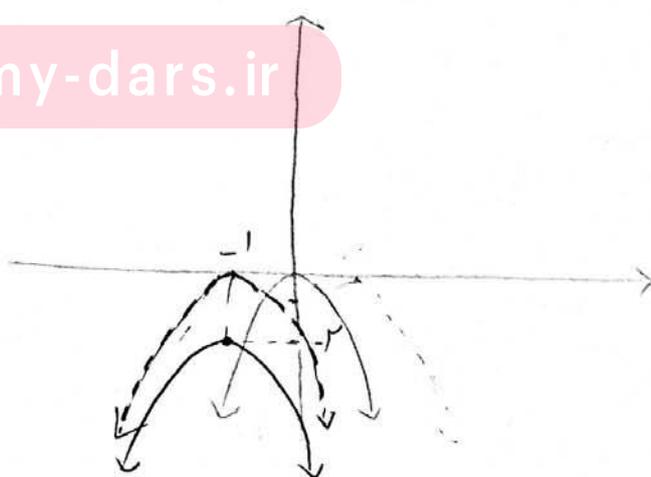


مای درس

۵) $f(x) = |x+2| - 1$

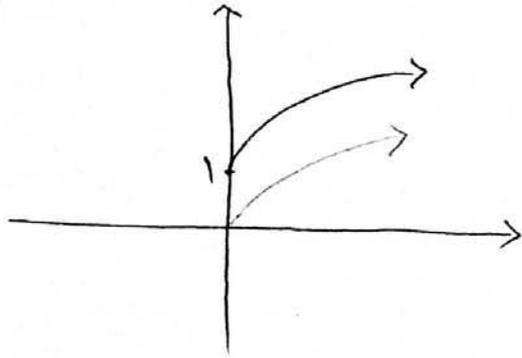


۶) $f(x) = -(x+1)^2 - 2$

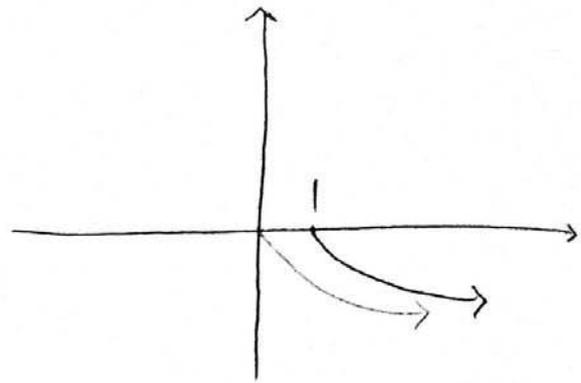


www.my-dars.ir

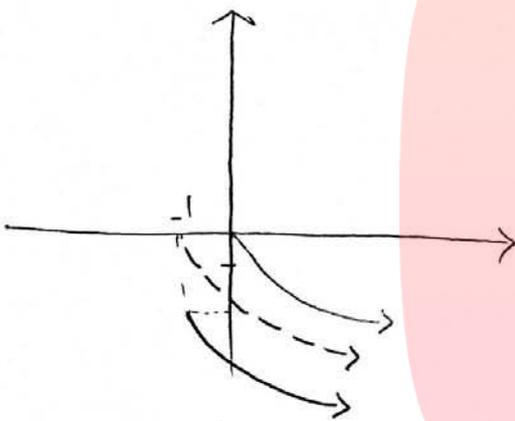
$$۷) f(x) = \sqrt{x} + 1$$



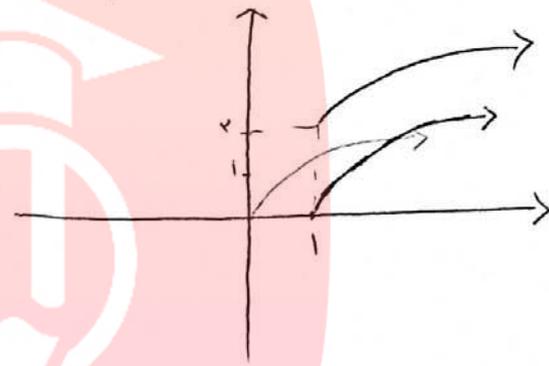
$$۸) f(x) = -\sqrt{x-1}$$



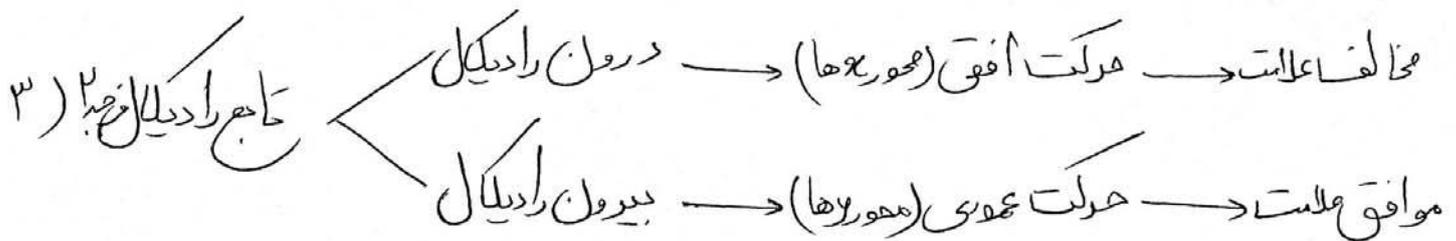
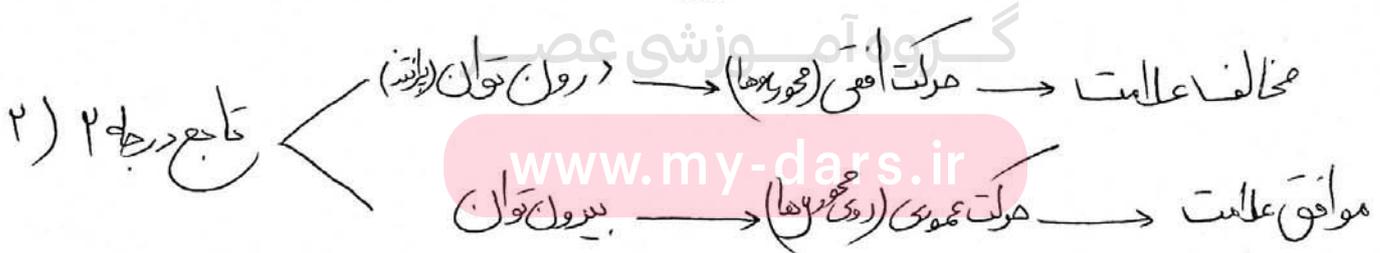
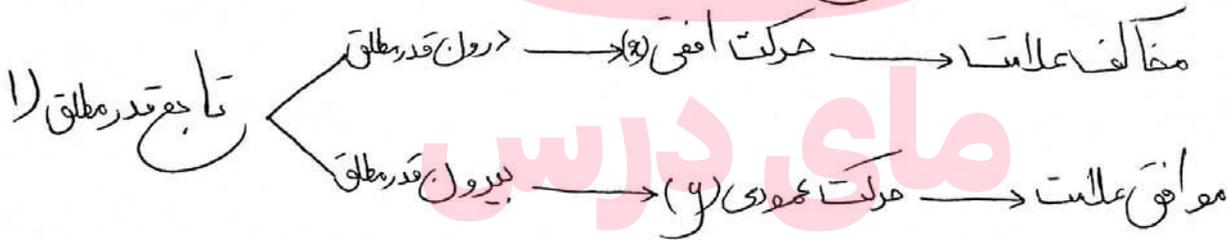
$$۹) f(x) = -\sqrt{x+1} - 2$$



$$۱۰) f(x) = \sqrt{x-1} + 2$$



توجه: به طور کلی مرتقبات همبندی زیر را در انتقالها در نظر داشت.



توجه: علامت منفی قبل از جمله درجه ۲ یا قدر مطلق نشان دهنده آن است که نمودار روبه پایین میسر شود و علامت منفی قبل از رادیکال نیز نشان دهنده میسر نمودار با همان نرم روبه پایین است.

سؤال ۱۳) هر کدام از توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه و بردار آنها را بنویسید.

$$۱) f(x) = |x| - ۲$$

$$۲) f(x) = -x^2 + ۲$$

$$۳) f(x) = -|x+۱| - ۲$$

$$۴) f(x) = (x+۲)^2 - ۱$$

$$۵) f(x) = \sqrt{x+۱} - ۲$$

$$۶) f(x) = -\sqrt{x+۱} + ۲$$



مای درس

گروه آموزشی عصر

$$۷) f(x) = -|x| + ۱$$

$$۸) f(x) = \sqrt{x} - ۱$$

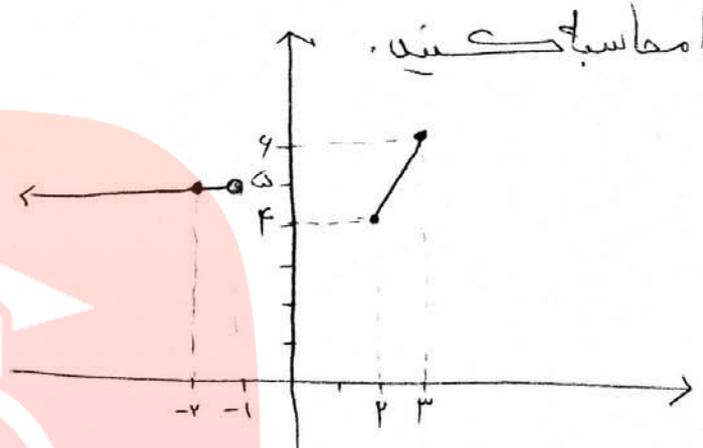
www.my-dars.com

تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای)

تابعی که برای x های مختلف معادله‌های متفاوتی دارد تابع قطعه‌ای نامیده می‌شود.

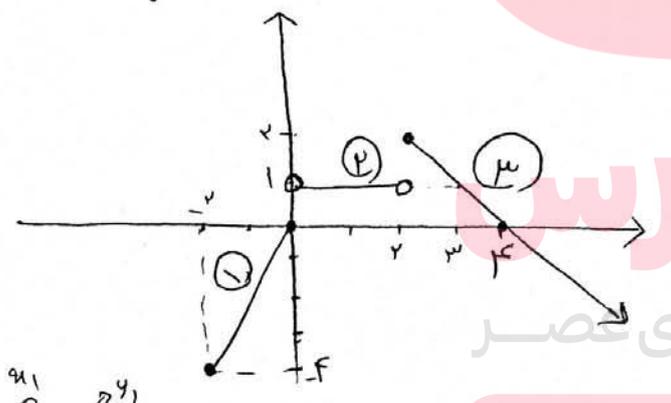
مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$ رسم کنید و مقادیر $f(-3)$ و $f(\sqrt{5})$ و $f(3)$ را محاسبه کنید.

$2x$	$2 \leq x \leq 3$	$x \mid 2$	3
		$y \mid 4$	6
5	$x < -1$	$x \mid -1$	-2
		$y \mid 5$	5



$f(3) \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} = 2 \times 3 = 6$, $f(\sqrt{5}) \xrightarrow{\text{ضابطه اول}} = 2\sqrt{5}$, $f(-3) \xrightarrow{\text{ضابطه دوم}} = 5$

مثال: نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است. ضابطه آن را بدست آورید. دامنه و برد آن را محاسبه کنید (کار در کلاس صفحه ۱۱۳)



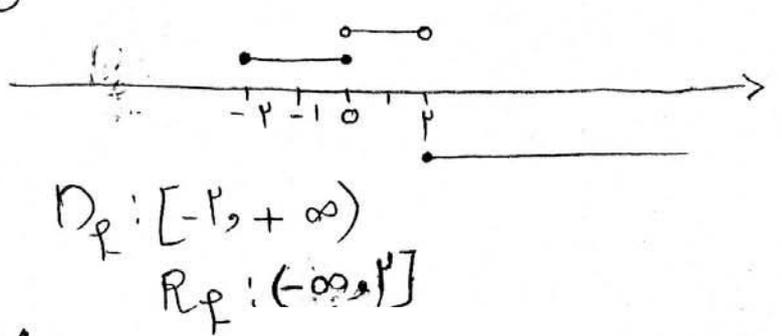
$(-2, -4)$ و $(0, 0)$ $\Rightarrow m = \frac{-4 - 0}{-2 - 0} = 2$

$\Rightarrow y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$ (۱)

$(0, 1)$ و $(2, 1)$ $\Rightarrow m = \frac{1 - 1}{2 - 0} = 0 \Rightarrow y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1$ (۲)

$(2, 2)$ و $(4, 0)$ $\Rightarrow m = \frac{2 - 0}{2 - 4} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x - 4) \Rightarrow y = -x + 4$ (۳)

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ -x + 4 & x \geq 2 \end{cases}$



مثال: تابع $g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید (مقاله صفحه ۱۲ کتاب درسی)

$$g(x) = \begin{cases} x-4 & x > 1 & \begin{array}{l} x \quad | \quad 1 \\ y \quad | \quad -3 \end{array} \\ \frac{5}{2} & x = 1 & \begin{array}{l} x \quad | \quad 1 \\ y \quad | \quad \frac{5}{2} \end{array} \\ -x & -4 \leq x < 1 & \begin{array}{l} x \quad -4 \quad 0 \quad 1 \\ y \quad 4 \quad 0 \quad -1 \end{array} \end{cases}$$



سؤال ۱۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ x+1 & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم و دامنه و برد آن را بنویسید و

همچنین مقادیر $f(\sqrt{2})$ و $f(0)$ و $f(-1)$ را محاسبه کنید (کار در کتاب درسی صفحه ۱۱۳)

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir