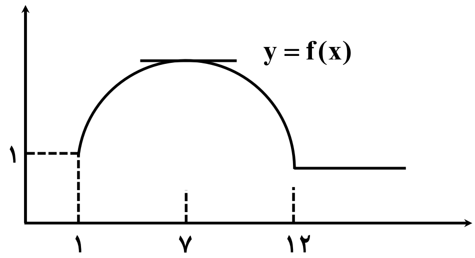
۱- با توجه به نمودار مقابل جاهای خالی را پر کنید.



الف) در بازه $(۱,۷)$ که تابع f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است. بنابراین در این بازه علامت f' مشتق است.

ب) در بازه‌ی $(۷,۱۲)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f منفی است. بنابراین در این بازه علامت f' منفی است.

پ) در بازه $(۱۲,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' صفر است.

۲- به کمک مشتق بیان کنید تابع $f(x)=x^۳-۳x$ در چه بازه‌های اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است.

پاسخ:

کافی است مشتق تابع f را تعیین علامت کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۳\xrightarrow{f'(x)=۰}۳x^۲-۳x=۰\rightarrow x=+۱,x=-۱$$

x		-۱		$+۱$	
علامت f'	$+$		$-$		$+$
یکنوایی تابع	↘	۲	↗	-۲	↘
	اکیداً صعودی		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی

در بازه $(-\infty,-۱)$ و $(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-۱,+۱)$ اکیداً نزولی

۳- بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^۳-۱۲x+۴$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟

پاسخ:

برای حل سوال کافی است نامعادله $f'(x)<۰$ را حل کنیم:

$$f'(x)=۳x^۲-۱۲\xrightarrow{f(x)=۰}۳x^۲-۱۲=۰\rightarrow x^۲=۴\rightarrow x=-۲,x=+۲$$

تابع f در بازه $(-۲,۲)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$		-۲		$+۲$		$+\infty$
f'		$+$		$-$		$+$	
f		↗	$+۲۰$	↘	-۱۲	↗	
		اکیداً صعودی		اکیداً نزولی		اکیداً صعودی	

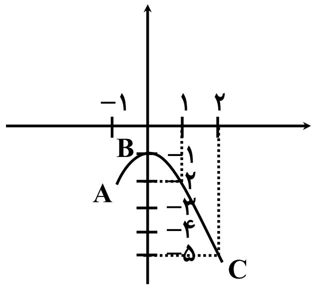
۴- با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\dfrac{۱}{x^۲+۱}$، مشخص کنید تابع f در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

$$g'(x)=\frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲}\xrightarrow{g'(x)=۰}-۲x=۰\rightarrow \boxed{x=۰}$$

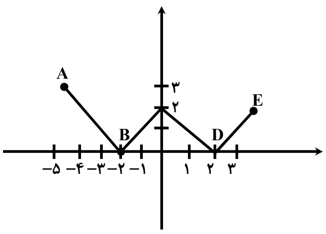
تابع در بازه‌های $(-\infty,۱)$ صعودی اکید و در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ نزولی اکید است.

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$		↗ صعودی		نزولی ↘	

۵- نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.

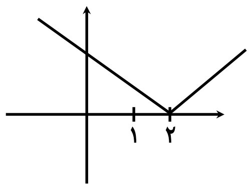


نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست		–
B	max نسبی	-۱	$f'(0)$ برابر صفر است
C	نقطه اکسترمم نسبی نیست	–	–



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-2)$ موجود نیست
C	max نسبی	۲	$f'(-2)$ موجود نیست
D	min نسبی	۰	$f'(2)$ موجود نیست
E	نه max و نه min	–	–

۶- با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ ، نشان دهید که f در $x=2$ مینیمم دارد.



$$f(x)=|x-2| \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x-2 & x\geq 2 \\ -x+2 & x<0 \end{cases} \rightarrow f'(x)=\begin{cases} x & x>2 \\ -1 & x<2 \end{cases}$$

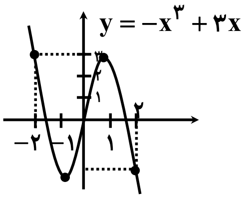
ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟

خیر، زیرا مشتق چپ و راست با هم برابر نیستند.

پ) آیا $x=2$ طول نقطه بحرانی است؟

بله، زیرا تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست ولی $x=2$ عضو دامنه است.

۷- نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x$ را رسم کرده‌ایم: $y=-x^3+3x$



الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

از روی نمودار: $(1,2),(-1,-2)$

طول‌ها: $+1,-1$

به کمک مشتق: $f'(x)=-3x^2+3$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} -3x^2+3=0 \rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است ریشه‌های $f'(x)=0$ یعنی نقاط بحرانی را بدست آورید.

$$f'(x)=-3x^2+3=0 \rightarrow \pm 1$$

$$f(1)=+2 \quad , \quad f(-1)=-2$$

۸- تابع با ضابطه $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید. طول نقاط بحرانی را بدست آورید.

$$f'(x)=-2x+2 \xrightarrow{f'(x)=0} -2x+2=0 \rightarrow \boxed{x=\pm 1} \Rightarrow \boxed{x=+1}$$

۹- جدول تغییرات تابع $g(x)=x^{3}-3x^{2}$ را رسم کنید که نقاط اکسترمم نسبی تابع در آن را مشخص شده باشد.

$$g'(x)=3x^{2}-6x \xrightarrow{g'(x)=0} 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0, x=2$$

x	$-\infty$	0	2	$-\infty$
بازه	$(-\infty,0)$		$(0,2)$	$(2,+\infty)$
علامت f'	+		−	+
f یکنوایی تابع	صعودی اکید ↗	0 max نسبی	نزولی اکید ↘	-8 min نسبی	صعودی اکید ↗

۱۰- نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود بدست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{4-x^{2}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}}=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^{2}}} \xrightarrow{f'(x)=0} -2x=0 \to \boxed{x=0} \Rightarrow f(0)=2$

به کمک مشتق: می‌دانیم ریشه‌های ساده مشتق تابع، نقاط بحرانی هستند.

ب) $g(x)=x^{3}+3x^{2}-4 \Rightarrow g'(x)=3x^{2}+6x \xrightarrow{g'(x)=0} 3x^{2}+6x=0 \to 3x(x+2)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to g(0)=-4 \to (0,4) \\ x=-2 \to g(-2)=0 \to (-2,0) \end{cases}$$

پ) $h(x)=\sqrt[3]{x} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}} \Rightarrow$ در $x=0$ مشتق‌پذیر نیست پس نقطه $(0,0)$ نقطه بحرانی است.

۱۱- در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x)=x^{3}+3x^{2}-9x-10$

$$f'(x)=3x^{2}+6x-9 \xrightarrow{f'(x)=0} 3(x^{2}+2x-3)=0 \to 3(x-1)(x+3)=0 \to x=1, x=-3$$

	$-\infty$	-3		$+1$	$+\infty$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	max 17	↘	min -15	↗

$$\Rightarrow \begin{cases} \max(-3,+17) \\ \min(1,-15) \end{cases}$$

ب) $g(x)=-2x^{3}+3x^{2}+12x-9$

$$g'(x)=-6x^{3}+6x+12 \xrightarrow{g'(x)=0} -6x^{2}+6x+12=0 \to -6(x^{2}-x-2)=0 \to -6(x-2)(x+1)=0 \to$$
$$x=2, x=-1$$

	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
g'	−	0	+	0	−
g	↘	min -16	↗	max 11	↘

$$\Rightarrow \begin{cases} \min(-1,-16) \\ \max(2,11) \end{cases}$$

پ) $h(x)=-x^{3}-3x+2$

$h'(x)=-3x^{2}-3 \xrightarrow{h'(x)=0} -3x^{2}-3=0 \to x^{2}=-1 \to$ غیر قابل قبول(نقطه بحرانی ندارد)

۱۲- اگر نقطه $(۲,۱)$، نقطه اکسترمم تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را بدست آورید.

نقطه $(۲,۱)$ عضوی از تابع است پس می‌توانیم آن را در تابع صدق دهیم.

$$f(۲)=۱\rightarrow ۸+۴b+d=۱\rightarrow \boxed{۴b+d=-۷}\quad I$$

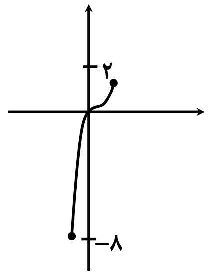
چون $(۲,۱)$ اکسترمم است پس مشتق در نقطه $x=۲$ برابر صفر است.

$$f'(x)=۳x^۲+۲bx$$
$$f'(۲)=۰\Rightarrow ۱۲+۴b=۰\rightarrow \boxed{b=-۳}$$
$$I\quad ۴(-۳)+d=-۷\rightarrow d=۵$$

۱۳- به کمک رسم نمودار توابع، مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

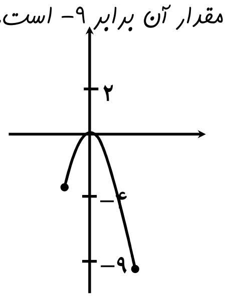
الف) $f(x)=x^۳ : x\in[-۲,۱]$

در $x=-۲$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۸- است. در $x=۱$ ماکزیمم مطلق دارد که مقدار آن ۱ است.



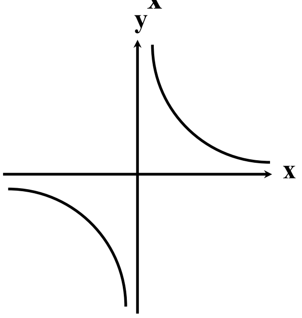
ب) $g(x)=-x^۲ : x\in[-۲,۳]$

در $x=۰$ دارای ماکزیمم مطلق و نسبی است که مقدار آن برابر صفر است. در $x=۳$ مینیمم مطلق دارد که مقدار آن برابر ۹- است.



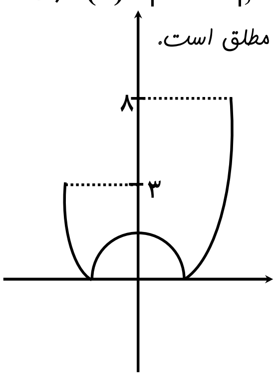
پ) $h(x)=\frac{۱}{x}$

نه ماکزیمم دارد و نه مینیمم



ت) $t(x)=|x^۲-۱|, x\in[-۲,۳]$

در $x=۱$ و $x=-۱$ دارای مینمم مطلق و نسبی است و در $x=۰$ ماکزیمم نسبی است و در $x=۳$ ماکزیمم مطلق است.



۱۴- مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده در صورت وجود بدست آورید.

الف) $\mathbf{f(x)=-۲x^۳+۹x^۲-۱۳ : x\in[-۱,۲]}$

$$f'(x)=-۶x^۲+۱۸x=۰\rightarrow -۶x(x-۳)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=۳\end{cases}$$

$x=۳$ قابل قبول نیست زیرا در بازه $[-۱,۲]$ قرار ندارد.

$$f(-۱)=-۲(-۱)^۳+۹(-۱)^۲-۱۳=-۲$$
$$f(۰)=-۱۳ \qquad\Rightarrow\ \underset{\text{مطلق}}{\min}(۰,۱۳),\underset{\text{مطلق}}{\max}(۲,۷)$$
$$f(۲)=-۲(-۲)^۳+۹(۲)^۲-۱۳=+۷$$

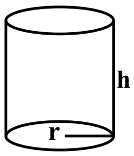
ب) $\mathbf{g(x)=x^۳+۲x-۵ : x\in[-۲,۱]}$

$$g'(x)=۳x^۲+۲=۰\rightarrow x^۲=\frac{-۲}{۳}\quad \text{غ ق ق}$$

$$g(-۲)=(-۲)^۳+۲(-۲)-۵=-۱۷\Rightarrow \underset{\text{مطلق}}{\min}(-۲,-۱۷),\underset{\text{مطلق}}{\max}=(۱,-۲)$$
$$g(۱)=(۱)^۳+۲(۱)-۵=-۲$$

۱۵- می‌خواهیم یک قوطی استوانه‌ای شکل روبه‌رو و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

پاسخ:



$$\text{حجم استوانه}=۱(Lit)=۱۰۰۰cm^۳$$
$$\pi r^۲h=۱۰۰۰\Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲}$$
$$\text{سطح جانبی}+\text{مساحت قاعده}=\text{مساحت کل}$$
$$\Rightarrow S=\pi r^۲+۲\pi rh=\pi r^۲+۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^۲})\Rightarrow S=\pi r^۲+\frac{۲۰۰۰}{r}$$

با یافتن نقطه بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص می‌کنیم به ازای چه مقداری از r، مقدار S مینیمم می‌شود.

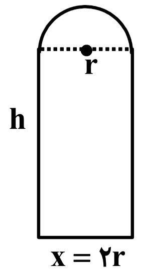
$$S'=۲\pi r-\frac{۲۰۰۰}{r^۲}\xrightarrow{S'=۰}۲\pi r^۳=۲۰۰۰\Rightarrow r=\sqrt[۳]{\frac{۱۰۰۰}{\pi}}=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\Rightarrow S(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}})=\pi(\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}})+\frac{۲۰۰۰}{\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}}$$

۱۶- دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$$x-y=۱۰\Rightarrow x=۱۰+y$$
$$S(y)=x.y=(۱۰+y)y=y^۲+۱۰y\Rightarrow S'_{(y)}=۲y+۱۰$$
$$\xrightarrow{s'_{(y)}=۰}۲y+۱۰=۰\Rightarrow y=-۵\Rightarrow x=۱۰+(-۵)=۵$$

۱۷- در بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن می‌باشد. به‌طوری که قطر نیم برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابیدکه بیشترین نوردهی را داشته باشد.

پاسخ:



$$\text{محیط} = ۴/۵ = ۲h + ۲r + \frac{۱}{۲}(۲\pi r)$$

$$\Rightarrow ۲h + ۲r + \pi r = \frac{۹}{۲} \Rightarrow h = \frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}$$

مساحت نیم‌دایره + مساحت مستطیل = مساحت پنجره

$$S = ۲r \times h + \frac{۱}{۲}(\pi r^۲) = ۲r \times (\frac{۹}{۴} - r - \frac{\pi r}{۲}) + \frac{۱}{۲}\pi r^۲$$

$$\Rightarrow S = -(\frac{\pi + ۴}{۲})r^۲ + \frac{۹}{۲}r$$

$$\Rightarrow S' = -۲(\frac{\pi + ۴}{۲})r + \frac{۹}{۲} = ۰ \Rightarrow r = \frac{-۴/۵}{-(\pi + ۴)} = \frac{۴/۵}{\pi + ۴}$$

	$\frac{۴/۵}{\pi+۴}$	
$S'_{(r)}$	+	−
$S_{(r)}$	$\nearrow$ max	$\searrow$

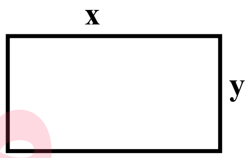
۱۸- کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

پاسخ:

الف)



$$xy = ۱۰۰۰ \rightarrow y = \frac{۱۰۰۰۰}{x}$$ پ

$$p(x) = ۲(۲۰۰۰۰۰۰x) + ۲(۸۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۱۰۰۰۰}{x}) = \frac{۴\times۱۰^۶(x^۲ + ۴۰۰۰۰)}{x}$$

ب)

$$p'(x) = ۴\times۱۰^۶\left(\frac{۲x^۲ - x^۲ - ۱۰۰۰۰}{x^۲}\right) = ۴\times۱۰^۶\left(\frac{x^۲ - ۴۰۰۰۰}{x}\right)$$

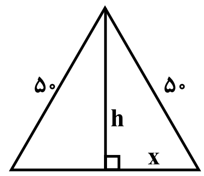
$$\xrightarrow{p'(x)=۰} ۴\times۱۰^۶\left(\frac{x^۲ - ۴۰۰۰۰}{x^۲}\right) = ۰ \rightarrow x^۲ - ۴۰۰۰۰ = ۰ \rightarrow x^۲ = ۴۰۰۰۰ \rightarrow x = ۲۰۰$$

$$x = ۲۰۰ \xrightarrow{y = \frac{۱۰۰۰۰}{x}} y = ۵۰$$

۱۹- الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز این مسئله را حل کنید.

پاسخ: الف)



$$h^2+x^2=50^2 \to h=\sqrt{2500-x^2}$$

$$S_{(x)}=\frac{1}{2}\times 2x\times h=x(\sqrt{2500-x^2}) \qquad D=[0/50]$$

$$S'_{(x)}=\sqrt{2500-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-x^2-x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-2x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$$

$$\xrightarrow{S'(x)=0} 2500-2x^2=0\to x^2=\frac{2500}{2}=1250\to \boxed{x=\sqrt{1250}=25\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{h=\sqrt{2500-x^2}} h=\sqrt{2500-1250}=\sqrt{1250}\to \boxed{h=25\sqrt{2}}$$

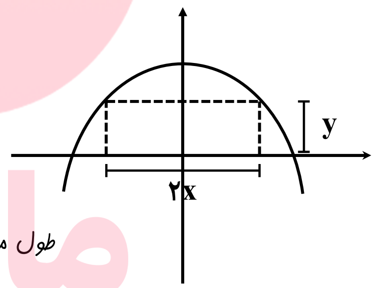
$$S_{(x)}=(25\sqrt{2})(\sqrt{2500-1250})=625\times 2=1250$$

ب) با توجه به $S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times \sin\theta$ *بیشترین مساحت وقتی است* $\sin\theta=1$ *باشد پس* $\theta=90^\circ$ *می‌شود. پس خواهیم داشت:*

$$S=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 50\times 50\times 1=1250$$

۲۰- ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگر بالای محور x ها روی سهمی $y=12-x^2$ باشند.

پاسخ:



$$S_{(x)}=2xy=2x(12-x^2)=24x-2x^3$$

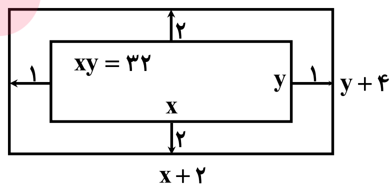
$$S'_{(x)}=24-6x^2\xrightarrow{S'(x)}24-6x^2=0\to x^2=4\to x=2$$

$$\xrightarrow{y=12-x^2} y=12-4=8$$

طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن برابر ۲ است.

۲۱- هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن ثابت $32cm^2$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه 2cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

پاسخ:



$$S_{(x)}=(x+2)(y+4)=xy+4x+2y+8$$

$$\xrightarrow{xy=32} S_{(x)}=4x+2y+40\xrightarrow{y=\frac{32}{x}} S_{(x)}=4x+\frac{64}{x}+40$$

$$S'_{(x)}=4-\frac{64}{x^2}=\frac{4x^2-64}{x^2}\xrightarrow{S'(x)=0}4x^2-64=0\to x^2=16\to x=4$$

$$\xrightarrow{y'=\frac{32}{x}} y=\frac{32}{4}=8$$

ابعاد جعبه برابر است با:

۲۲- آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲\frac{m}{s}$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری بیابید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.

پاسخ:

می‌دانیم زمان را می‌توانیم از فرمول $t=\frac{x}{V}$ بدست آوریم. پس:

$$t=t_۱+t_۲ \;\; و \;\; t_۱=\frac{x_۱}{v_۱}=\frac{۲۰۰-x}{۳} \;\; و \;\; t_۲=\frac{x_۲}{t_۲}=\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow t=\frac{۲۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}{۲}=\frac{۱}{۶}(۴۰۰-۲x+۳\sqrt{۳۶۰۰+x^۲})$$

$$t'=\frac{۱}{۶}(-۲+۳\times\frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}})\xrightarrow{t'=۰}۲=\frac{۳x}{\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}}\Rightarrow ۲\sqrt{۳۶۰۰+x^۲}=۳x$$

$$\xrightarrow{۲}۱۴۴۰۰+۴x^۲=۹x^۲\rightarrow ۵x^۲=۱۴۴۰۰\Rightarrow x^۲=۲۸۸۰$$

$$\Rightarrow t=\frac{۱}{۶}(۴۰۰-۲\times ۲۴\sqrt{۵}+۳\sqrt{۳۶۰۰+۲۸۸۰})=۱۰۰$$