تمرین‌های فصل چهارم: مشتق

تیپ اول: تعریف حدی مشتق

۱- معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=x^{۲}+۳$ را در نقطه‌ای به طول (-۲) بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم شیب خط مماس بر منحنی f در نقطه $A(\alpha, f(\alpha))$ به صورت زیر است:

$$\text{شیب خط مماس بر منحنی} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(\alpha)$$

$$f(-۲)=(-۲)^{۲}+۳=۷\ ,\ f(-۲+h)=(-۲+h)^{۲}+۳=۴-۴h+h^{۲}+۳=۷-۴h+h^{۲}$$

$$f'(-۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(-۲+h)-f(-۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۷-۴h+h^{۲}-۷}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۴h+h^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(-۴+h)}{\cancel{h}}=-۴$$

۲- اگر $f(x)=x^{۲}$، $f'(۳)$ را به دو روش به دست آورید.

پاسخ: روش اول:

$$f(۳)=۹$$

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(h+۳)^{۲}-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^{۲}+۶h+۹-۹}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=۶$$

روش دوم: می‌دانیم $f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

۳- برای تابع $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$، $f'(۸)$ را به دو روش حساب کنید.

روش اول:

$$f(۸)=-(۸)^{۲}+۱۰(۸)=-۶۴+۸۰=۱۶$$

$$f'(۸)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۸+h)-f(۸)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-(۸+h)^{۲}+۱۰(۸+h)-۱۶}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{-(۶۴+h^{۲}+۱۶h)+۸۰+۱۰h-۱۶}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-h^{۲}-۶h}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(-(h+۶))=-۶$$

روش دوم:

$$f'(۸)=\lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-x^{۲}+۱۰x-۱۶}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{-\cancel{(x-۸)}(x-۲)}{\cancel{x-۸}}=-۶$$

۴- اگر $f(x)=۳x^{۲}-۲x+۱$، $f'(۲)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

پاسخ: ابتدا شیب خط مماس را به کمک فرمول حدی مشتق به دست می‌آوریم:

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\xrightarrow{f(۲)=۹}\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^{۲}-۲x+۱-۹}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(۳x+۴)=۱۰$$

$$\begin{cases}(۲,۹)\\ m=۱۰\end{cases}\Rightarrow y-۹=۱۰(x-۲)\Rightarrow y=۱۰x-۱۱ \quad \text{معادله خط مماس}$$

۵- اگر $f(x) = x^{۳} - ۲$ ، $f'(-۱)$ را به کمک تعریف مشتق به دست آورید.

پاسخ:

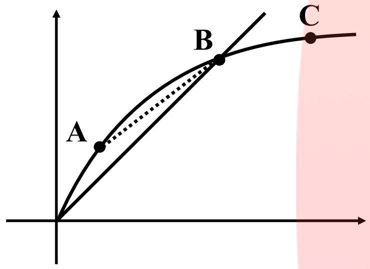
$$f(-۱) = (-۱)^{۳} - ۲ = -۳$$

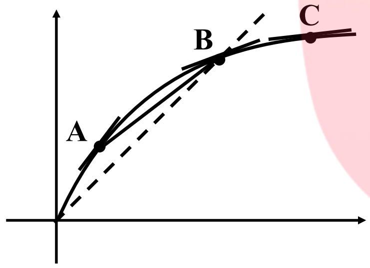
$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x) - f(-۱)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^{۳} - ۲ - (-۳)}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^{۳} + ۱}{x + ۱}$$

$$\lim_{x \to -۱} \frac{\cancel{(x+۱)}(x^{۲} - x + ۱)}{\cancel{x+۱}} = \lim_{x \to -۱} (x^{۲} - x + ۱) = ۳$$

تیپ دوم: محاسبه شیب از روی نمودار

۶- برای نمودار $y = f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده‌شده از (الف) تا (ج) را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.





الف) شیب نمودار در نقطه A : پاسخ: $m_{۱}$

ب) شیب نمودار در نقطه B : پاسخ: $m_{۲}$

پ) شیب نمودار در نقطه C : پاسخ: $m_{۳}$

ت) شیب خط AB : پاسخ: $m_{۴}$

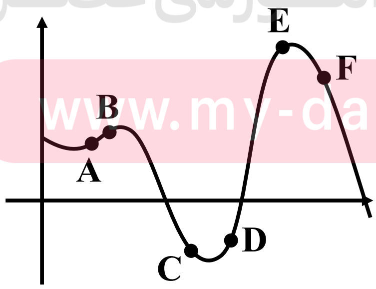
ث) شیب خط $y = ۲$: پاسخ: $m_{۵} = ۰$

ج) شیب خط $y = x$: پاسخ: $m_{۶} = ۱$

با توجه به نمودار شیب در نقطه A بیشتر از سایر نقاط می‌باشد و ترتیب قرارگیری به صورت زیر است:

$$m_{۱} > m_{۶} > m_{۴} > m_{۲} > m_{۳} > m_{۵}$$

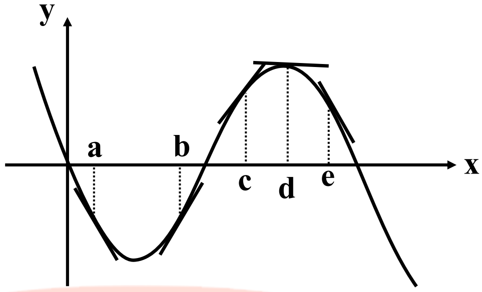
۷- نقاط داده‌شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه‌شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
F	-۳
C	-۱
E	۰
A	$\frac{۱}{۲}$
B	۱
D	۲

پاسخ: با توجه به نمودار شیب در نقطه D از شیب در نقطه B تند است پس عدد ۲ را برای D انتخاب می‌کنیم. هم‌چنین در نقطه F با سرعت بیشتری نسبت به نقطه C در حال نزول هستیم.

۸- با در نظر گرفتن نمودار F در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c، d و e را با مشتق‌های داده‌شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵
e	−۲

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم خط مماس در نقطه d موازی محور xهاست پس مشتق در آن نقطه برابر صفر است و شیب خط مماس در نقطه c تندتر از شیب در نقطه b می‌باشد و هم‌چنین در نقطه e با شیب تندتری در حال نزول هستیم.

۹- نقاطی مانند A، B، C، D، E، F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید. به طوری که:

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن نقطه منفی است.

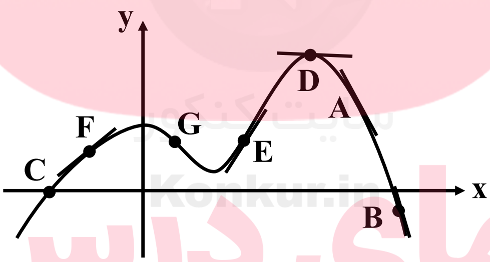
پ) C نقطه‌ای روی نمودار است که مقدار تابع در آن‌جا صفر است ولی مقدار مشتق در آن نقطه مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آن‌جا صفر است.

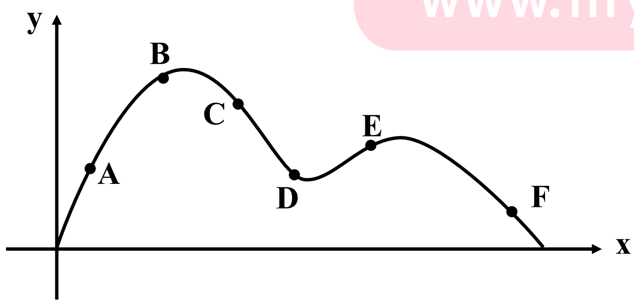
ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی نمودار هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آن‌جا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

پاسخ:



۱۰- نقاط A، B، C، D، E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) شیب منحنی در همه نقاط مثبت است.

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه C، D و F منفی است.

ب) $m_A < m_B$

پاسخ: نادرست ـ (شیب در نقطه A از نقطه B تندتر است.)

پ) $m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

ت) شیب منفی در نقاط F، D و C منفی است.

پاسخ: درست

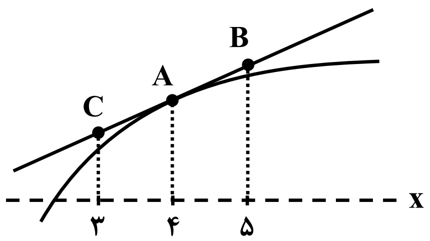
ث) $m_F < m_D < m_C$

پاسخ: (شیب در نقطه D کندتر از نقطه C است.)

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$

پاسخ: درست

۱۱- برای تابع f در شکل زیر داریم: $f'(۴)=۱/۵$, $f(۴)=۲۵$ ، با توجه به شکل مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.



پاسخ: با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم شیب خطی که از نقاط A ، B و C عبور می‌کند برابر است. مشتق در نقطه $x=۴$ یعنی $f'(۴)$.

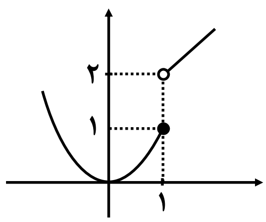
$$m=f'(۴)=۱/۵=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}\Rightarrow\frac{y_B-۲۵}{۵-۴}=۱/۵\rightarrow y_B=۲۶/۵\rightarrow B(۵,۲۶/۵)$$

$$۱/۵=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}\Rightarrow\frac{۲۵-y_C}{۴-۳}=۱/۵\rightarrow y_C=۲۳/۵\rightarrow C=(۳,۲۳/۵)$$

تیپ سوم: مشتق‌پذیری و پیوستگی

۱۲- تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ در نظر می‌گیریم. چرا $g'(۱)$ موجود نیست.

پاسخ: با توجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که حدهای چپ و راست تابع در نقطه $x=۱$ با هم برابر نیستند. پس تابع پیوسته نیست و مشتق هم ندارد.



۱۳- نشان دهید مشتق تابع $f(x)=|x^۲-۱|$ در نقطه $x=-۱$ موجود نیست.

پاسخ:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|-۰}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{|x^۲-۱|}{x+۱}$$

$$\text{حد راست}:\ \lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}{\cancel{x+۱}}=\lim_{x\to(-۱)^+}(x-۱)=-۲$$

$$\text{حد چپ}:\ \lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x^۲-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{-(x-۱)(x+۱)}{x+۱}=\lim_{x\to(-۱)^-}-(x-۱)=+۲$$

مشاهده می‌کنیم مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نیستند پس $f'(-۱)$ موجود نیست.

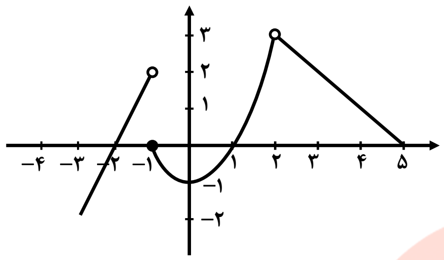
۱۳- مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

پاسخ: تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است. هرگاه f روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است، هرگاه f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد.

۱۴- تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & -۲\le x\le ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. چرا تابع f در بازه $[۱,۲]$ مشتق‌پذیر نیست؟

پاسخ: زیرا با این‌که روی بازه $(۱,۲)$ مشتق‌پذیر است، اما در $x=۱$ پیوستگی راست ندارد. (حد راست با مقدار تابع برابر نیست)، پس در $x=۱$ مشتق راست ندارد.

۱۵- اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق‌پذیر f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.

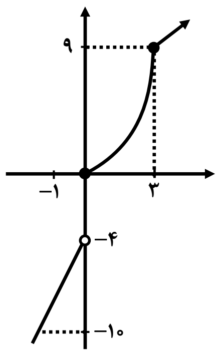


پاسخ: تابع در بازه $[-2,0]$ مشتق‌پذیر نیست. زیرا در $x=-1$ ناپیوسته است.
تابع در بازه‌ی $(2,5)$ مشتق‌پذیر است.
تابع در بازه $[-1,1]$ مشتق‌پذیر است.

۱۶- تابع $f(x)=\begin{cases} 5x-4 & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 3 \\ x+6 & x>3 \end{cases}$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

پاسخ:



ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

پاسخ:

$$f(0)=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x=0$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{5x-4-0}{x-0}=\frac{-4}{0^-}=+\infty$$

$\Rightarrow$ پیوسته نیست

$$f(3)=9$$

$$f'_+(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{x+6-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$$f'_-(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}(x+3)=6$$

$\Rightarrow$ مشتق چپ و راست با هم برابر نیست

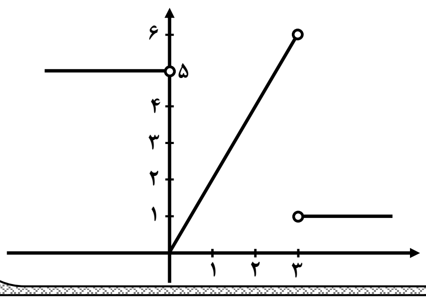
پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ: می‌دانیم در $x=0$ و $x=3$ مشتق‌پذیر نیست.

$$f'(x)=\begin{cases} 5 & x<0 \\ 2x & 0<x<3 \\ 1 & x>3 \end{cases}$$

ت) نمودار تابع مشتق را رسم کنید.

پاسخ:

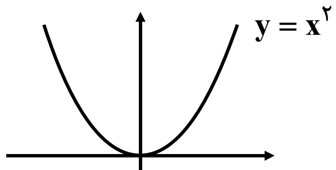


۱۷- نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن:

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

پاسخ:

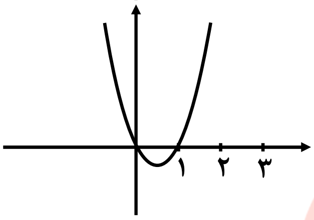
$y = x^2$



ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

پاسخ:

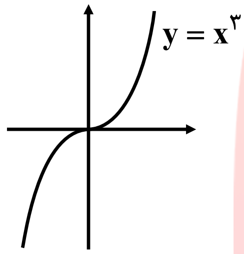
$$f(x) = x^2 - x$$
$$f'(x) = 2x - 1$$
$$f'(2) = 2(2) - 1 = 3$$



پ) در تمام نقاط مثبت شود.

پاسخ:

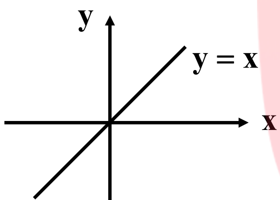
$y = x^3$



ت) در تمام نقاط یکسان شود.

پاسخ:

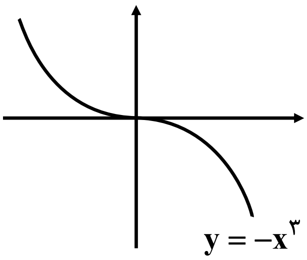
$y = x$



ث) در تمام نقاط منفی شود.

پاسخ:

$y = -x^3$



۱۸- مشتق‌پذیری تابع $f(x)\begin{cases} x^2+3 & x \ge 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

پاسخ:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+3) = 4$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2$$

حد چپ و راست در نقطه $x = 1$ برابر نیست. پس پیوسته نیست و مشتق هم در $x = 1$ ندارد.

۱۹- اگر $f(x) = |x^2 - 4|$، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیر f را در نقطه $x = -2$ بررسی کنید.

پاسخ:

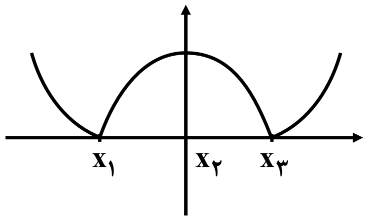
$$f'_+(-2) = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{-(x^2-4)-0}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} -(x-2) = +4$$

$$f'_-(-2) = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{(x^2-4)-0}{x+2} = \lim_{x\to(-2)^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4$$

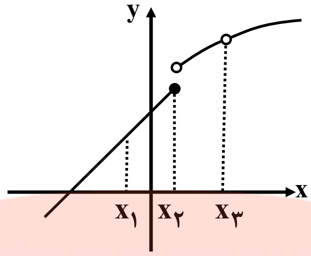
مشاهده می‌کنیم مشتق چپ و راست با هم برابر نیست پس تابع f در $x=-2$ مشتق ندارد.

۲۰- در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص‌شده، مشتق‌پذیر نیست.

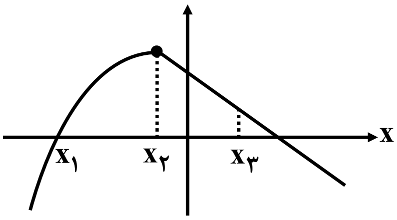
پاسخ:



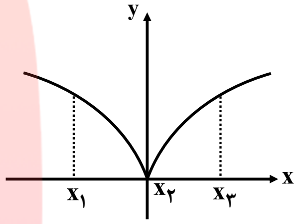
در x_1 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه‌ای



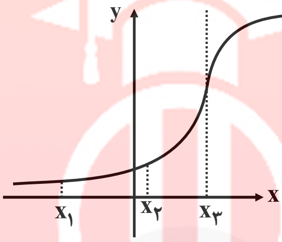
در x_2 و x_3 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط ناپیوسته



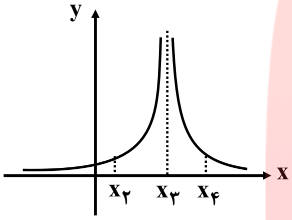
در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
نقاط گوشه



در x_2 مشتق‌پذیر نیست.
مشتق نامتناهی



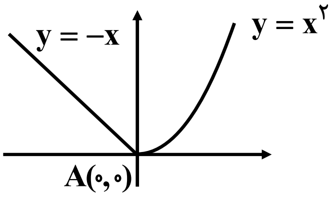
در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(مشتق نامتناهی)



در x_3 مشتق‌پذیر نیست.
(نقطه ناپیوستگی)

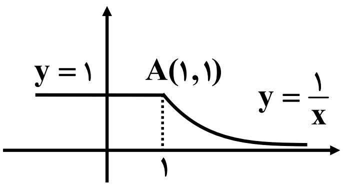
۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده‌شده در نقطه A، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیرنیستند.

پاسخ:



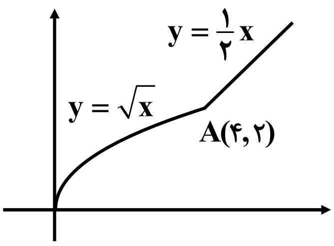
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(0)=0\\ f'_-(0)=-1\end{cases}\qquad f'_+(0)\neq f'_-(0)$$



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\geq 1\\ 1 & x<1\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & x>1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=-1\ ,\ f'_-(1)-0\rightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

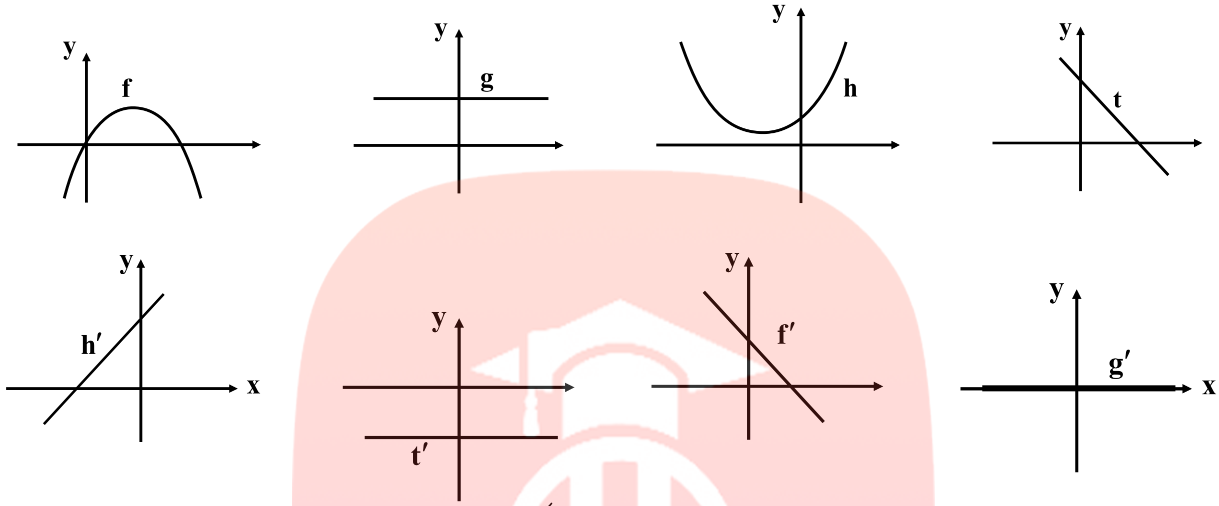


$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x & x\geq 4\\ \sqrt{x} & x<4\end{cases}\rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x>4\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x<4\end{cases}$$

$$f'_+(4)=\frac{1}{2}\ ,\ f'_-(4)=\frac{1}{4}\rightarrow f'_+(4)\neq f'_-(4)$$

۲۲- نمودار توابع f ، g ، h و t را به نمودار مشتق آن‌ها نظیر کنید.

پاسخ:



۱) اگر نمودار تابع اصلی صعودی باشد، نمودار مشتق آن بالای محور x ها قرار می‌گیرد.
۲) اگر نمودار تابع اصلی نزولی باشد، نمودار مشتق آن پایین محور x ها قرار می‌گیرد.
۳) اگر نمودار تابع اصلی قله یا دره داشته باشد، در نمودار مشتق، آن نقاط محل برخورد با محور x ها می‌شود.

تیپ چهارم: محاسبه مشتق توابع

۲۳- مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $f(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1$

$$f'(x)=5x^4+12x^2-\sqrt{2}$$

۲) $f(x)=(2x^3+1)(-x^2+7x-2)$

$$f'(x)=(6x^2)(-x^2+7x-2)+(2x^3+1)(-2x+7)$$

۳) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x+1}$

$$f'(x)=\frac{(2x)(3x+1)-(3)(x^2-4)}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x+12}{(3x+1)^2}$$

۴) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$

$$f'(x)=\frac{0(x-4)-(1)(1)}{(x-4)^2}=\frac{-1}{(x-4)^2}$$

۵) $f(x)=\left(\dfrac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

$$f'(x)=8\left(\frac{-3(x^2+5)-(2x)(-3x-1)}{(x^2+5)^2}\right)\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^7$$

۶) $f(x)=\dfrac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

$$f'(x)=\frac{(۱)(۲x^{۲}+x-۱)-(۴x+۱)(x)}{(۲x^{۲}+x-۱)^{۲}}$$

۷) $f(x)=(۳x^{۲}-۴)(۲x-۵)^{۲}$

$$f'(x)=(۶x)(۲x-۵)^{۲}+(۳x^{۲}-۴)(۲(۲)(۲x-۵)^{۱})=(۲x-۵)(۲۴x^{۲}-۳۰x-۱۶)$$

۸) $f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$

$$f'(x)=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^{۳}+۱)+(\sqrt{۳x+۲})(۳x^{۲})$$

۹) $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۱}{-۳x+۲}$

$$f'(x)=\frac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^{۲}-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^{۲}}=\frac{-۳x^{۲}+۴x-۳}{(-۳x+۲)^{۲}}$$

۱۰) $f(x)=\dfrac{۹x-۲}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{۹(\sqrt{x})-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^{۲}}$$

۲۴- اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$(f.g)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲).g'(۲)=۵\times۸+۳\times(-۶)=۴۰-۱۸=۲۲$$

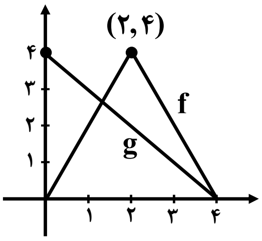
$$(\frac{f}{g})'(۲)=\frac{f'(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{(g(۲))^{۲}}=\frac{۵\times۸-۳\times(-۶)}{۸^{۲}}=\frac{۴۰+۱۸}{۶۴}=\frac{۲۹}{۳۲}$$

۲۵- اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$.

پاسخ:

$$(f+g)'(۱)=f'(۱)+g'(۱)=۳+۵=۸$$

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۳(۳)+۲(۵)=۹+۱۰=۱۹$$



۲۶- نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x)=f(x)-g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(۱)$، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

پاسخ:

ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌نویسیم:

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[۲,۴]$: $mf=\dfrac{۰-۴}{۴-۲}=-۲=f'(x)\ ,\ y-۰=(-۲)(x-۴)\Rightarrow y=-۲x+۸$

ضابطه تابع f برای بازه‌ی $[۰,۲]$: $mf=\dfrac{۴-۰}{۲-۰}=۲=f'(x)\Rightarrow y-۰=۲(x-۰)\Rightarrow y=۲x$

ضابطه تابع g: $mg=\dfrac{۰-۴}{۴-۰}=-۱\rightarrow y-۰=(-۱)(x-۴)\Rightarrow y=-x+۴$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}-۲x+۸ & ۲\le x\le ۴\\ ۲x & ۰\le x\le ۲\end{cases}\ ,\ g(x)=-x+۴$$

$f(۱)=۲$ $f'(۱)=۲$ $g(۱)=۳$ $g'(۱)=-۱$

$f(۲)=۴$ $f'_+(۲)=-۲\ ,\ f'_-(۲)=۲$ $g(۲)=۲$ $g'(۲)=-۱$

$f(۳)=۲$ $f'(۳)=-۲$ $g(۳)=۱$ $g'(۳)=-۱$

$h'(۱)=f'(۱).g(۱)+f(۱).g'(۱)=۲\times۳+(-۱)\times۲=۴$

$$h'(۲)=\begin{cases}f'_+(۲).g(۲)+f(۲).g'(۲)=(-۲)\times۲+۴(-۱)=-۸\\ f'_-(۲).g(۲)+f(۲).g'(۲)=۲\times۲+۴(-۱)=۰\end{cases}$$

در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست

$h'(۳)=f'(۳).g(۳)+f(۳).g'(۳)=(-۲)\times۱+۲(-۱)=-۴$

$$k'(۱)=\frac{f'(۱).g(۱)-g'(۱)f(۱)}{g^۲(۱)}=\frac{۲\times۳-۲\times(-۱)}{۳^۲}=\frac{۸}{۹}$$

$$k'_+(۲)=\frac{f'_+(۲).g(۲)-g'(۲)f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{-۲\times۲-۴(-۱)}{۲^۲}=\frac{۰}{۴}=۰$$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

$$k'_-(۲)=\frac{f'_-(۲).g(۲)-g'(۲).f(۲)}{g^۲(۲)}=\frac{۲\times۲-۴(-۱)}{۴}=۲$$

$$k'(۳)=\frac{f'(۳).g(۳)-g'(۳).f(۳)}{g^۲(۳)}=\frac{-۲\times۱-۲\times(-۱)}{۱^۲}=۰$$

تیپ پنجم: آهنگ تغییر

۲۷- با توجه به تابع رشد ($f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$) به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) آهنگ متوسط رشد، در بازه زمانی [۰,۲۵] چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\begin{matrix} f(۲۵)=۷\sqrt{۲۵}+۵۰=۸۵ \\ f(۰)=۷(\sqrt{۰})+۵۰=۵۰ \end{matrix} \Rightarrow \frac{f(۲۵)-f(۰)}{۲۵-۰}=\frac{۸۵-۵۰}{۲۵}=\frac{۳۵}{۲۵}=۱/۴$$

ب) آهنگ لحظه‌ای تغییر قد کودک را در ۲۵ ماهگی و ۴۹ ماهگی، با هم مقایسه کنید. کدام‌یک بیشتر است؟

پاسخ: برای به دست آوردن آهنگ لحظه‌ای باید از تابع مشتق بگیریم:

$$f'(x)=۷\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}=\frac{۷}{۲\sqrt{x}}\Rightarrow f'(۲۵)=\frac{۷}{۲\sqrt{۲۵}}=\frac{۷}{۱۰}\ ,\ f'(۴۹)=\frac{۷}{۲\sqrt{۴۹}}=\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۱۰}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=۲۵$ بیشتر است.

۲۸- ارتفاع یک جسم از سطح زمین از معادله $h(t)=-۵t^۲+۴۰t$ به دست می‌آید.

الف) سرعت جسم هنگام پرتاب و هنگام برخورد به زمین را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا زمان برخورد به زمین را به دست می‌آوریم:

$$h(t)=۰\Rightarrow -۵t^۲+۴۰t=۰\Rightarrow -۵t(t-۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}t=۰\\t=۸\end{cases}$$

برای به دست آوردن معادله سرعت، کافی است از معادله $h(t)$ نسبت به t مشتق بگیریم:

$$V_{(t)}=-۱۰t+۴۰\Rightarrow\begin{cases}V(۰)=-۱۰(۰)+۴۰=۴۰\\V(۸)=-۱۰(۸)+۴۰=-۴۰\end{cases}$$

ب) لحظاتی را معلوم کنید که سرعت جسم $۳۵\frac{m}{s}$ و $-۳۵\frac{m}{s}$ است.

پاسخ:

$$V=-۱۰t+۴۰\Rightarrow\begin{cases}-۱۰t+۴۰=۳۵\rightarrow -۱۰t=-۵\rightarrow t=\frac{۱}{۲}\\-۱۰t+۴۰=-۳۵\rightarrow -۱۰t=-۷۵\rightarrow t=۷/۵\end{cases}$$

۲۹- جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۲	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را:

الف) از ساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به دست آورید.

پاسخ:

$$T(۸)=۱۱\ ,\ T(۱۲)=۱۹\Rightarrow\frac{۱۹-۱۱}{۱۲-۸}=\frac{۸}{۴}=۲$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به دست آورید.

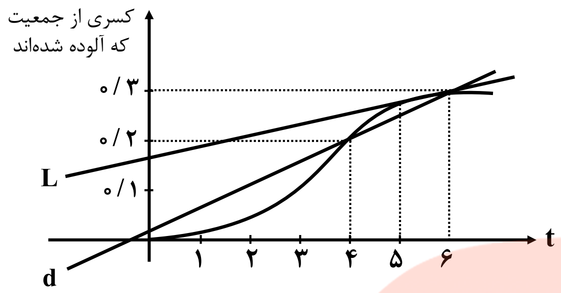
پاسخ:

$$T(۱۲)=۱۹\ ,\ T(۱۸)=۹\rightarrow\frac{۹-۱۹}{۱۸-۱۲}=-۱/۷$$

مشاهده می‌کنیم از ساعت ۸ تا ۱۲ به طور متوسط هوا گرم‌تر می‌شود. از ساعت ۱۲ تا ۱۸ به طور متوسط هوا سردتر می‌شود.

۳۰- کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند برحسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط L و d چه چیزی را نشان می‌دهند؟



پاسخ: در هفته سوم آهنگ آلوده شدن از هفته ششم بیشتر است. یعنی هر چه زمان بیشتر گذشته شود، جمعیت کم‌تری از شهر آلوده شدند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=۱$ و $t=۲$ یا $t=۳$ بیشتر است؟

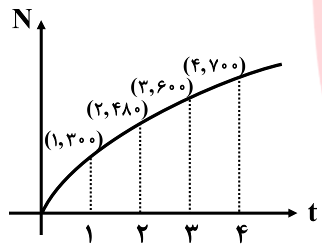
پاسخ: در $t=۳$ شیب خط مماس بیشتر است.

پ) قسمت (ب) را برای $t=۴$، $t=۵$ و $t=۶$ بررسی کنید.

پاسخ: در $t=۶$ از همه کم‌تر است.

۳۱- نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از ضرب t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.

الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی t از صفر تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳ و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به دست آورید.



پاسخ:

$$\frac{N(۱)-N(۰)}{۱-۰}=\frac{۳۰۰-۰}{۱}=۳۰۰\ ,\ \frac{N(۲)-N(۱)}{۲-۱}=\frac{۴۸۰-۳۰۰}{۱}=۱۸۰$$

$$\frac{N(۳)-N(۲)}{۳-۲}=\frac{۶۰۰-۴۸۰}{۱}=۱۲\ ,\ \frac{N(۴)-N(۳)}{۴-۳}=\frac{۷۰۰-۶۰۰}{۱}=۱۰۰$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

پاسخ: چون شب مماس‌ها کم می‌شود. (چون آهنگ لحظه‌ای در حال کاهش است) (تقعر روی به پایین است.)

۳۲- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^۲-t+۱۰$ برحسب متر در بازه زمانی $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[۰,۵]$ با هم برابرند؟

پاسخ:

$$\text{سرعت متوسط} \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۱۰ \\ f(۵)=۵^۲-۵+۱۰=۳۰ \end{cases} \Rightarrow \text{سرعت متوسط}=\frac{۳۰-۱۰}{۵-۰}=۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} : f'(t)=۲t-۱ \Rightarrow \text{سرعت لحظه‌ای} = \text{سرعت متوسط}$$

$$۲t-۱=۴ \rightarrow t=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

۳۳- توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول روبه‌رو نمایش داده شده است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

t ثانیه	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ m متر	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) ۱/۲۳

ب) ۱۴/۹۱

پ) ۱۱/۵

ت) ۱۶/۰۳

پاسخ: برای این‌که سرعت توپ را در $t=۰/۴$ به دست آوریم می‌توانیم میانگین سرعت متوسط را در بازه‌های $[۰/۳,۰/۴]$ و $[۰/۴,۰/۵]$ به دست آوریم.

$$۱)\ \frac{f(۰/۵)-f(۰/۴)}{۰/۵-۰/۴}=\frac{۱۷/۴-۱۶/۳}{۰/۱}=\frac{۱/۱}{۰/۱}=۱۱$$

$$۲)\ \frac{f(۰/۴)-f(۰/۳)}{۰/۴-۰/۳}=\frac{۱۶/۳-۱۵/۱}{۰/۱}=\frac{۱/۲}{۰/۱}=۱۲$$

$$\text{میانگین}=\frac{۱۱+۱۲}{۲}=۱۱/۵$$

۳۴- کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰,۱]$ همیشه کم‌تر از شیب منحنی در نقطه است.

پاسخ: نادرست است. زیرا تابع $y=x^۳$ و از $(۰,۰)$ و $(۱,۱)$ می‌گذرد.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط}=\frac{f(۱)-f(۰)}{۱-۰}=\frac{۱-۰}{۱-۰}=۱$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای}: f'(x)=۳x^۲\rightarrow f(۰)=۰$$

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پاسخ: نادرست است. تابعی مانند $y=\sqrt{x}$ تابعی صعودی است و آهنگ تغییر متوسطش همواره نزولی است. (تقعرش رو به پایین است.)

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(\alpha)=۰$ و $f(\alpha)=۰$

پاسخ: نادرست است. تابع $y=x^۳$ در نظر بگیرید.

$$f(۰)=۰$$

$$f'(x)=۳x^۲\rightarrow f'(۰)=۰$$

۳۵- یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $۳\le t\le ۴$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

پاسخ:

$$m(۴)=\sqrt{۴}+۲\times۴^۳=۱۳۰$$
$$m(۳)=\sqrt{۳}+۲\times۳^۳=۵۵/۷$$
$$\Rightarrow ۱۳۰-۵۵/۷=۷۴/۳$$

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=۳$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۶t^۲\rightarrow m'(۳)=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۶(۳)^۲=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+۵۴$$

۳۶- گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر است. در لحظه $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به دست می‌آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$V(0)=40(1-\frac{0}{100})^2=40 \quad , \quad V(1)=40(1-\frac{1}{100})^2=39/204 \Rightarrow \bar{V}=\frac{39/204-40}{1-0}=-0/796$$

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

پاسخ:

$$V'=40\times 2(1-\frac{t}{100})\times(-\frac{1}{100})=\frac{-8}{10}(1-\frac{t}{100})$$

$$\begin{cases} V(0)=40 \\ V(100)=40\times(1-\frac{100}{100})^2=0 \end{cases} \Rightarrow \bar{V}=\frac{0-40}{100-0}=-\frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{10}+\frac{0/8t}{100}=-\frac{4}{10} \Rightarrow \frac{8t}{1000}=\frac{4}{10} \Rightarrow t=50$$