سوالات مربوط به بخش پذیری

۱- چند جمله‌ای $g(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر $x+۱$ بخش پذیر است؟ با انجام تقسیم درستی ادعای خود را بررسی کنید:

$$\begin{array}{l|l} ۲x^۳+x^۲+۱ & x+۱ \\ \hline -(۲x^۳+۲x^۲) & ۲x^۲-x+۱ \\ -x^۲+۱ & \\ -(x^۲-x) & \\ +x+۱ & \\ -(x+۱) & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow g(x)=(x+۱)(۲x^۲-x+۱)$$

راه دوم: برای بدست آوردن باقی‌مانده در یک تقسیم می‌توانیم ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم.

$$x+۱=۰ \to x=-۱$$

$$\Rightarrow g(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۳+۱=۰$$

چون باقی‌مانده برابر صفر شده پس $g(x)$ بر $x+۱$ بخش پذیر است.

۲- نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر دو جمله‌ای $x+۲$ بخش پذیر است؟

$$x+۲=۰ \to x=-۲$$

$$\Rightarrow f(-۲)=۲(-۲)^۳+۵(-۲)^۲-۳(-۲)-۱۰=-۱۶+۲۰+۶-۱۰=۰$$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده $=۰$

پس $f(x)$ بر $x+۲$ بخش پذیر است.

۳- نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است.

$$x+۱=۰ \to x=-۱$$

$$\Rightarrow f(-۱)=۲(-۱)^۳+(-۱)^۲+۱=-۲+۱+۱=۰$$

سوالات مربوط به حد توابع کسری(حالت $\frac{۰}{۰}$)

۱- حد تابع $g(x)=\dfrac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ را در نقطه به طول $x=۵$ بدست آورید.

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}$$

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\overset{-۱}{\cancel{۵-x}}}{(\cancel{x-۵})(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۲+۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۲- حد های زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\displaystyle\lim_{x\to(-۳)}\frac{x^۲-۹}{x^۲+۳x}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to(-۳)}\frac{(x-۳)(x+۳)}{x(x+۳)}=\lim_{x\to(-۳)}\frac{x-۳}{x}=\frac{-۶}{-۳}=+۲$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}} \dfrac{۴x^۲-۴x+۱}{۲x^۲+x-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\dfrac{(x-\frac{۱}{۲})(۴x-۲)}{(x-\frac{۱}{۲})(۲x+۲)}=\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\dfrac{۴x-۲}{۲x+۲}=\dfrac{۰}{۳}=۰$

پ) $\lim\limits_{x\to ۳} \dfrac{x^۲-۵x+۶}{۲x^۳-۱۳x^۲+۲۴x-۹}=\dfrac{۰}{۰}$

مخرج را بر عامل صفر شونده یعنی $(x-۳)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l}
۲x^۳-۱۳x^۲+۲۴x-۹ & x-۳ \\ \hline
-(۲x^۳-۶x^۲) & ۲x^۲-۷x+۳ \\ \hline
-۷x^۲+۲۴x-۹ & \\
-(-۷x^۲+۲۱x) & \\ \hline
+۳x-۹ & \\
-(+۳x-۹) & \\ \hline
۰ &
\end{array}$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x-۳)(x-۲)}{(x-۳)(۲x^۲-۷x+۳)}=\dfrac{۱}{۰}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{(x-۲)}{۲x^۲-۷x+۳}=\dfrac{۱}{۰^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{(x-۲)}{۲x^۲-۷x+۳}=\dfrac{۱}{۰^-}=-\infty\end{cases}$$

ت) $\lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}=\dfrac{۰}{۰}$

$$\lim\limits_{x\to(-۱)}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x+\sqrt{۲x+۳}}\times\dfrac{x-\sqrt{۲x+۳}}{x-\sqrt{۲x+۳}}=\lim\limits_{x\to(-۱)}\dfrac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-(۲x+۳)}=$$

$$\lim\limits_{x\to(-۱)}\dfrac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x+۱)(x-۳)}=\dfrac{(-۲)(-۲)}{(-۴)}=\dfrac{۴}{-۴}=-۱$$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}\times\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-x}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}$

$$=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\dfrac{۱}{(۳)(۲)}=\dfrac{۱}{۶}$$

ج) $\lim\limits_{x\to(-۱)} \dfrac{\sqrt[۳]{x}+۱}{x^۲+۳x+۲}\times \times\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)}\dfrac{(x-۱)}{(x+۱)(x+۲)(\sqrt[۳]{x^۲}-\sqrt[۳]{x}+۱)}=\dfrac{۱}{۳}$

۳- حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}} \dfrac{۲x^۲-x}{۴x^۲-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\dfrac{x(۲x-۱)}{(۲x-۱)(۲x+۱)}=\dfrac{\frac{۱}{۲}}{۲}=\dfrac{۱}{۴}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{x^۳-۴x^۲-۴x-۵}{x^۲-۲۵}=\dfrac{۰}{۰}$

عامل صفر کنید $(x-5)$ می‌باشد پس باید صورت را بر $x-5$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{l|l} x^3-4x^2-4x-5 & x-5 \\ \hline -(x^3-5x^2) & x^2+x+1 \\ \hline x^2-4x-5 & \\ -(x^2-5x) & \\ \hline x-5 & \\ -(x-5) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+x+1)}{(x-5)(x+5)}=\frac{25+5+1}{5+5}=\frac{31}{10}$$

پ) $\displaystyle \lim_{x\to(-4)}\frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}=\lim_{x\to(-4)}\frac{(x+4)(x-1)}{x^2(x+4)+x+4}=\lim_{x\to(-4)}\frac{(x+4)(x-1)}{(x+4)(x^2+1)}=\frac{-5}{17}$

۴- حد های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x(x-1)}\times\frac{x+\sqrt{2x-1}}{x+\sqrt{2x-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(2x-1)}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}$

$\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=0$

ب) $\displaystyle \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)}$

$=-(6)(2+2)=-24$

پ) $\displaystyle \lim_{x\to -8}\frac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to(-8)}\frac{2(x+8)}{\sqrt[3]{x}+2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$

$\displaystyle \lim_{x\to(-8)}=\frac{2(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{(x+8)}=2(4+2\times2+4)=24$

سوالات مربوط به حد های نامتناهی

۱- حد های زیر را بدست آورید.

الف) $\displaystyle \lim_{x\to 5^-}\frac{2x}{x-5}=\frac{+10}{0^-}=-\infty$

ب) $\displaystyle \lim_{x\to 5^+}\frac{2x}{x-5}=\frac{+10}{0^+}=+\infty$

پ) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\Rightarrow \begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(0^+)^2}=+\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(0^-)^2}=+\infty\end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2}{|x-3|} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{2}{|x-3|}=\dfrac{2}{|0^+|}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2}{|x-3|}=\dfrac{1}{|0^-|}=+\infty \end{cases}$

ث) $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\dfrac{[x]}{|3x+1|} \xrightarrow{\left[-\frac{1}{3}\right]=-1} \lim\limits_{x\to(-\frac{1}{3})}\dfrac{-1}{|3x+1|}=\dfrac{-1}{|0|}=-\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sin^2 x} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{\sin^2 x}=\dfrac{+1}{(0^+)^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{\sin^2 x}=\dfrac{+1}{(0^-)^2}=+\infty \end{cases}$

۲- حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{|x|} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{|0^+|}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{|x|}=\dfrac{1}{|0^-|}=+\infty \end{cases}$

ت) $\lim\limits_{x\to(-6)}\dfrac{9}{(x+6)^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to(-6)^+}\dfrac{9}{(x+6)^2}=\dfrac{9}{(0^+)^2}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-6)^-}\dfrac{9}{(x+6)^2}=\dfrac{9}{(0^-)^2}=+\infty \end{cases}$

ث) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-1}{(x-3)^4} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-1}{(x-3)^4}=\dfrac{-1}{(0^+)^4}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-1}{(x-3)^4}=\dfrac{-1}{(0^-)^4}=-\infty \end{cases}$

ج) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{4x+1}{(2x+1)^2} \Rightarrow \dfrac{-1}{(0)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

چ) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{1-5x}{x^2-9}=\dfrac{-14}{0^+}=-\infty$

ح) $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{-3x}{x^2-4}=\dfrac{+6}{0^+}=+\infty$

خ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{1}{\cos x} \xrightarrow[(\cos x<0)\ \text{ربع دوم}]{x\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{1}{0^-}=-\infty$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x \xrightarrow[\tan x>0 \text{ پس }]{x\to\frac{\pi}{2}^- \text{ در ناحیه اول است}} +\infty$

ذ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x \xrightarrow[\tan x<0 \text{ پس }]{x\to\frac{\pi}{2}^+ \text{ در ناحیه دوم است}} -\infty$

ر) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{2-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-1}{x-3} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

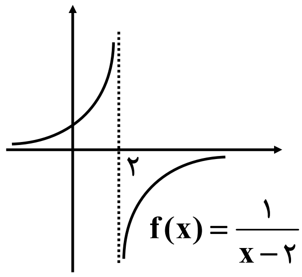
۳- الف) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر کوچکتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر است.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟

حد تابع $f(x)$ وقتی که x از مقادیر بزرگتر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر است.

پ) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند.



$f(x) = \frac{1}{x-2}$

سوالات مربوط به حد در بی‌نهایت

۱- مقدار حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x+2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3x+2}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{2}{x})}{\lim\limits_{x\to-\infty} (1) - \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{x})} = \frac{3+0}{1-0}$$

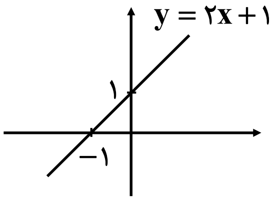
ب) $$\lim_{t\to-\infty} \frac{1-5t^2}{t^2+3t} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1-5t^2}{t^2}}{\frac{t^2+3t}{t^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{t^2}-5}{1+\frac{3}{t}} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{1}{t^2}) - \lim\limits_{x\to-\infty} (5)}{\lim\limits_{x\to-\infty} (1) + \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{3}{t})} = \frac{0-5}{1+0} = -5$$

پ) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2-3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2-3x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2}{x}) - \lim\limits_{x\to+\infty} (3)} = \frac{0}{0-3} = 0$$

۲- با توجه به نمودار هر تابع طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

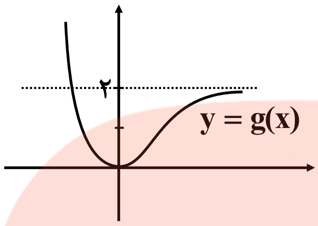
$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۱)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+۱)=-\infty$$



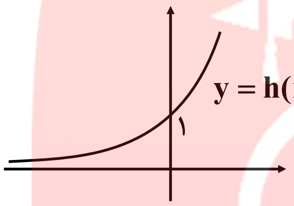
$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=۲$$



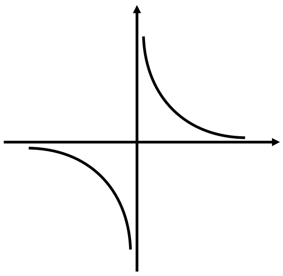
$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=۰$$

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$



۳- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را بدست آورید.

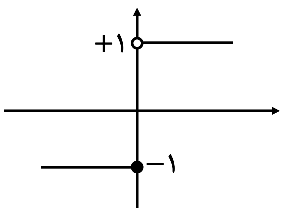
الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$: $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ $\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)$ $\quad\lim_{x\to۰}f(x)$



$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=۰ \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=۰$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to۰^+}f(x)=+\infty\\ \lim_{x\to۰^-}f(x)=-\infty\end{cases}$$

ب) $g(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$ $\quad\lim_{x\to-\infty}g(x),\ \lim_{x\to+\infty}g(x)$

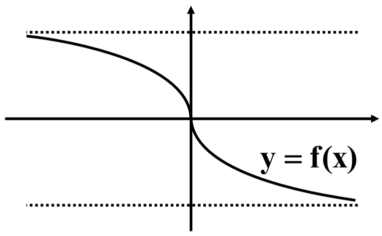


$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-۱,\quad \lim_{x\to+\infty}g(x)=+۱$$

۴- با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.

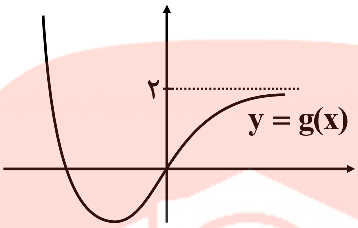
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ ۲

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ۰



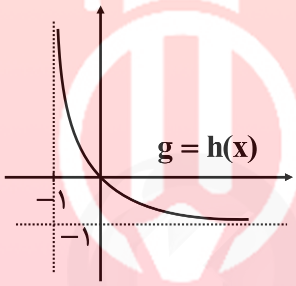
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$ ۲

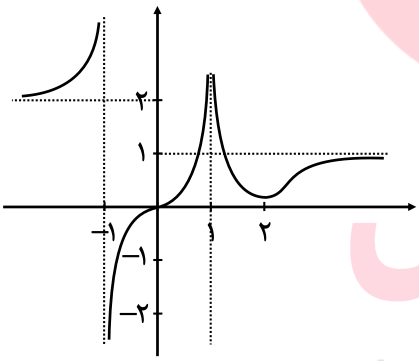


$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-$۲

$\lim\limits_{x\to(-۱)^+} h(x)=+\infty$



۵- نمودار تابع f به شکل زیر است. حدود خواسته شده را بنویسید.



۱) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ ۲

۲) $\lim\limits_{x\to(-۱)} f(x)=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=-\infty$

۴) $\lim\limits_{x\to۱^-} f(x)=+\infty$

۵) $\lim\limits_{x\to۱^+} f(x)=+\infty$

۶) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ۱

۶- حدود زیر را محاسبه کنید:

۱) $\lim\limits_{x\to-\infty}(۹+\frac{۷}{x^۳})=۹+۰=۹$

۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳+۷x^۲-۶)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{۱}{۲}x^۳)=-\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۱}{۲x-۳})=\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۱}{۲x})=۰$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{۳+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۴}{x}-۵}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳+\frac{۱}{x^۲})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۴}{x}-۵)}=\frac{۳}{-۵}=\frac{-۳}{۵}$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{۲x-۱}{۳x+۱}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{۲x}{۳x}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳x)}=\dfrac{۲}{۳}$

۶) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۵x-۳}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۲)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۲)}=۲$

۷) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{۲x^۵-۶x^۳-x}{x^۲-۵x+۱}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۵)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^۲)}=\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۳)=-\infty$

۸) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^۲+x}{۳-x}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(x^۲)}{\lim\limits_{x\to\infty}(-x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

۹) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to-\infty}(-۶x^۳)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x^۳)}=\dfrac{-۶}{۲}=-۳$

۷- الف) هر یک از رابطه‌های $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$ به چه معناست؟

اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به ۱− نزدیک کرد.

اگر x به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، تابع $f(x)$ را به هر اندازه دلخواه می‌توان به ۲ نزدیک کرد.

ب) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد.