



هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می گیرند را یک دنباله می نامیم . به هر کدام از اعداد ، جملات دنباله گفته می شود . به طور مثال در دنباله ی $2, 3, 5, 9, \dots$ اولین عدد را جمله اول نامیده و با نماد $t_1 = -2$ نمایش می دهیم ، به همین ترتیب $t_2 = 3$ و $t_3 = 5$ و ... خواهد بود .

بعضی مواقع جملات دنباله دارای یک الگو هستند و گاهی نیز الگوی خاصی ندارند . اگر بتوانیم الگوی جملات یک دنباله را بنویسیم ، آن را جمله ی عمومی دنباله می نامیم .

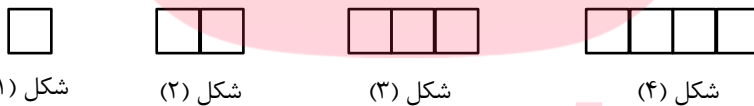
به عنوان نمونه در دنباله ی $1, 4, 9, 16, \dots$ ، هر جمله مربع کامل می باشد ، به این صورت که :

$$t_1 = 1^2 \text{ و } t_2 = 2^2 \text{ و } t_3 = 3^2 \text{ و } t_4 = 4^2 \text{ و } \dots \Rightarrow t_n = n^2$$

بنابراین $t_n = n^2$ را جمله ی عمومی دنباله در نظر می گیریم و می توانیم یک الگوی هندسی برای آن رسم کنیم :



مثال : در شکل زیر الگویی برای تعداد پاره خط های شکل n ام یافته و تعیین کنید صدمین شکل دارای چند پاره خط است ؟



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

شکل (۴)

روش اول : شکل را به صورت رو به رو در نظر بگیرید .
 شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

در شکل اول ۴ پاره خط داریم که در شکل دوم ۳ پاره خط به آن اضافه شده است .

اگر ۶ پاره خط (2×3) به شکل اول اضافه کنیم ، شکل سوم پدید می آید . و در صورتی که $3 \times 3 = 9$ پاره خط به شکل اول اضافه کنیم ،

شکل چهارم درست می شود . بنابراین :

www.my-dars.ir

$$t_1 = 4 \text{ , } t_2 = 4 + (1 \times 3) \text{ , } t_3 = 4 + (2 \times 3) \text{ , } t_4 = 4 + (3 \times 3) \Rightarrow t_n = 4 + ((n-1) \times 3)$$

که با ساده کردن آن خواهیم داشت : $t_n = 3n + 1$

روش دوم : شکل را به صورت رو به رو در نظر بگیرید .
 شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳) شکل (۴)

شکل اول به صورت $1 + (1 \times 3)$ ، شکل دوم $1 + (2 \times 3)$ ، شکل سوم $1 + (3 \times 3)$ و شکل چهارم $1 + (4 \times 3)$

می باشد . بنابراین جمله عمومی دنباله $t_n = 1 + (n \times 3) = 3n + 1$ خواهد بود . در نتیجه $t_{100} = 3 \times 100 + 1 = 301$



مثال: جمله ی عمومی دنباله $۲, ۹, ۲۸, ۶۵, \dots$ را تعیین کنید.

پاسخ: اگر از هر جمله یک واحد کم کنیم، آن جمله مکعب کامل خواهد شد $۱, ۸, ۲۷, ۶۴, \dots$.

بنابراین دنباله به صورت $\dots, ۴^۳ + ۱, ۳^۳ + ۱, ۲^۳ + ۱, ۱^۳ + ۱$ و جمله عمومی آن $a_n = n^۳ + ۱$ است.

مثال: چهار جمله ی نخست هر یک از دنباله های $a_n = (n-1)(n-2) + n^۳$ و $b_n = \frac{(-1)^n + 1}{n}$ را بنویسید.

پاسخ: در هر دنباله مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را جایگزین n کرده و جملات را محاسبه می کنیم.

$$a_n \rightarrow ۱, ۸, ۲۹, ۷۰, \dots \quad \text{و} \quad b_n \rightarrow ۰, ۱, ۰, \frac{۱}{۲}, \dots$$

مثال: اگر $a_{۳n+۱} = (-1)^n n^۵$ ، جمله هفتم دنباله را بنویسید.

پاسخ: برای تعیین $a_۷$ باید تساوی داده شده را به ازای $n = ۲$ محاسبه نمود. بنابراین $a_۷ = (-1)^۲ \times ۲^۵ = ۳۲$.

مثال: کدام جمله از دنباله $t_n = \frac{۲n-۱}{n+۳}$ برابر $\frac{۳}{۲}$ است؟

پاسخ: کفایت جمله عمومی را برابر $\frac{۳}{۲}$ قرار داده و معادله را حل کنیم تا شماره جمله (مقدار n) مشخص شود.

$$\frac{۲n-۱}{n+۳} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲ \times (۲n-۱) = ۳ \times (n+۳) \Rightarrow ۴n-۲ = ۳n+۹ \Rightarrow n=۱۱ \Rightarrow \text{جمله یازدهم جواب است.}$$

مثال: دنباله ای با جمله ی عمومی $x_n = ۲n - ۱۲$ دارای چند جمله ی منفی است؟

پاسخ: ۵ جمله ی منفی دارد $\Rightarrow ۵ \text{ یا } ۴ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۱ \Rightarrow n < ۶ \Rightarrow n < ۱۲ \div ۲ \Rightarrow ۲n - ۱۲ < ۰$

مثال: دنباله ی $y_n = n + \frac{۶}{n}$ دارای چند جمله از اعداد صحیح است؟

www.my-dars.ir

پاسخ: وقتی جمله صحیح است که $\frac{۶}{n}$ صحیح باشد، یعنی آن n هایی که عدد ۶ بر آنها بخش پذیر است باید در نظر گرفته شوند.

بنابراین n یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۶ می باشد. یعنی جملات اول، دوم، سوم و ششم صحیح هستند، پس چهار جمله آن صحیح است.

مثال: دنباله ی $u_n = ۳ + \frac{(-1)^n}{n+۱}$ را با نوشتن چند جمله ی نخست مشخص کرده سپس کوچکترین و بزرگترین جمله ی آن را بنویسید.

پاسخ: برای حل این مسئله کفایت چند جمله ی نخست دنباله را بنویسیم.

$$۳ - \frac{۱}{۲}, ۳ + \frac{۱}{۳}, ۳ - \frac{۱}{۴}, ۳ + \frac{۱}{۵}, \dots \Rightarrow \text{کوچکترین جمله} = ۳ - \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} \quad \text{و} \quad \text{بزرگترین جمله} = ۳ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$



مثال مهم :

الف) جمله ی عمومی دنباله ی $۲, ۶, ۱۲, ۲۰, \dots$ را تعیین کنید .

پاسخ : اگر جملات دنباله را به صورت $۱ \times ۲, ۲ \times ۳, ۳ \times ۴, ۴ \times ۵, \dots$ در نظر بگیریم ، هر جمله از ضرب شماره جمله ی در عدد بعدی آن ساخته می شود به طور مثال جمله ی دهم $t_{10} = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰$ خواهد بود پس جمله ی عمومی این دنباله به صورت $t_n = n(n+1)$ نوشته می شود .

ب) دنباله ی $۱, ۳, ۶, ۱۰, \dots$ معروف به دنباله ی مثلثی می باشد ، ضمن تعیین جمله ی عمومی آن ، الگوی هندسی آن را رسم کنید .

پاسخ : با کمی دقت متوجه می شویم اگر جملات دنباله ی قسمت الف را بر ۲ تقسیم کنیم ، دنباله ی مثلثی پدید می آید بنابراین جمله ی عمومی دنباله ی مثلثی $a_n = \frac{n(n+1)}{۲}$ خواهد بود .



الگوی هندسی آن را به صورت رو به رو رسم می کنیم :

پ) حاصل مجموع $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$ را به دست آورید .

پاسخ : در صورتی که جملات دنباله ی مثلثی را به صورت زیر بنویسیم :

$$۱, ۱+۲, ۱+۲+۳, ۱+۲+۳+۴, \dots, ۱+۲+۳+\dots+n$$

متوجه می شویم که مجموع گفته شده ، همان جمله ی عمومی دنباله ی مثلثی است . بنابراین $۱+۲+۳+\dots+n = \frac{n(n+1)}{۲}$ است .

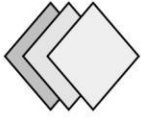
مثال : برای دنباله ی $۵, ۱۲, ۲۲, ۳۵, ۵۱, \dots$ یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله ی عمومی دنباله را بنویسید .

پاسخ : با قدری دقت می توان الگوی زیر را برای آن طراحی کرد :

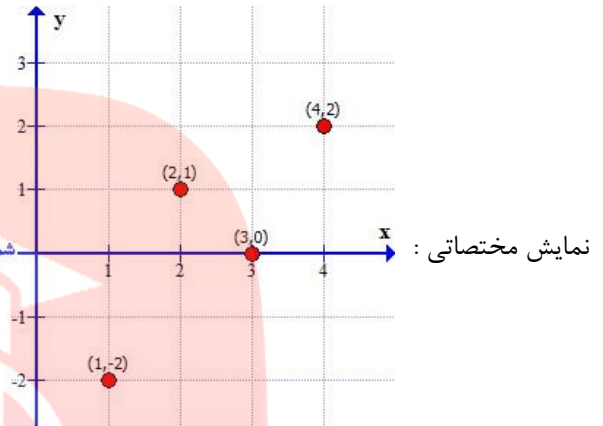
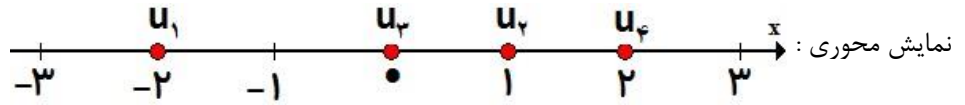
مثال : مجموع اعداد طبیعی مضرب ۳ کمتر از ۱۰۰ را بدست آورید .

پاسخ : برای تعیین مجموع $۳ + ۶ + ۹ + \dots + ۹۹$ ، تساوی $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+1)}{۲}$ را در نظر گرفته و به روش زیر عمل می کنیم :

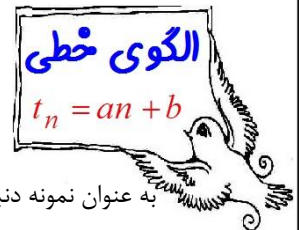
$$\begin{aligned} & ۳ + ۶ + ۹ + \dots + ۹۹ \\ &= ۳ \times (۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۳۳) \\ &= ۳ \times \frac{۳۳ \times ۳۴}{۲} = ۱۶۸۳ \end{aligned}$$



نمایش های گوناگون دنباله :

دنباله ی $2, 1, 0, 2, \dots$ را در نظر بگیرید . طبق توضیحات داده شده در کلاس ، می توان آن را به دو شکل زیر نمایش داد :

الگو هایی که در آنها اختلاف هر دو جمله ی متوالی عددی ثابت باشد ، الگو های خطی می نامیم .

جمله ی عمومی این نوع الگو به صورت $t_n = an + b$ است ، که در آن a و b اعداد حقیقی و ثابتند .به عنوان نمونه دنباله ی $5, 8, 11, 14, \dots$ را در نظر بگیرید ، $8 - 5 = 3$ و $11 - 8 = 3$ و ... مشاهده می شود اختلاف هردو جمله ی متوالی آن ۳ واحد است بنابراین دنباله خطی بوده و ضریب n در جمله ی عمومی آن $a = 3$ است یعنی $t_n = 3n + b$.از طرفی جمله ی اول $t_1 = 5$ می باشد ، بنابراین جمله ی عمومی آن به صورت زیر محاسبه می شود :

$$n = 1 \xrightarrow{t_n = 3n + b} t_1 = 3 + b \xrightarrow{t_1 = 5} 5 = 3 + b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow t_n = 3n + 2$$

مثال : جمله ی عمومی الگوی خطی $4, -1, -6, \dots$ را تعیین کنید .پاسخ : اختلاف هر دو جمله $-1 - 4 = -5$ است بنابراین $t_n = -5n + b$ و $t_1 = 4$ می باشد در نتیجه :

$$n = 1 \xrightarrow{t_n = -5n + b} -5 + b = 4 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow t_n = -5n + 9$$

مثال : در یک الگوی خطی ، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲ و ۱۸ می باشند . جمله ی عمومی الگو را بیابید .

پاسخ : گیریم جمله ی عمومی $t_n = an + b$ باشد ، در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} n = 3 \Rightarrow t_3 = 3a + b \xrightarrow{t_3 = 2} 3a + b = 2 \\ n = 7 \Rightarrow t_7 = 7a + b \xrightarrow{t_7 = 18} 7a + b = 18 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4, b = -10 \Rightarrow t_n = 4n - 10$$



مثال: در صورتی که $t_n = (k - 2)n^2 + kn - \frac{3k}{2}$ جمله ی عمومی یک الگوی خطی باشد، کدام جمله از آن برابر ۱۷ است؟

پاسخ: جمله ی عمومی دنباله ی خطی، چند جمله ای درجه یک است، پس نباید جمله ی درجه دوم (یعنی n^2) وجود داشته باشد، در نتیجه ضریب n^2 آن صفر است: $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

با جایگزینی مقدار $k = 2$ ، جمله ی عمومی دنباله $t_n = 2n - 3$ خواهد بود. که باید برابر ۱۷ قرار داد تا شماره ی جمله بدست آید.

$$2n - 3 = 17 \Rightarrow 2n = 20 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow \text{جمله ی دهم دنباله برابر ۱۷ است}$$

مثال: آیا الگویی با جمله ی عمومی $x_n = \frac{4n^2 - 1}{4n + 2}$ یک الگوی خطی است؟ چرا؟

پاسخ: طبق آنچه در ریاضی نهم خواندیم صورت و مخرج کسر را تجزیه و ساده می کنیم.

$$x_n = \frac{(2n-1)(2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2} \Rightarrow \text{الگو خطی است زیرا جمله ی عمومی آن به صورت } an + b \text{ است.}$$



اگر در دنباله بین هر جمله و جملات قبل آن رابطه ای برقرار کنیم و دنباله به کمک این رابطه تعریف شود، رابطه را رابطه ی بازگشتی نامیم.

مثال: دنباله ای با فرض $t_1 = 3$ طبق رابطه ی بازگشتی $t_n = 2t_{n-1}$ تعریف شده است، پنج جمله ی نخست آن را تعیین کنید.

پاسخ: t_{n-1} جمله ی قبل از t_n می باشد بنابراین $t_n = 2t_{n-1}$ ، خوانده می شود: "هر جمله دو برابر جمله ی قبلی است"

پس باید دنباله ای بنویسیم که جمله ی اول آن ۳ بوده و هر جمله ی آن دو برابر جمله ی قبلی باشد، در نتیجه آن دنباله به صورت زیر است:

$$3, 6, 12, 24, 48, \dots$$

مثال: پنج جمله ی نخست دنباله ی با تعریف $a_1 = -5$ و $a_n = a_{n-1} + 4$ را بنویسید.

پاسخ: طبق تعریف، جمله ی اول -5 و هر جمله ۴ واحد بیشتر از جمله ی قبل است. بنابراین: $-5, -1, 3, 7, 11, \dots$

www.my-dars.ir

مثال: هفت جمله ی نخست دنباله ای تحت شرایط $x_1 = x_2 = 1$ و $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ را بنویسید.

پاسخ: جملات اول و دوم دنباله ۱ بوده و هر جمله برابر است با مجموع دو جمله ی قبلی. بنابراین: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$

این دنباله معروف به **دنباله ی فیبوناچی** است. فیبو ناتیچس ریاضی دان ایتالیایی جین برناردینو فِرگولوسا، مسئله سر زبر را طرح کرد:

فرض کنید خرگوش ها، عمر همادانش داشته باشند و در هر ماه هر جفت خرگوش جفت تازه ای که بعد از ۲ ماه بالغ می گردند تولید کند. اگر با یک جفت خرگوش تازه تولد یافته شروع کنیم در ماه اول یک جفت خرگوش داریم، در ماه سوم آن دو تا خرگوش یک جفت دیگر تولید می کنند و خرگوش ها می شوند ۲ جفت. در ماه چهارم همان جفت اول یک جفت دیگر می دهند و خرگوش ها می شوند ۳ جفت. ماه پنجم، دو باره جفت اول یک جفت دیگر می دهند و آن جفت هم که در ماه سوم به دنیا آمدند، یک جفت تازه! پس خرگوش ها می شوند ۵ جفت. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم دنباله ۱ و ۱ ساخته می شود که معروف به دنباله سر فیبوناچی است.



مثال : جمله ی عمومی دنباله ی اعداد با شرایط $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ را تعیین کنید .

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 5$$

⋮

پاسخ :

از جمع هر جمله با عدد فرد مناسب ، جمله ی بعدی ساخته می شود ، پس دنباله $1, 4, 9, 16, \dots$ و جمله ی عمومی $a_n = n^2$ است .

مثال : در دنباله ی بازگشتی $a_n = (n+1)a_{n-1}$ ، نسبت جمله ی چهارم به جمله ی اول را بیابید .

پاسخ : طبق رابطه ی بازگشتی داریم $\frac{a_n}{a_{n-1}} = n+1$. پس $\frac{a_2}{a_1} = 3$ و $\frac{a_3}{a_2} = 4$ و $\frac{a_4}{a_3} = 5$ است که با ضرب این سه کسر داریم :

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} = 3 \times 4 \times 5 \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = 60$$

۱- اگر $x_n = n^2 - 4n$ فرض شود ، حاصل $x_7 - 3x_5 + x_7$ را به دست آورید .

۲- به ازای چه مقدار از k ، حاصل جمع سه جمله ی نخست دنباله ی $u_n = k.n + 3$ برابر ۳- است ؟

۳- جمله ی عمومی دنباله های زیر را بنویسید .



الف) $-1, 4, -9, 16, \dots$

ب) $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{4}}{9}, \frac{\sqrt{5}}{12}, \dots$

پ) $\frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

ت) $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \dots$

ث) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$

ج) $\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+2x}, \frac{x^2}{1+3x}, \dots$ ($x \neq 0$)

۴- کدام جمله از دنباله ی $x_n = 9n + 1$ با جمله ی نهم دنباله ی $y_n = (-1)^n (n^2 - 100)$ برابر است ؟

۵- کدام جمله از رشته اعداد $a_n = \frac{5n+2}{3n-5}$ برابر 2 است ؟

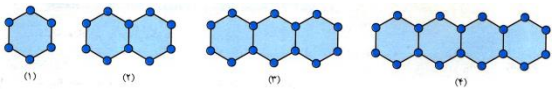
۶- چند جمله از دنباله $b_n = 14 - 2n$ نامنفی است ؟

۷- دنباله ی $t_n = \frac{n}{2} - \frac{18}{n}$ دارای چند جمله ی صحیح است ؟

۸- نخستین جمله ی دنباله ی $a_n = \frac{n-7}{10}$ که بیشتر از 5 باشد را بیابید .



۹- چند جمله ی نخست دنباله ی $a_n = \frac{n^2}{4}$ را نوشته و بزرگترین جمله ی آن را حدس بزنید .



۱۰- الف) در شکل چهل و پنجم الگوی روبرو، چه تعداد دایره وجود دارد ؟

ب) شکل چهل و پنجم الگوی داده شده ، از چند پاره خط تشکیل شده است ؟

۱۱- اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین جمله ی هر دسته ، مجذور کامل باشد :

$$(1), (2, 3, 4), (5, 6, 7, 8, 9), \dots$$

اختلاف جملات اول و آخر در دسته ی دهم چقدر است ؟

۱۲- مجموع نودونهم جمله ی نخست دنباله ی $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ را محاسبه نمایید .

۱۳- دنباله ی $u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ را با نوشتن چند جمله ی نخست مشخص کرده سپس کوچکترین و بزرگترین جمله ی آن را تعیین کنید .

۱۴- کدامیک از دنباله های زیر ، دنباله ی خطی است ؟

الف) $a_n = a_{n-1} + 7$ و $a_1 = 2$ ب) $b_n = n(4n + 5) - (2n + 1)^2$ پ) $c_n = \frac{2^{2n+3} - n \cdot 4^n}{3 \times 4^{n-1}}$

۱۵- با توجه به روابط بازگشتی تعریف شده ، دنباله ی مورد نظر آنها را با نوشتن شش جمله ی نخست تعیین کنید .

الف) $a_n = a_{n-1} - 3$ ، $a_1 = 10$

ب) $b_n = 2b_{n-1} + 1$ ، $b_1 = \frac{1}{4}$

پ) $c_n = c_{n-1}^2 - 10$ ، $c_1 = 3$

ت) $d_n = d_{n-1} \times d_{n-2}$ ، $d_1 = -1$ ، $d_2 = 2$

۱۶- دنباله ای با فرض $a_n = 4a_{n-1}$ و $a_1 = 3$ را با نوشتن چند جمله ی نخست مشخص کرده سپس جمله ی عمومی آن را حدس بزنید .

www.my-dars.ir

۱۷- جمله ی عمومی دنباله ای تحت شرایط $y_1 = 1$ و $y_n = \frac{y_{n-1}}{1 + y_{n-1}}$ را بنویسید .



***** جواب نهایی ترین ها *****

۲-۱

$$k = -2 - 2$$

$$c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \text{ (پ)}$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3n} \text{ (ب)}$$

$$a_n = (-1)^n n^2 \text{ (الف)}$$

$$f_n = \frac{x^{n-1}}{1+nx} \text{ (ج)}$$

$$e_n = \frac{2n-1}{2^n} \text{ (ث)}$$

$$d_n = \frac{1}{n(n+1)} \text{ (ت)}$$

۴- جمله ی دوم

۵- جمله ی دوازدهم

۶- هفت جمله

۷- سه جمله ی صحیح دارد. (جملات دوم ، ششم و هجدهم)

۸- جمله ی پنجاه و هشتم

$$\frac{9}{8} - 9$$

$$۱۰- \text{الف) } 2 + (45 \times 4) = 182 \text{ (ب) } 1 + (45 \times 5) = 226$$

$$۱۱- 100 - 82 = 18$$

۹-۱۲



مای درسیس

گروه آموزشی عصب

www.my-dars.ir

۱۳- کوچکترین جمله ی آن $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و بزرگترین جمله ی آن $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ است.

۱۴- هر سه دنباله خطی هستند.

$$۱۵- \text{الف) } \dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10 \text{ (ب) } \dots, 39, 19, 9, 4, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}$$

$$\text{پ) } \dots, 951, 2531, 5031, 71, -9, -1, 3 \text{ (ت) } \dots, -32, 8, -4, -2, 2, -1$$

$$۱۶- \Rightarrow a_n = 3 \times 4^{n-1} \text{ , } \dots, 3 \times 4^3, 3 \times 4^2, 3 \times 4$$

$$۱۷- \Rightarrow y_n = \frac{1}{n} \text{ , } \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$$

