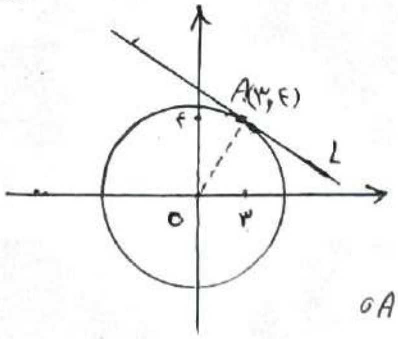
116,۳

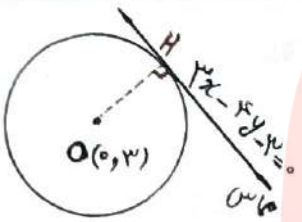


پاسخ تمرین ۷ ← برای نوشتن معادله خط مماس مختصات یک نقطه از آن و شیب آن لازم است. چون شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است پس شیب خط مماس و شیب شعاع عکس قرینه یکدیگر می‌باشند

شیب خط OA : $m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \xrightarrow{OA \perp L} m_L = -\frac{3}{4}$

معادله خط مماس (خط L) : $y - y_1 = m_L(x - x_1) \Rightarrow y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y + 3x = 25$



پاسخ تمرین ۸ ← می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره می‌باشد

شعاع دایره $r = OH = \frac{|3(0) - 4(3) - 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$

معادله دایره : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 = 3^2$

$\Rightarrow \boxed{x^2 + (y-3)^2 = 9}$

پاسخ تمرین ۹ ←

الف) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, $x^2+y^2+2x-4y-9=0$

مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1,-2)$ ، مرکز $O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-1,2)$

شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 4^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$ ، $r' = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + (-4)^2 - 4(-9)} = \frac{1}{2}\sqrt{56} = \sqrt{14}$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(1-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

چون $r - r' < OO' < r + r'$ بنابراین دو دایره متقاطع می‌باشند.

ب) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$, $x^2 + (y-5)^2 = 5$

قرینه ، لاجذر

مرکز $O = (2,-3)$ ، شعاع $r = \sqrt{7}$ ، مرکز $O' = (0,5)$ ، شعاع $r' = \sqrt{5}$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

چون $OO' > r + r'$ بنابراین دو دایره بیرون هم (متخارج) می‌باشند.

پاسخ تمرین ۱۰ ← شعاع دایره $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 - 4(-3)} = \boxed{4}$ ، مرکز دایره $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2,3)$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = 5$

شرط مماس درون $\Rightarrow OO' = |r - r'| \Rightarrow 5 = |4 - r'|$ ⟶ $r' = -1$ ✗ ، $r' = 9$ ✓ ، $O'(-1,-1)$

معادله دایره مورد نظر : $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 81$

به نام خدا

فصل ۷ قانون احتمال کل

مفاهیم اولیه:

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی که نتیجه آن‌ را نتوان قبل از انجام به طور قطع پیش‌بینی کرد. مثلاً در پرتاب تاس مشخص نیست کدام عدد پس از پرتاب نمایان می‌شود.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و معمولاً با نماد S نمایش می‌دهیم.

مثلاً:

فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس ← $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه ← $S = \{ر, پ\}$

" " دو سکه ← $S = \{(ر,ر)(ر,پ)(پ,ر)(پ,پ)\}$

" " یک سکه و یک تاس ← $S = \{(ر,۱)(پ,۱)(ر,۲)(پ,۲)(ر,۳)(پ,۳)(ر,۴)(پ,۴)(ر,۵)(پ,۵)(ر,۶)(پ,۶)\}$

۳- پیشامد تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای نمونه S را یک پیشامد تصادفی گویند. و با حروف بزرگ لاتین ...,A,B نشان دهند.

مثلاً: پیشامد زوج بودن در پرتاب یک تاس ← $A = \{۲, ۴, ۶\}$

۴- اعمال روی پیشامدها: اگر A و B پیشامدهای فضای نمونه S باشند آنگاه:

$A \cup B$ (اجتماع)	$A \cap B$ (اشتراک)	$A - B$ (تفاضل)	A' (متمم)
وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. A یا B	وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند	وقتی رخ می‌دهد که A رخ دهد ولی B رخ ندهد	وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

۵- فرمول احتمال پیشامد A:

$$P(A) = \frac{n(A) \rightarrow \text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{n(S) \rightarrow \text{تعداد کل حالات}}$$

۶- احتمال اجتماع دو پیشامد A و B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

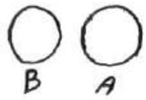
مثلاً: در کارخانه‌ای احتمال اینکه دستگاه‌های A و B کار کنند به ترتیب $\frac{1}{2}$ ($P(A)$) و $\frac{1}{3}$ ($P(B)$) و احتمال اینکه باهم کار کنند $\frac{1}{4}$ ($P(A \cap B)$) است. احتمال اینکه حداقل یکی از دو دستگاه کار کنند.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

۷- احتمال پیشامد A' : $P(A') + P(A) = 1 \longrightarrow P(A') = 1 - P(A)$

۸- پیشامد ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار گوئیم هرگاه A و B باهم رخ ندهند ؛ به بیان دیگر

$A \cap B = \varnothing$



A و B ناسازگار $\Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cap B) = 0$

نکته : برای دو پیشامد ناسازگار A و B احتمال $A \cup B$ به صورت زیر است:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند (ناسازگار) و داشته باشیم $P(A') + P(B') = 1{,}4$ در اینصورت $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

پاسخ : $P(A') + P(B') = 1{,}4 \Rightarrow (1 - P(A)) + (1 - P(B)) = 1{,}4 \Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{6}{10}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{0} = \frac{6}{10} - 0 = \frac{6}{10}$$

نکته : اگر A_1 و A_2 و ... و A_n پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند $A_i \cap A_j = \varnothing$ آنگاه :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۹- پیشامدهای مستقل : دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد

A و B مستقل باشند $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

تست : اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $P(A)P(B) + P(A' \cup B') = 1$ آنگاه دو پیشامد A و B نسبت به هم چگونه اند؟

۱) سازگار ۲) مستقل ۳) وابسته ۴) ناسازگار

حل:

$P(A)P(B) + P(A' \cup B') = 1 \xrightarrow{\text{دمرگان}} P(A)P(B) + P(A \cap B)' = 1$

$\Longrightarrow P(A)P(B) + \cancel{1} - P(A \cap B) = \cancel{1}$

$\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longrightarrow$ A و B مستقل اند

۱۰- احتمال شرطی:

احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است را با نماد $P(A|B)$ نشان می دهیم (می خوانیم احتمال A به شرط B)

$$\boxed{P(A\overset{\text{به شرط}}{|}B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

نکته: اگر دو پیشامد مستقل باشند ← $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$: احتمال اشتراک

با توجه به احتمال شرطی ← $P(A\cap B) = P(B)\times P(A|B)$: احتمال اشتراک

مثال: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، $P(A)=0.3$ و $P(A\cup B)=0.8$ آنگاه $P(A|B)$ کدام است؟

پاسخ:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \overset{\text{مستقل } A,B}{=} \frac{P(A)\times \cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A) = 0.3$$

مثال: تاسی را پرتاب می کنیم اگر بدانیم عدد آمده بزرگتر از ۳ است، احتمال آنکه عدد آمده اول باشد کدام است.

پاسخ: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ فضای نمونه و $B=\{4,5,6\}$ بزرگتر از ۳ ، $A=\{2,3,5\}$ پیشامد اول بودن

$$A\cap B=\{5\}$$

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{اول بودن به شرط بزرگتر از ۳}} = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

تمرین: اگر $P(A\cup B)=0.6$ ، $P(A)=0.2$ و $P(B|A)=0.1$ باشد، آنگاه $P(B)$ را بیابید.

مثال: درون جعبه ای ۴ لامپ سالم و ۱ لامپ معیوب وجود دارد، ۲ لامپ به تصادف و بدون جایگذاری خارج می کنیم احتمال آنکه لامپ اول سالم (A) و لامپ دوم معیوب (B) باشد را بدست آورید.

پاسخ:

احتمال: $P(\overset{\text{دومی معیوب}}{B}\overset{\text{به شرط}}{|}\overset{\text{اولی سالم}}{A}) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A\cap B)}{\frac{4}{5}} \Longrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{4}\times\frac{4}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$

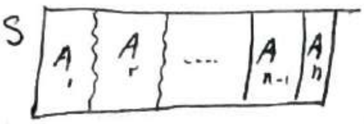
$P(A) = \frac{4}{5}$

$P(B|A) = \frac{1}{4}$

دوم معیوب به شرط اولی سالم

اول یکی از سالمها انتخاب شده پس از تعداد کل یکی کم شده ← ۴ تا باقی می ماند

افراز: فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S و اشتراک هر دوتای آنها برابر ∅ باشد در اینصورت می‌گوئیم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند.



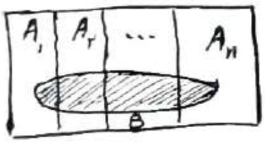
• به عبارت دیگر A_1 و A_2 و ... و A_n یک افراز S می‌باشند هرگاه:

1) $A_i \neq \emptyset$ 2) $A_i \cap A_j = \emptyset$ 3) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

مثال: مجموعه‌های $O = \{1,3,5,\dots\}$ اعداد طبیعی فرد و $E = \{2,4,6,\dots\}$ اعداد طبیعی زوج یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ می‌باشند.

زیرا 1) $O \neq \emptyset$ و $E \neq \emptyset$ 2) $O \cap E = \emptyset$ 3) $O \cup E = \mathbb{N}$

مثال: مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی هستند (چرا؟)



قانون احتمال کل: اگر فرض کنیم A_1 و A_2 و ... و A_n پیشامدها باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد رابطهٔ زیر حاصل می‌شود که به آن قانون احتمال کل گویند:

$$P(B) = P(B\cap A_1) + P(B\cap A_2) + \dots + P(B\cap A_n)$$

در هرکدام از طرفین و بسط کردن احتمال شرطی داریم

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)$$

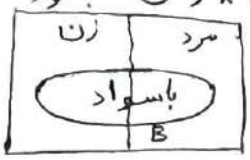
یا

$$\boxed{P(B) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{\text{مجموع}} P(A_i)P(B|A_i)}$$

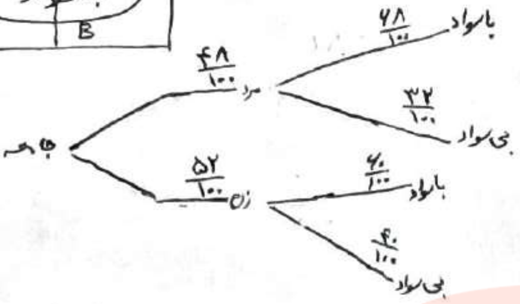
توجه: اگر فضای نمونه‌ای چند قسمتی باشد مثلاً: زنان و مردان – شهری و روستایی – باسواد و بی‌سواد – و احتمال یک پیشامد مثلاً B در این فضا را بخواهد از فرمول قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم.

توجه: برای حل اینگونه مسائل می‌توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم به طوریکه اعداد موجود در هر شاخه از درخت را در هم ضرب نموده و اگر از شاخه‌ای به شاخهٔ دیگر برویم اعداد آنها را با هم جمع می‌کنیم.

مثال : ۵۲٪ جمعیت کشور را زنان و ۴۸٪ دیگر آن‌را مردان تشکیل می‌دهند اگر ۶۰٪ زنان باسواد و ۶۸٪ مردان باسواد باشند چند درصد از افراد جامعه باسوادند؟



روش اول : (نمودار درختی)



$$P(\text{باسواد بودن}) = \left(\frac{48}{100}\times\frac{68}{100}\right)+\left(\frac{52}{100}\times\frac{60}{100}\right) = \frac{3264}{10000}+\frac{3120}{10000} = \boxed{\frac{6384}{10{,}000}}$$

روش دوم : (فرمول قانون احتمال کل)

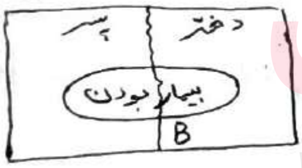
$$\overset{\text{باسواد بودن}}{P(B)} = \overbrace{P(B\cap A_1)}^{\text{باسواد باشد و مرد باشد}} \overset{\text{یا}}{+} \overbrace{P(B\cap A_2)}^{\text{باسواد باشد و زن باشد}}$$

از فرمول شرطی استفاده می‌کنیم

$$= \overset{\text{مرد}}{P(A_1)}\times\overbrace{P(B|A_1)}^{\text{باسواد به شرط مرد}} + \overset{\text{زن}}{P(A_2)}\times\overbrace{P(B|A_2)}^{\text{باسواد به شرط زن}} = \left(\frac{48}{100}\times\frac{68}{100}\right)+\left(\frac{52}{100}\times\frac{60}{100}\right) = \boxed{\frac{6384}{10{,}000}}$$

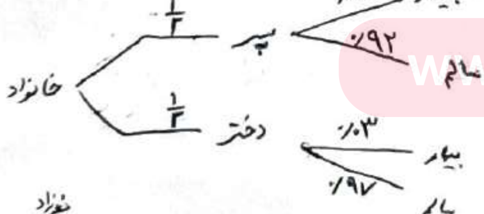
کتاب ۱۴۶ و خرداد ۹۹

مثال : اگر احتمال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۸٪ و نوزاد دختر ۰/۳٪ باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟



پاسخ :

روش اول (نمودار درختی)



$$P(\text{بیمار بودن نوزاد}) = \left(\frac{1}{2}\times \%0.8\right)+\left(\frac{1}{2}\times\%0.3\right) = \frac{8}{200}+\frac{3}{200} = \boxed{\frac{11}{200}}$$

روش دوم (قانون احتمال کل)

$$\overset{\text{بیمار بودن}}{P(B)} = \overbrace{P(B\cap A_1)}^{\text{پسر و بیمار بودن}} \overset{\text{یا}}{+} \overbrace{P(B\cap A_2)}^{\text{دختر و بیمار بودن}} \underset{\text{شرطی}}{=} \overset{\text{پسر}}{P(A_1)}\times\overbrace{P(B|A_1)}^{\text{بیمار به شرط پسر}} + \overset{\text{دختر}}{P(A_2)}\times\overbrace{P(B|A_2)}^{\text{بیمار به شرط دختر}}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{8}{100}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{100}\right) = \boxed{\frac{11}{200}}$$

تمرین (شهریور ۹۹) : اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۰/۷٪ و نوزاد دختر ۰/۴٪ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟ (جواب : $\frac{11}{200}$)

مثال: (خرداد ۹۸) : سه ظرف یکسان داریم: ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهرهٔ آبی است

ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و ۳ مهرهٔ آبی است

ظرف سوم شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهره قرمز است

با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ (روش اول نمودار درختی)

$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{4}{9}}$ آبی

$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ظرف دوم $\xrightarrow{\frac{3}{10}}$ آبی

$\xrightarrow{\frac{1}{3}}$ ظرف سوم $\xrightarrow{\frac{0}{10}}$ آبی

$$P(\text{آبی بودن مهره}) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{0}{10}\right) = \boxed{\frac{67}{270}}$$

روش دوم: (قانون احتمال کل)

$$\overset{\text{آبی بودن}}{P(B)} = \overbrace{P(B \cap A_1)}^{\text{آبی و ظرف اول}} + \overbrace{P(B \cap A_2)}^{\text{آبی و ظرف دوم}} + \overbrace{P(B \cap A_3)}^{\text{آبی و ظرف سوم}}$$

$$= \overset{\text{ظرف اول}}{P(A_1)}\,\overbrace{P(B|A_1)}^{\text{آبی به شرط ظرف اول}} + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{0}{10}\right) = \boxed{\frac{67}{270}}$$

تمرین: (مثال صفحه ۱۴۷ کتاب)

۴ ظرف یکسان داریم: در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است.

در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند.

در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند.

در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد

با چشم بسته یکی از ظرفها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

تمرین (دی ۹۹): سه ظرف یکسان داریم:
ظرف اول شامل ۵ مهره قرمز و ۳ مهره آبی
ظرف دوم شامل ۴ مهره آبی
ظرف سوم شامل ۶ مهره قرمز است.

با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره‌ی انتخابی آبی باشد، چقدر است؟

(جواب: $\frac{11}{24}$)

مثال (شهریور ۹۸):

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره آبی و ۵ مهرهٔ قرمز است.
ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است.

از ظرف اول یک مهره انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم، حساب کنید که با چه احتمالی این مهره آبی است؟

پاسخ: در این مسئله مانند مسائل قبل، انتخاب ظرف در محاسبه احتمال دخالت ندارد، بنابراین:

مهره خروجی ظرف اول

- $\frac{7}{12}$ آبی ــــ $\frac{7}{15}$ مهره خروجی آبی باشد از ظرف دوم ~توضیح~> اگر مهره خارج شده از ظرف اول که در ظرف دوم قرار می‌دهیم آبی باشد، در ظرف دوم ۷ آبی و ۸ قرمز خواهیم داشت. لذا احتمال آبی بودن مهره خروجی ظرف دوم $\frac{7}{15}$ می‌شود.
- $\frac{5}{12}$ قرمز ــــ $\frac{6}{15}$ مهره خروجی از ظرف دوم آبی باشد ~توضیح~> اگر مهره خارج شده از ظرف اول که در ظرف دوم قرار می‌دهیم قرمز باشد، در ظرف دوم ۶ آبی و ۹ قرمز خواهیم داشت. لذا احتمال آبی بودن مهره خروجی ظرف دوم $\frac{6}{15}$

حاصلجمع شاخه‌ها

$$\Longrightarrow P(\text{آبی بودن مهره خروجی از ظرف دوم}) \overset{\uparrow}{=} \left(\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}\right)=\boxed{\frac{79}{180}}$$

روش دوم (قانون احتمال کل)

$$\overset{\text{مهرهٔ خروجی از ظرف دوم آبی باشد}}{P(B)} = P(\overbrace{B\cap A_1}^{\text{مهره خروجی ظرف اول آبی و مهره خروجی ظرف دوم آبی}}) + P(\overbrace{B\cap A_2}^{\text{مهره خروجی ظرف اول قرمز و مهره خروجی ظرف دوم آبی}})$$

$$\overset{\text{شرطی}}{=} P(\overset{\text{مهره ظرف اول آبی}}{A_1})\times P(B|A_1) + P(A_2)\times P(B|A_2)$$

$$= \left(\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}\right)=\boxed{\frac{79}{180}}$$

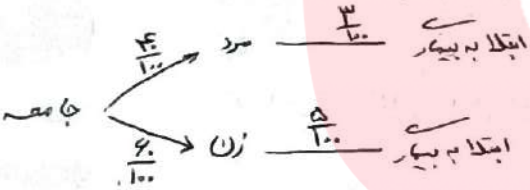
تمرین: دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی است
ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی

از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم، سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم، به چه احتمالی این مهره سبز است؟

(جواب ← $\frac{56}{130}$ مثال صفحه ۱۴۸ کتاب درسی)

مثال: (دی ۹۸) فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این گروه ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

حل:

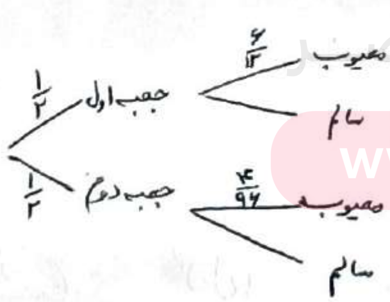


$$P(\text{ابتلا به بیماری}) = \left(\frac{40}{100}\times\frac{3}{100}\right) + \left(\frac{60}{100}\times\frac{5}{100}\right) = \frac{12}{1000} + \frac{30}{1000} = \boxed{\frac{42}{1000}}$$

پاسخ تمرینات صفحه ۱۴۸ کتاب درسی

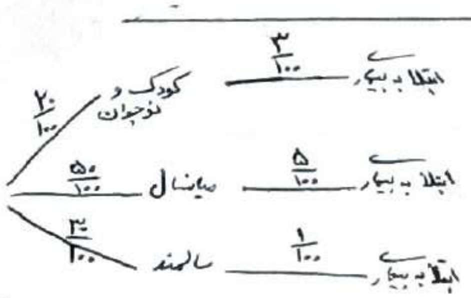
(خرداد ۹۹ خارج)

پاسخ ۱ ←



$$P(\text{معیوب بودن}) = \left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{12}\right) + \left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{96}\right) = \frac{48}{192} + \frac{4}{192} = \frac{52}{192} = \boxed{\frac{13}{48}}$$

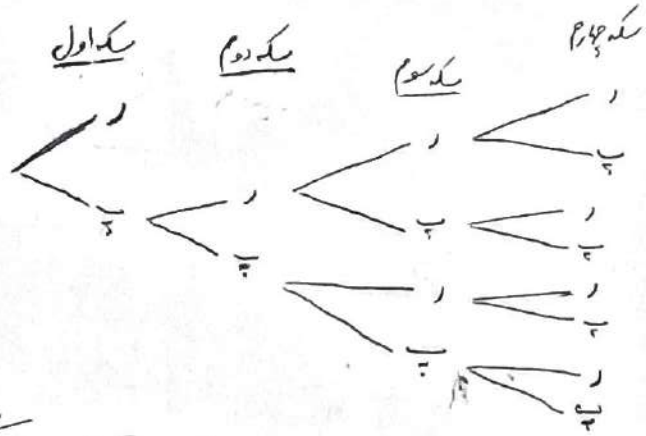
پاسخ ۲ ←



$$P(\text{ابتلا به بیماری}) = \left(\frac{20}{100}\times\frac{3}{100}\right) + \left(\frac{50}{100}\times\frac{5}{100}\right) + \left(\frac{30}{100}\times\frac{1}{100}\right) = \frac{6+25+3}{1000} = \boxed{34}$$

12 ت

پاسخ ۳ ←



فضای نمونه‌ای S = { ر ، (پ ر ر ر) (پ ر ر پ) (پ ر پ ر) (پ ر پ پ) (پ پ ر ر) (پ پ ر پ)
(پ پ پ ر) (پ پ پ پ) }

اینکه دقیقاً یک رو بیاید : A = { ر ، (پ ر پ پ) (پ پ ر پ) (پ پ پ ر) }

$$P(A) = \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}_{} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}_{} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}_{}$$

سکه اول رو بیاید دیگر پرتاب نداریم

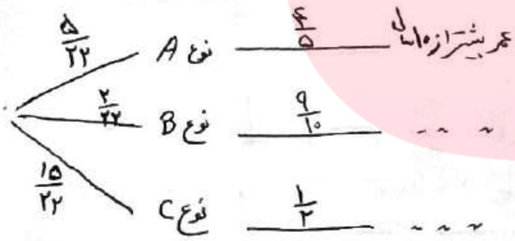
یا

سکه اول پشت و دومی رو و سومی پ و چهارمی پشت

یا

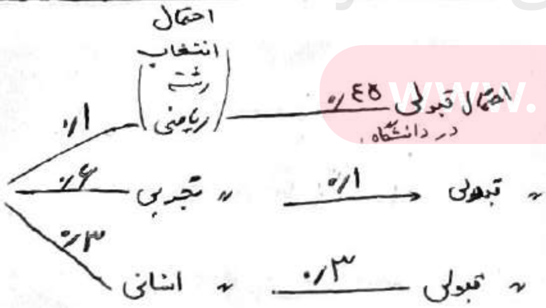
یا

پاسخ ۴ ←



احتمال P (عمر ساعت بیشتر از ۱۰ سال) $= \left(\frac{5}{22}\times\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{22}\times\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{15}{22}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{40+18+75}{220} = \boxed{\frac{133}{220}}$

پاسخ ۵ ←



احتمال P (قبولی در دانشگاه) $= \underbrace{(0/45\times 0/1)}_{} + \underbrace{(0/1\times 0/6)}_{} + \underbrace{(0/3\times 0/3)}_{} = \frac{45+60+90}{1000} = \boxed{\frac{195}{1000}}$

رشته ریاضی و قبولی در دانشگاه

یا

یا

پاسخ ۴ ←

الف)

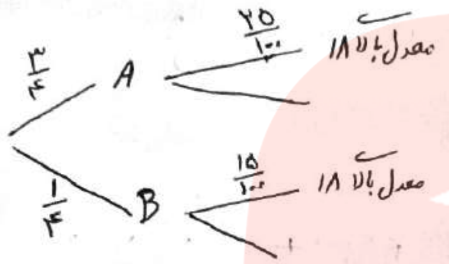
فرض کنیم تعداد دانش آموزان B $= x$

تعداد دانش آموزان A $= 3x$

$\xrightarrow{\ }$ تعداد کل دانش آموزان $= x + 3x = 4x$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{x}{4x} = \boxed{\frac{1}{4}} \quad , \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3x}{4x} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

ب)

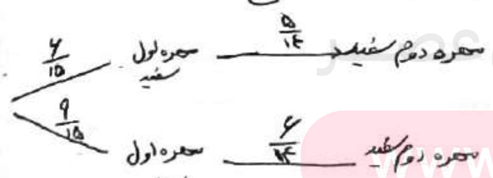


$$P(\text{معدل بالای ۱۸}) = \underbrace{\left(\frac{3}{4} \times \frac{25}{100}\right)}_{\text{معدل بالای ۱۸ و از کلاس A}} \underbrace{+}_{\text{یا}} \underbrace{\left(\frac{1}{4} \times \frac{15}{100}\right)}_{\text{معدل بالای ۱۸ و از کلاس B}} = \boxed{\frac{90}{400}}$$

نکته پایانی: هرگاه در انتخاب‌های متوالی یکی از انتخاب‌ها مورد پرسش قرار نگیرد یعنی از نتیجه یک آزمایش چیزی نگویند ما باید خودمون حالت‌های ممکن را برای اون درنظر بگیریم **یا** اینکه فکر کنیم اصلاً اون آزمایش رخ نداده و احتمال موارد گفته شده را حساب کنیم.

تست کنکور: در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید است؟

پاسخ: **روش اول:** تمام حالت‌های مهره اول را درنظر می‌گیریم



$$\text{احتمال } P(\text{مهره دوم سفید}) = \left(\frac{6}{15} \times \frac{5}{14}\right) \overset{\text{یا}}{+} \left(\frac{9}{15} \times \frac{6}{14}\right) = \frac{84}{210} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

روش دوم: چون که در مورد رنگ مهره اول حرفی نزده پس فرض کنیم مهره‌ای خارج نشده بنابراین فقط احتمال سفید بودن بودن مهره را حساب می‌کنیم

$$P(\text{مهره سفید}) = \frac{6}{15} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

تست کنکور ۹۸: در جعبه‌ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است ابتدا یک مهره را بدون رؤیت خارج می‌کنیم سپس از بین بقیه مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم با کدام احتمال هردو مهره اخیر سفید است؟

$\frac{5}{22}$ $\quad$ $\frac{2}{11}$ ✓ $\quad$ $\frac{4}{11}$ $\quad$ $\frac{1}{11}$

مشابه: تست بالا طبق نکته حل کنید