فصل ۶

درس اول : تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

تفکر تجسمی : تفکر تجسمی همان تصویرسازی ذهنی است. در تفکر تجسمی به جای استفاده از عبارات، کلمات و شیوه‌های زبانی - تصاویر در ذهن ما نقش می‌بندد و باعث می‌شود که به موضوع با موقعیت فکر کنیم.

موقعیت هایی که تفکر تجسمی می‌تواند تقویت شود عبارتند از :

۱- تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا
۲- ترسیم سطح گسترده اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی
۳- ترسیم نماهای مختلف یک جسم
۴- دوران یک جسم حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا
۵- تجسم اجسام هندسی بعد از برش

• در این درس فقط دو مورد را بررسی می‌کنیم
- دوران اجسام حول یک محور
- برش اجسام

دوران حول یک محور : از دوران شکلهای هندسی حول یک محور، جسم‌های متفاوتی ساخته می‌شود

چند مثال از دوران حول محور در فعالیت صفحه ۱۲۳ کتاب درسی

مثال : اگر مثلث قائم الزاویه شکل مقابل را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را بدست آورید.

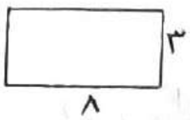
پاسخ : از دوران بیان شده یک استوانه (به شعاع ۳ و ارتفاع ۶) حاصل می‌شود که درون آن یک مخروط (به شعاع ۳ و ارتفاع ۶) توخالی قرار دارد.

ارتفاع × مساحت قاعده

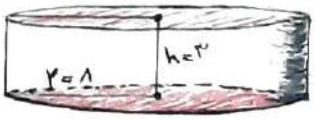
ارتفاع × مساحت قاعده × $\frac{1}{3}$

حجم حاصل شده = حجم استوانه − حجم مخروط = $\pi \times 3^2 \times 6 - \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 6 = \boxed{36\pi}$

مثال: الف) اگر مستطیلی به طول ۸ و عرض ۳ را حول عرضش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟



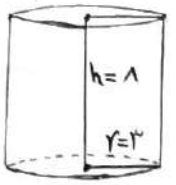
پاسخ ← جسم حاصل شده یک استوانه به شعاع قاعده $r=۸$ و ارتفاع $h=۳$ می باشد.



حجم استوانه: $V = \pi r^2 h = \pi \times ۸^2 \times ۳ = ۱۹۲\pi$

ب) اگر مستطیل داده شده را حول طولش دوران دهیم، حجم جسم حاصل چقدر است؟

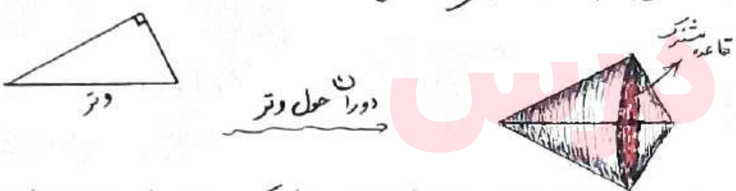
پاسخ ← جسم حاصل شده یک استوانه به شعاع قاعده $r=۳$ و ارتفاع $h=۸$ می باشد.



حجم استوانه: $V = \pi r^2 h = \pi \times ۳^2 \times ۸ = \boxed{۷۲\pi}$

نکته ۱: اگر مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائم دوران کند، یک مخروط داریم:

اگر مثلث قائم الزاویه حول وتر دوران کند، دو تا مخروط با قاعده مشترک حاصل می شود



نکته ۲: اگر یک لوزی (یا مربع) را حول قطر آن دوران دهیم باز هم دو مخروط حاصل می شود که قاعده مشترک دارند و یکسان می باشند

تست (کنکور ۹۹ داخل): از بین مثلث های قائم الزاویه با اندازهٔ وتر ۱۰ واحد دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شوند تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیشترین باشد؟

۱) $\frac{۲}{۱}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۱}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

پاسخ ← به روش مسائل بهینه سازی حل می کنیم.

$\rightsquigarrow a^2+b^2=۱۰۰ \longrightarrow b^2 = ۱۰۰ - a^2$

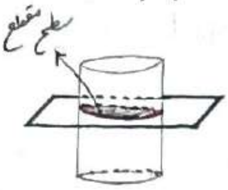
حجم $V = \frac{1}{3}\pi b^2 \times a$ (ارتفاع × مساحت قاعده) $\longrightarrow V = \frac{\pi}{3}(۱۰۰ - a^2)\, a \longrightarrow V(a) = \frac{۱۰۰}{۳}\pi a - \frac{\pi}{۳} a^3$

$V'(a) = \frac{۱۰۰}{۳}\pi - \pi a^2 = 0$

a		$\frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$	
V'	+	0	−
V	↗	max	↘

نسبت دو ضلع قائم $\rightsquigarrow a^2 = \frac{۱۰۰}{۳} \to a = \frac{۱۰}{\sqrt{۳}}$, $b = \frac{۱۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$ $\xrightarrow{\text{نسبت دو ضلع قائم}}$ $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{۲}}{۱}$ و $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

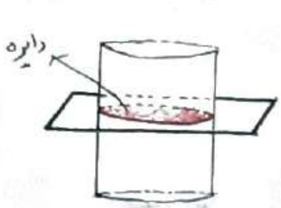
برش اجسام : در این قسمت می خواهیم اجسام سه بعدی را برش بزنیم و تغییرات آنرا بعد از برش تجسم کنیم.

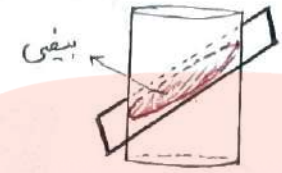


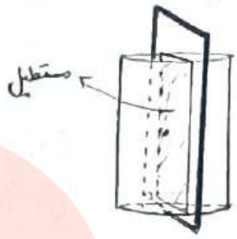
سطح مقطع : شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن نامیده می شود.

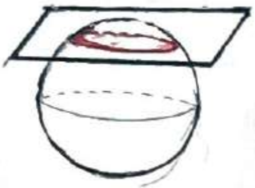
موازی، مایل یا عمود

مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد صفحه با استوانه می تواند دایره ، بیضی یا مستطیل باشد.





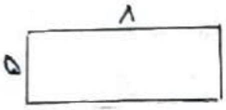




مثال: سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکلی است؟ دایره

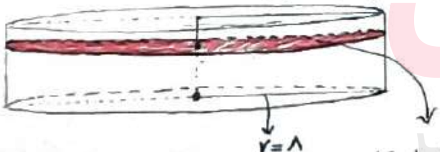
در چه حالتی این سطح مقطع بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

اگر صفحه از مرکز کره بگذرد سطح مقطع بیشترین مساحت را دارد (به عبارت دیگر سطح مقطعی که شامل مرکز کره باشد بیشترین مساحت را دارد)



مثال: یک مستطیل با ابعاد ۸ و ۵ را حول عرض آن دوران می دهیم تا یک استوانه ایجاد شود

الف) اگر صفحه ای موازی قاعده استوانه آنرا قطع کند مساحت سطح مقطع ایجاد شده چقدر است؟



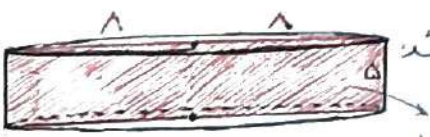
پاسخ ← چون صفحه موازی قاعده است پس سطح مقطع ایجاد شده دایره می باشد

مساحت سطح مقطع $= \pi r^2 = \pi \times ۸^2 = \boxed{۶۴\pi}$

ب) حجم استوانه ایجاد شده چقدر است؟

پاسخ ← حجم استوانه $V = \pi r^2 \times h = \pi \times ۸^2 \times ۵ = \boxed{۳۲۰\pi}$

پ) اگر صفحه ای عمود بر قاعده، استوانه را قطع کند، بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟



پاسخ ← بیشترین مساحت وقتی است که صفحه عمود بر قاعده استوانه شامل محور دوران باشد.

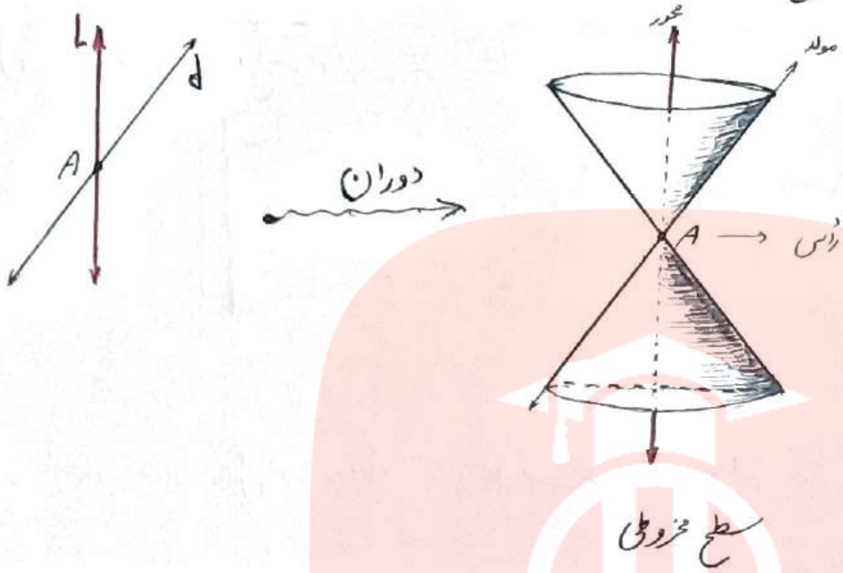
مساحت سطح مقطع $=$ طول × عرض $= ۱۶ \times ۵ = \boxed{۸۰}$

که مساحت مستطیل ایجاد شده با طول ۱۶ عرض ۵

کار در کلاس صفحه ۱۲۵ کتاب درسی حل و بررسی شود

آشنایی با مقاطع مخروطی :

سطح مخروطی: دو خط d و L در نقطه A متقاطع اند. اگر خط d را حول خط L دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک سطح مخروطی است.

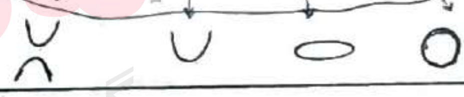


مقاطع مخروطی : وقتی یک سطح مخروطی را توسط یک صفحه برش دهیم، منحنی های ایجاد می شود که به آنها مقاطع مخروطی می گوییم.

شکل انواع مقاطع مخروطی صفحه ۱۲۶ و ۱۲۷ کتاب درسی (مهم)

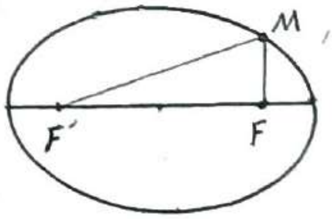
در سؤالات امتحانات نهایی از این قسمت آمده

دایره - بیضی - سهمی - هذلولی



2a — F و F' کانونها بیضی — مانند M

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه ثابت برابر مقداری ثابت باشد.



$$\boxed{MF+MF'=2a}$$
مقدار ثابت

نکته: اگر نقطه ای مانند N بیرون بیضی باشد مجموع فواصل آن تا دو کانون بیشتر از مقدار ثابت (2a) است

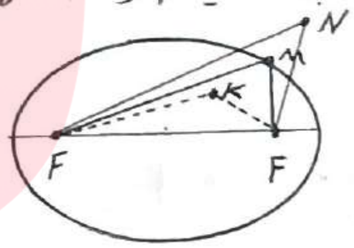
$NF+NF'>2a \longrightarrow$ N بیرون بیضی

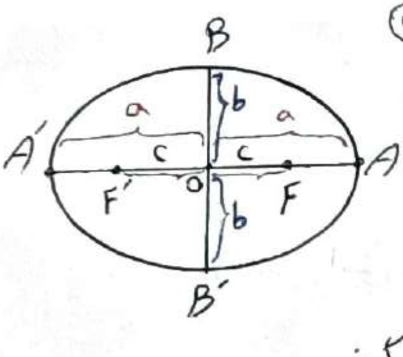
نکته: اگر نقطه ای مانند K درون بیضی باشد مجموع فواصل آن تا دو کانون کمتر از مقدار ثابت است.

$KF+KF'<2a \longrightarrow$ K درون بیضی

نکته: طبق تعریف اگر نقطه M روی بیضی باشد مجموع فواصل آن تا دو کانون برابر مقدار ثابت است.

$MF+MF'=2a \longrightarrow$ M روی بیضی





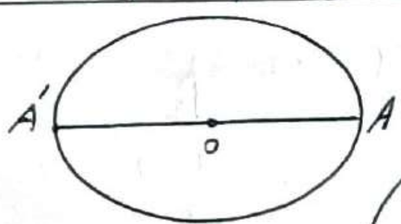
قطر بزرگ بیضی: $\boxed{AA'=2a}$ را قطر بزرگ بیضی گویند ← $OA'=OA=a$

قطر کوچک بیضی: $\boxed{BB'=2b}$ را قطر کوچک بیضی گویند ← $OB'=OB=b$

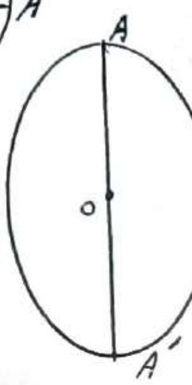
فاصله کانونی: $\boxed{FF'=2c}$ را فاصله کانونی بیضی گویند ← $OF'=OF=c$

توجه: نقطه O مرکز بیضی است و قطر بزرگ را قطر کانونی نیز می گویند

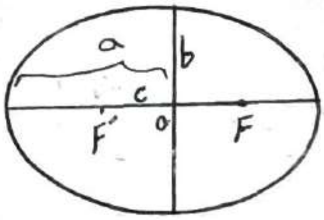
O مرکز بیضی $= \frac{A+A'}{2}=\frac{B+B'}{2}=\frac{c+c'}{2}$



نکته: اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد آنرا بیضی افقی می نامند



نکته: اگر قطر بزرگ بیضی عمودی باشد آنرا بیضی قائم گویند



نکته مهم: در یک بیضی رابطه مقابل بین a و b و c برقرار است:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

مثال: اگر در یک بیضی $FF'=6$ و $AA'=8$ باشد اندازه قطر کوچک بیضی را بدست آورید.

پاسخ:

$AA' \Leftarrow 2a=8 \longrightarrow \boxed{a=4}$

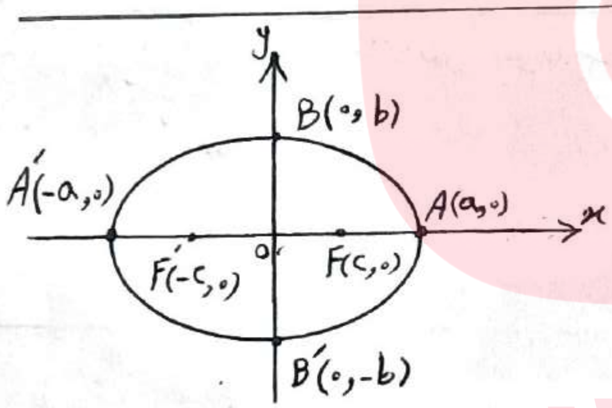
$FF' \Leftarrow 2c=6 \Longrightarrow \boxed{c=3}$

می دانیم: $a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow 4^2=b^2+3^2 \Longrightarrow b^2=16-9=7 \Longrightarrow \boxed{b=\sqrt{7}}$

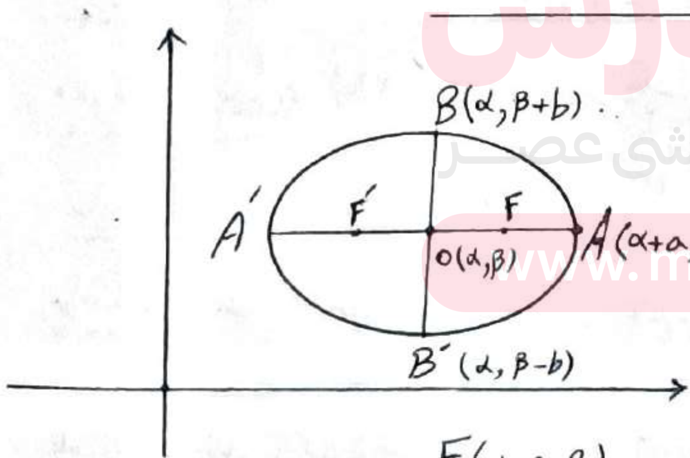
قطر کوچک: $BB'=2b=2\sqrt{7}$

مختصات رأس ها و کانون های بیضی:

الف) اگر بیضی افقی و مرکز آن $O(0,0)$ مبدأ مختصات باشد داریم:



ب) اگر بیضی افقی و مرکز آن $O(\alpha,\beta)$ باشد:



$$\begin{cases} A(\alpha+a,\beta) \\ A'(\alpha-a,\beta) \end{cases} \qquad \begin{cases} B(\alpha,\beta+b) \\ B'(\alpha,\beta-b) \end{cases} \qquad F(\alpha+c,\beta) \quad F'(\alpha-c,\beta)$$

مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز بیضی نقطه‌ای با مختصات $O(4,5)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط رأسها و کانونها بیضی را بدست آورید.

پاسخ: الف)

قطر بزرگ $2a=6 \longrightarrow \boxed{a=3}$

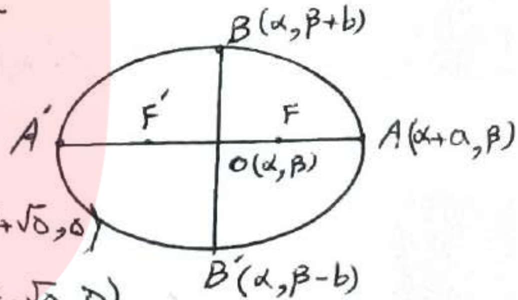
قطر کوچک $2b=4 \longrightarrow \boxed{b=2}$

می‌دانیم: $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow 9=4+c^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

فاصله کانونی: $FF'=2c=\boxed{2\sqrt{5}}$

ب) در این بیضی افقی داریم $O(\underset{\alpha}{4},\underset{\beta}{5})$

$$\begin{cases} A'(\alpha-a,\beta) \Rightarrow A'(1,5) \\ A(\alpha+a,\beta) \Rightarrow A(7,5) \end{cases}$$



$$\begin{cases} B(\alpha,\beta+b) \Rightarrow B(4,7) \\ B'(\alpha,\beta-b) \Rightarrow B'(4,3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(\alpha+c,\beta)=(4+\sqrt{5},5) \\ F'(\alpha-c,\beta)=(4-\sqrt{5},5) \end{cases}$$

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۲۶ حل و بررسی شوند

خروج از مرکز بیضی:

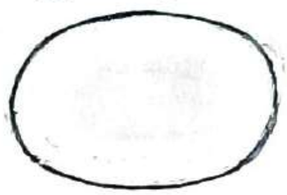
در بیضی نسبت $\boxed{e=\frac{c}{a}}$ را خروج از مرکز بیضی گویند

نکته: همواره خروج از مرکز بیضی عددی بین ۰ و ۱ است بیضی همواره $\boxed{0<e<1}$

نکته: خروج از مرکز لاغری و چاقی بیضی را نشان می‌دهد

← هرچه قدر خروج از مرکز بزرگتر و به ۱ نزدیکتر شود بیضی لاغرتر است (کشیده‌تر)

← هرچه قدر خروج از مرکز کوچکتر و به صفر نزدیکتر باشد بیضی چاق‌تر و به شکل دایره نزدیکتر خواهد شد



مثال: (دی ۹۷): در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟

قطر بزرگ: $2a = 8 \longrightarrow a = 4$

قطر کوچک: $2b = 6 \longrightarrow b = 3$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow 16 = 9 + c^2 \longrightarrow c^2 = 7 \Longrightarrow \boxed{c = \sqrt{7}}$$

خروج از مرکز: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

تست (کنکور ۹۸ داخل): در یک بیضی به کانون‌های $F(2,7)$ و $F'(2,-1)$، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۰/۶ ۰/۶۴ ۰/۷۵ ۰/۸

پاسخ:

$$FF' = \sqrt{(x_F - x_{F'})^2 + (y_F - y_{F'})^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{0+64} = 8$$

فاصله دو نقطه

$FF' = 2c = 8 \longrightarrow \boxed{c = 4}$

$2b = 6 \longrightarrow \boxed{b = 3}$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

خروج از مرکز: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} = 0/8$

مثال: اگر $F(-1,1)$ و $F'(-3,1)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، طول قطرهای کوچک و بزرگ بیضی را بدست آورید.

پاسخ:

$$\overset{2c}{FF'} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + 0^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$$

$2c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 1}$

$e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{a} \Longrightarrow \boxed{a = \sqrt{3}} \Longrightarrow$ قطر بزرگ $AA' = 2a = 2\sqrt{3}$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (\sqrt{3})^2 = b^2 + 1^2 \Longrightarrow b^2 = 3 - 1 = 2 \Longrightarrow \boxed{b = \sqrt{2}}$

قطر کوچک $BB' = 2b = 2\sqrt{2}$

تمرین: فاصله کانونی، طول قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی افقی را بیابید که طول قطر بزرگش ۱۰ واحد و مختصات کانونهای آن F(۱و۳) و F'(۱و-۵) باشد.

تمرین: خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ و مرکز آن (۱-و۴-) و طول قطر کوچک آن ۶ می‌باشد

کتاب و تمرین دی ۹۹

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را حساب کنید.

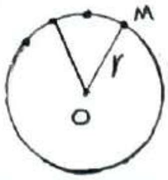
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانونهای بیضی را پیدا کنید؟

تمرین: (شهریور ۹۹) کانونهای یک بیضی نقاط (۵و۲) و (۳-و۲) و $a=5$ است مختصات مرکز و اندازه قطر کوچک بیضی را پیدا کنید.

توجه: تمرینات صفحه ۱۳۲ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

فصل ۶ ← درس دوم دایره

تعریف دایره: مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله آنها از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) برابر یک مقدار ثابت (شعاع دایره) باشد.



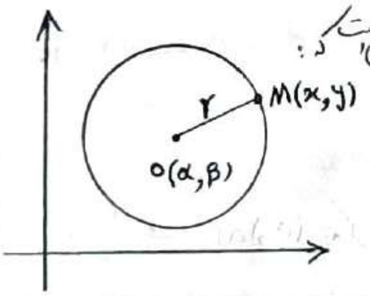
توجه: دایره C به مرکز O و شعاع r را با نماد $C(O,r)$ نشان می‌دهیم.

دایره دو معادله دارد:
1. معادله استاندارد
2. معادله گسترده (فرم کلی معادله دایره)

معادله استاندارد دایره: معادله دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r به صورت مقابل است.

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2}$$

اثبات معادله استاندارد دایره: شرط آنکه نقطه $M(x,y)$ روی دایره $C(O,r)$ باشد آن است که:



$$OM=r$$

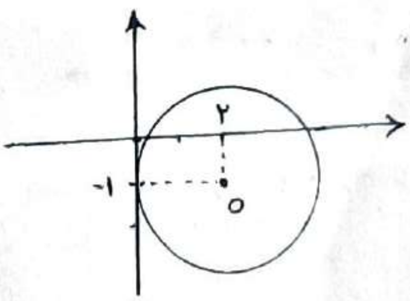
$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(-3,2)$ و شعاع آن $r=\sqrt{3}$ باشد.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow (x-(-3))^2+(y-2)^2=(\sqrt{3})^2 \Rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=3$$

مثال: معادله دایره‌ای به صورت $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ می‌باشد. مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

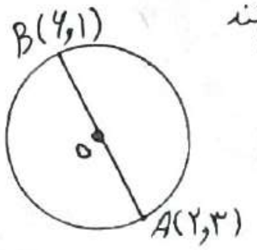
قرینه: $\alpha=2$ ، قرینه: $\beta=-1$ ، جذر: $r=2$



پاسخ: $O(2,-1)$ مرکز دایره

$r=\sqrt{4}=2$ شعاع دایره

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(2,3)$ و $B(6,1)$ دو سر یک قطر آن باشند



پاسخ: وسط قطر مرکز دایره است ←

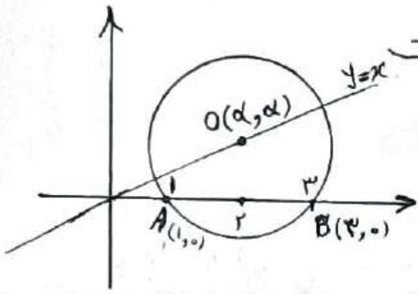
$$O\left(\frac{6+2}{2}\,,\,\frac{1+3}{2}\right) \longrightarrow O(\overset{\alpha}{4}\,,\,\overset{\beta}{2})$$ مرکز دایره

شعاع دایره $r = OA = \sqrt{(4-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \longrightarrow \boxed{(x-4)^2+(y-2)^2=5}$

تست ۹۵ خارج: دایره‌ای محور xها را در دو نقطه به طولهای ۱ و ۳ قطع کرده است و مرکز آن روی نیمساز ربع اول است. شعاع دایره کدام است.

۱) $\sqrt{3}$
۲) 2
۳) $\sqrt{5}$
۴) 3



پاسخ: نقطه‌ای که روی نیمساز ربع اول باشد طول و عرض آن برابر است لذا مرکز دایره $O(\alpha,\overset{\beta}{\alpha})$

$OA = OB =$ شعاع دایره

$$\sqrt{(\alpha-1)^2+(\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2+(\alpha-0)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} \alpha^2-2\alpha+1+\alpha^2 = \alpha^2-6\alpha+9+\alpha^2$$

$$\Longrightarrow 4\alpha = 8 \Longrightarrow \alpha=2 \longrightarrow \underset{\text{شعاع}}{OA} = \boxed{\sqrt{5}}$$

مثال: اگر مرکز دایره‌ای نقطه (۱ و ۲-) و شعاع آن ۳ باشد

الف) معادله استاندارد دایره را بنویسید

ب) نمودار آنرا رسم کنید.

تمرین: اگر معادله دایره‌ای $(x-3)^2+(y+1)^2=4$ باشد مختصات مرکز آن و اندازه شعاع آنرا مشخص کرده

ب) نمودار دایره را رسم کنید

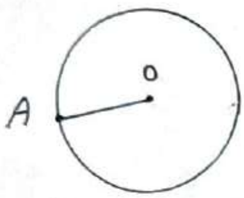
نکته: معادله استاندارد دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r به صورت خلاصه شده $\boxed{x^2+y^2=r^2}$ می‌باشد.

زیرا: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow{O(\overset{\alpha}{0},\overset{\beta}{0})} (x-0)^2+(y-0)^2=r^2 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=r^2}$

کار در کلاس صفحه ۱۳۶: در حالتهای زیر، معادله دایره را بنویسید:

الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ $x^2+y^2=4$

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r $\xleftarrow{\text{پاسخ}}$ $x^2+y^2=r^2$

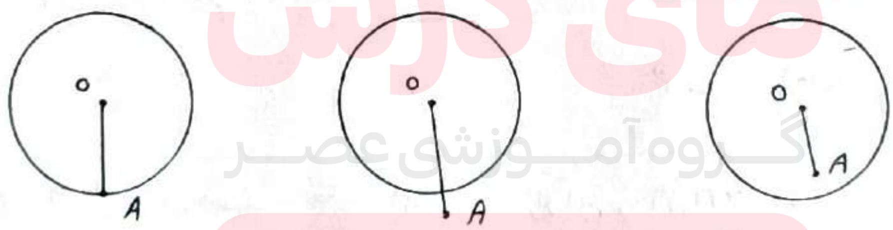


پ) دایره‌ای که از نقطه $\underset{A}{(-3,1)}$ بگذرد و مرکز آن $\underset{O}{(-1,2)}$ باشد.

شعاع دایره $r=OA=\sqrt{(2-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \longrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=5}$

وضعیت نقطه نسبت به دایره:



A روی دایره $\Rightarrow OA=r$

A درون دایره $\Rightarrow OA<r$

A بیرون دایره $\Rightarrow OA>r$

نکته: برای تعیین وضعیت نقطه نسبت به دایره اگر مرکز و شعاع را داشته باشیم فاصله آن نقطه تا مرکز را بدست آورده و با توجه به مطلب بالا:

اگر این فاصله برابر شعاع ← نقطه روی دایره

اگر این فاصله کمتر از شعاع ← نقطه درون دایره

اگر این فاصله بیشتر از شعاع ← نقطه بیرون دایره است.

یا می‌توان نقطه مورد نظر را در معادله دایره قرار داد اگر معادله دایره را $f(x,y)$ و آن نقطه $A(a,b)$ باشد

اگر $f(a,b)=0 \Rightarrow$ A روی دایره، $f(a,b)<0 \Rightarrow$ A داخل دایره، $f(a,b)>0 \Rightarrow$ A خارج دایره

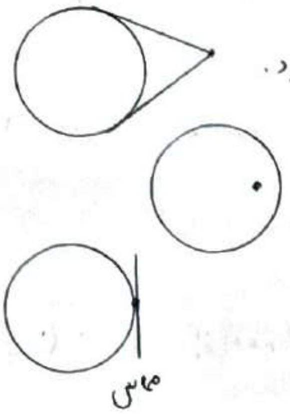
مثال: از نقطه (۱و۲-) چند مماس بر دایره $x^2+y^2-2x-y-1=0$ می‌توان رسم کرد.

پاسخ: ابتدا وضعیت نقطه را نسبت به دایره پیدا می‌کنیم طبق نکته قبل مختصات نقطه را در معادله دایره جایگذاری می‌کنیم.

$$\xrightarrow{\overset{x\ \ y}{(1,-2)}} f(1,-2) = 1^2+(-2)^2-2(1)-(-2)-1 = 1+4-2+2-1 = 4 > 0 \xrightarrow{\text{نقطه خارج دایره}}$$

لذا ۲ مماس بر دایره رسم می‌شود

توجه: کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳۶ کتاب شبیه نکته و مثال بالا حل شود.



نکته:
- اگر نقطه خارج دایره باشد دو مماس به طول مساوی می‌توان بر دایره رسم کرد.
- اگر نقطه داخل دایره باشد نمی‌توان بر دایره مماس رسم کرد.
- اگر نقطه روی دایره باشد یک مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

تست: نقطه $(a,2a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه $(2,1)$ و $(-1,4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۴   ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ: دو نقطه $A(2,1)$ و $B(-1,4)$ روی دایره‌اند پس $OB=OA=r$

$$OA=OB \Rightarrow \sqrt{(2-a)^2+(1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2+(4-2a)^2} \xrightarrow[\text{و ساده کردن}]{\text{طرفین به توان ۲}} a=2$$

$$r=OA=\sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}=3$$

تمرین: ۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2,-1)$ مرکز آن و $M(1,1)$ نقطه‌ای روی محیط آن باشد.

۲- معادله دایره‌ای را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $O(2,-1)$ باشد.

۳- الف) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(3,2)$ و نقطه $(-3,-9)$ روی آن باشد.

ب) نقاط $(0,3)$ و $(-4,-1)$ دو سر قطر آن باشد.

«کار در کلاس صفحه ۱۳۶ حل و بررسی شود»

معادله گسترده دایره: فرم کلی $\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}$ را معادله گسترده یا معادله ضمنی دایره می‌نامیم.

مرکز دایره و شعاع دایره از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

نکته: ضرایب x^2 و y^2 همواره برابر عدد یک باید باشد.

توجه: معادله استاندارد و معادله گسترده آن قابل تبدیل به یکدیگر می‌باشند.

مثال الف) $\boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=1}$ $\xrightarrow[\text{از اتحاد مربع دوجمله‌ای}]{\text{تبدیل به معادله گسترده}}$ $x^2-4x+4+y^2+6y+9=1 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2-4x+6y+12=0}$

استاندارد — گسترده

ب) $\boxed{x^2+y^2-6x+2y+6=0}$ $\xrightarrow[\text{از مربع کامل کردن استفاده می‌شود}]{\text{تبدیل به معادله استاندارد}}$ $(x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$

گسترده

$(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0 \Rightarrow \boxed{(x-3)^2+(y+1)^2=4}$

استاندارد

مثال (دی ۹۷): معادله گستردهٔ دایره‌ای به صورت $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ می‌باشد مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

مرکز $O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}\right)=(3,-1)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+2^2-4(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=\boxed{2}$

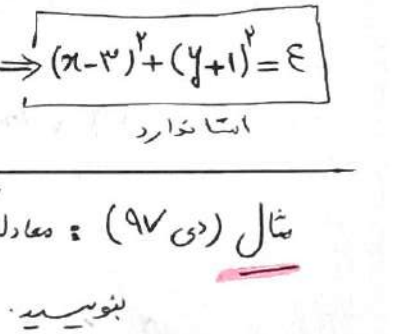
تمرین: معادله داده شده مثال قبل را به شکل استاندارد بنویسید و نمودار آنرا در صفحه مختصات رسم کنید.

$x^2+y^2-6x+2y+6=0 \Rightarrow (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$

$\Rightarrow x^2-6x+9-9+y^2+2y+1-1+6=0$

$\Rightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$

$\Rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$



توجه: اگر مختصات نقاط تقاطع دایره با محورهای مختصات را خواسته باشند $x=0$ قرار می‌دهیم و مقدار y را بدست می‌آوریم محل تقاطع با محور yها حاصل شده و برعکس محل تقاطع با محور xها بدست می‌آید.

مثال: (کار در کلاس صفحه ۱۳۷):

معادله گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است

الف) مختصات مرکز این دایره و شعاع آن را پیدا کنید

مرکز $O\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(-\frac{-2}{2},-\frac{-6}{2}\right)=(1,3)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-6)^2-4(6)}=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times4=\boxed{2}$

ب) معادله دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

در این جا چون مرکز $O(\overset{1}{\alpha},\overset{3}{\beta})$ و $r=2$ شعاع را داریم می‌توان به جای مربع کامل کردن از رابطه زیر معادله استاندارد را نوشت:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

معادله استاندارد: $(x-1)^2+(y-3)^2=4$

نکته: معادله $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2>4c$ باشد.

(زیرا در شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ و با توجه به مثبت بودن r زیر رادیکال فقط باید بزرگتر از صفر باشد)

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر مربوط به معادله دایره است؟

الف) $x^2+y^2+2x+4y+7=0$

$a^2+b^2=2^2+4^2=4+16=20$

$4c=4(7)=28$

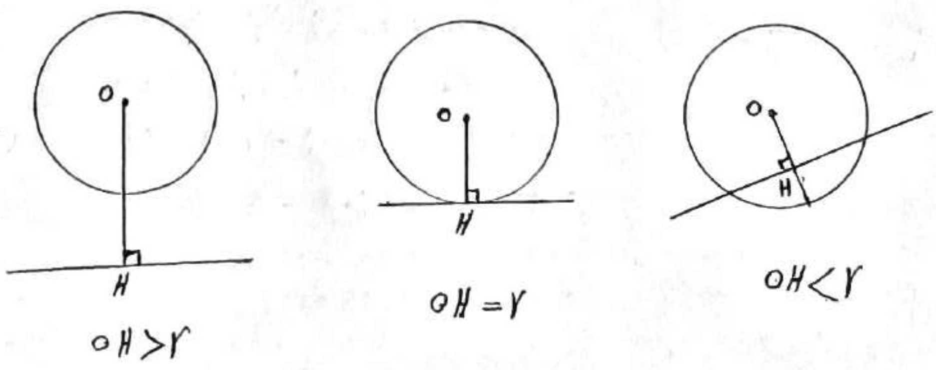
$\longrightarrow 20 \not> 28 \Rightarrow a^2+b^2 \not> 4c \longrightarrow$ معادله داده شده مربوط به دایره نمی‌باشد

ب) $x^2+y^2+2x+2y-1=0$

$2^2+2^2>4(-1)$ یا $8>-4 \longrightarrow$ معادله داده شده مربوط به دایره است

وضعیت خط نسبت به دایره: خط و دایره می‌توانند یک نقطه مشترک، یا دو نقطه مشترک یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.

مماس — متقاطع — نامتقاطع

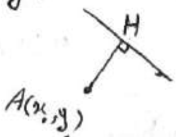


$OH>r$ — $OH=r$ — $OH<r$

توجه: می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است.

و می‌دانیم فاصله نقطه $A(x_0,y_0)$ از خط به معادله $ax+by+c=0$ از رابطه حاصل می‌شود.

$$\boxed{\underset{AH}{\underset{\downarrow}{d}} = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$



◄ بنابراین برای مشخص کردن وضعیت خط و دایره فاصله مرکز دایره از خط را از رابطه بالا بدست می‌آوریم. اگر این فاصله برابر شعاع دایره بود خط بر دایره مماس است ـ اگر این فاصله کمتر از شعاع دایره باشد خط دایره را قطع می‌کند ـ اگر این فاصله بیشتر از شعاع دایره باشد خط و دایره نامتقاطع می‌باشند.

مثال (شهریور ۹۸): وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

حل: کافیست فاصله مرکز دایره را از خط داده شده بدست آورده و اندازه آنرا با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \longrightarrow O(1,0)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} \longrightarrow r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+0^2-4(-3)}=\frac{1}{2}\sqrt{4+12}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=\frac{1}{2}\times 4=\boxed{2}$

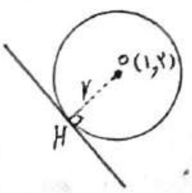
حال فاصله مرکز دایره یعنی $O(1,0)$ را از خط داده شده یعنی $x+y-3=0$ بدست می‌آوریم:

$$d=\frac{|1(1)+1(0)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\overset{\text{گویا}}{=}\sqrt{2}\longrightarrow$$ فاصله بدست آمده کمتر از شعاع است

خط داده شده با دایره متقاطع است.

مثال: (صفحه ۱۳۹ کار در کلاس ۲) خرداد ۹۹ خارج، شهریور ۹۹

معادله دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $O(1,2)$ باشد.



پاسخ: چون خط بر دایره مماس است پس اگر فاصله مرکز دایره از خط را بدست می‌آوریم شعاع دایره حاصل می‌شود.

$$\text{شعاع } r = OH = \frac{|3(1)+4(2)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

معادله دایره: $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

تست

دایره به مرکز $(-1,2)$ و مماس بر خط $x-y=1$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند.

۱) ۳ و ۱ ✓
۲) ۳ و ۲
۳) ۴ و ۱
۴) ۴ و ۱٫۵

مثال: (دی ۹۸ _ کار در کلاس ص ۱۳۹)

وضعیت دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$ را مشخص کنید.

قرینه ↓ قرینه

پاسخ ← فاصله مرکز دایره $O(2,-3)$ را از خط $y+1=0$ بدست می‌آوریم.

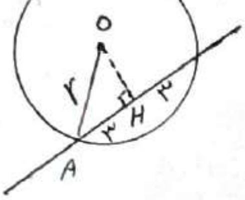
$$0x+1y+1=0$$

شعاع دایره ← $r^2=4 \Rightarrow r=2$

$$OH = \frac{|0(2)+1(-3)+1|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1}=2$$

→ برابر شعاع دایره → خط داده شده بر دایره داده شده مماس است.

مثال: کار در کلاس ۳ ص ۱۳۹



مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادله این دایره را بنویسید.

پاسخ ←
$$OH = \frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

رابطه فیثاغورس: $OA^2=OH^2+AH^2 \rightarrow r^2=4^2+3^2=25 \Rightarrow \boxed{r=5}$ شعاع دایره

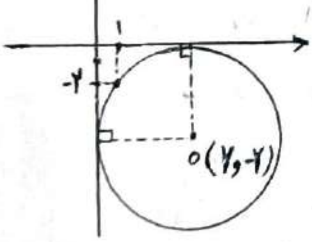
معادله دایره: $(x-2)^2+(y+3)^2=25$

تست کنکور ۹۸ خارج: نقطه $A(-1,4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x-3y+1=0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y=2$ را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۵- و ۳ ✓ ۲) ۴- و ۲ ۳) $-1\pm\sqrt{2}$ ۴) $-1\pm\sqrt{3}$

تست کنکور ۹۷ خارج: دایره گذرا بر نقطه $(1,-2)$ بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است.

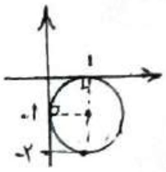
۱) ۱ و ۴ ۲) ۲ و ۴ ۳) ۱ و ۵ ۴) ۲ و ۵



پاسخ ← چون از نقطه $(1,-2)$ گذشته و بر محورهای مختصات مماس است پس دایره در ربع چهارم قرار گرفته و مرکز دایره $O(r,-r)$ می‌شود.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \xrightarrow{O(r,-r)} (x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

چون $(1,-2)$ روی دایره قرار دارد پس در معادله دایره صدق می‌کند.



$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2 \xrightarrow{(1,-2)} (1-r)^2+(-2+r)^2=r^2 \xrightarrow{\text{ساده شود}} r^2-6r+5=0$$

$$\Rightarrow (r-1)(r-5)=0 \Rightarrow r=1,\quad r=5$$

تست: شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0,0)$ و $(2,1)$ و $(1,-2)$ برابر کدام است؟

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ✓ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

پاسخ تست: سه نقطه (داده شده) چون روی دایره قرار دارند پس در معادله دایره صدق می‌کنند (در معادله گسترده قرار می‌دهیم)

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \begin{cases} \xrightarrow{(0,0)} \boxed{c=0} \\ \xrightarrow{(2,1)} 2a+b=-5 \\ \xrightarrow{(1,-2)} a-2b=-5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} \boxed{a=-3},\ \boxed{b=1}$$

$$\overset{\text{معادله دایره}}{\Rightarrow} x^2+y^2-3x+1y=0$$

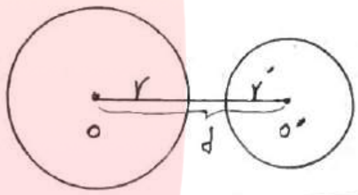
شعاع دایره $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+1^2-4(0)}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{10}}$

اوضاع نسبی دو دایره:

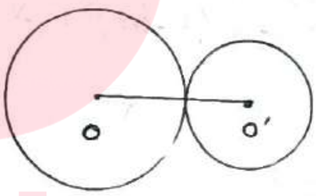
دو دایره دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر می‌گیریم:

پاره خط که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط المرکزین نامیده می‌شود $d=OO'$: خط المرکزین

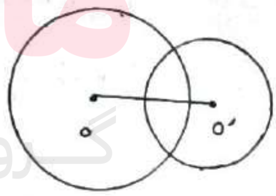
$d>r+r'$ متخارج (بیرون هم)



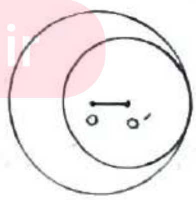
$d=r+r'$ مماس بیرون



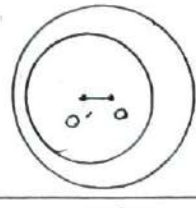
$r-r'<d<r+r'$ متقاطع



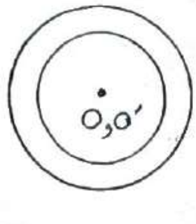
$d=r-r'$ مماس درون



$d<r-r'$ متداخل (درون هم)



$d=0$ هم مرکز



مثال: وضعیت دو دایره $x^2+y^2+6x+8y=0$ و $x^2+y^2-4x+6y+12=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

پاسخ ←

$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-3, -4)$ $\qquad$ $O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, -3)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$ $\qquad$ $r' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(-3-2)^2+(-4+3)^2} = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \simeq 5{,}1$

چون: $5-1 < \sqrt{26} < 5+1 \Longrightarrow \boxed{r-r' < d < r+r'}$

لذا دو دایره متقاطعند

کار در کلاس صفحه ۱۴۱

مثال: (خرداد ۹۸): وضعیت دو دایره $(x+1)^2+(y-2)^2=1$ و $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ را نسبت به هم مشخص کنید.

قرینه، قرینه، جذر

پاسخ ←

$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -2)$ مرکز $\qquad$ مرکز $O'(-1, 2)$ $\qquad$ شعاع $r' = 1$

شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{4+16-4} = 2$

خط المرکزین $d = OO' = \sqrt{(1-(-1))^2+(-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \simeq 4{,}4$

چون $\sqrt{20} > 2+1 \longrightarrow \boxed{d > r+r'}$ دو دایره متخارج

تمرین: به ازای کدام مقدار b دو دایره به معادلات $x^2+y^2+2x-2y=0$ و $x^2+y^2-4y+b=0$ مماس داخل اند؟ (جواب $b=-4$)

تست کنکور تجربی: به ازای کدام مقدار a دو دایره به معادلات $x^2+y^2+4x=0$ و $x^2+y^2-2x+8y+a=0$ مماس خارج اند.

۶

۵

۷

۸ ✓

پاسخ:

$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (1, -4)$ $\qquad$ $O'(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-2, 0)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{4+64-4a}$ $\qquad$ $r' = \frac{1}{2}\sqrt{16+0-4(0)} = 2$

$d = OO' = \sqrt{(1+2)^2+(-4-0)^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

مماس خارجند $\Longrightarrow d = OO' = r+r'$

$\Longrightarrow 5 = \frac{1}{2}\sqrt{68-4a} + 2 \Longrightarrow 6 = \sqrt{68-4a} \Longrightarrow 36 = 68-4a$

$4a = 32 \longrightarrow \boxed{a = 8}$

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۴۱ و تمرینات صفحه ۱۴۲ حل و بررسی شوند

116, !

پاسخ تمرینات صفحه ۱۴۲

۱) الف ←

$$x^2+y^2-6x+2y+1=0 \begin{cases} \xrightarrow{x=0} y^2+2y+1=0 \Rightarrow (y+1)(y+1)=0 \to y=-1 \Rightarrow (0,-1) \\ \xrightarrow{y=0} x^2-6x+1=0 \Rightarrow x=3\pm2\sqrt{2} \end{cases}$$

تقاطع با محور yها: $(0,-1)$

تقاطع با محور xها: $(3\pm2\sqrt{2}, 0)$

مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})=(3,-1)$

شعاع $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4}=\boxed{3}$

ب) ←

$$x^2+(y+3)^2-4=0 \xrightarrow{x=0} (y+3)^2=4 \Rightarrow y+3=\pm2 \begin{cases} y=-1 \to (0,-1) \\ y=-5 \to (0,-5) \end{cases}$$

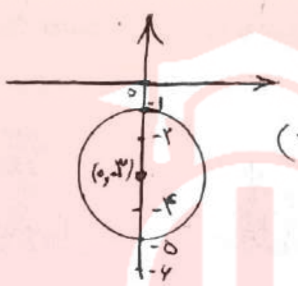
تقاطع با محور yها: مختصات

$$\xrightarrow{y=0} x^2+9-4=0 \Rightarrow x^2=-5$$ جواب ندارد ← دایره محور x را قطع نمی‌کند

قرینه

مرکز $O(0,-3)$

شعاع $r=\sqrt{4}=2$

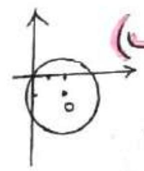


(نمودار دایره قسمت ب)

پاسخ ۲ ← الف)

مرکز $(\overset{\alpha}{2}, \overset{\beta}{-1})$

شعاع $r=OC=\sqrt{(0-2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$



معادله دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y+1)^2=5}$

ب)

مرکز $O(\overset{\alpha}{2}, \overset{\beta}{3})$

روی دایره $A(-3,-9)$

شعاع: $r=OA=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=\boxed{13}$

معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=169}$

پ) مرکز دایره نقطه وسط قطر می‌باشد:

مرکز $O\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)=(\overset{\alpha}{-2}, \overset{\beta}{1})$

$A(0,3)$

$B(-4,-1)$

$\longrightarrow$ قطر $AB=\sqrt{(0+4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

شعاع $r=\frac{AB}{2}=2\sqrt{2}$

$(2\sqrt{2})^2=4\times2=8$

معادله دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Longrightarrow \boxed{(x+2)^2+(y-1)^2=8}$

پاسخ ۳ ← معادله دایره را به صورت تابع دو متغیر $f(x,y)=x^2+y^2-2x+4y+1$ درنظر می‌گیریم

$(1,0) \xrightarrow{\text{در معادله قرار می‌دهیم}} f(1,0)=1+0-2+0+1=\boxed{0} \longrightarrow$ $(1,0)$ روی دایره قرار دارد

$(0,-1) \xrightarrow{\text{〃 〃 〃}} f(0,-1)=0+1-0-4+1=-2<0 \longrightarrow$ $(0,-1)$ درون دایره قرار دارد

$(-1,-2) \xrightarrow{\text{〃 〃 〃}} f(-1,-2)=1+4+2-8+1=\boxed{0} \longrightarrow$ $(-1,-2)$ روی دایره قرار دارد

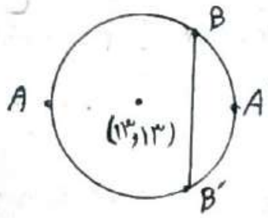
$(0,0) \xrightarrow{\text{〃 〃 〃}} f(0,0)=0+0-0+0+1=1>0 \longrightarrow$ $(0,0)$ بیرون دایره قرار دارد

روش دوم: فاصله هرکدام از نقاط را تا مرکز بدست آورده و با شعاع مقایسه می‌کنیم.

پاسخ ۴ ← الف) مرکز $O(13, 13)$ و $r = 1300$ متر $= 13$ واحد

معادله دایره: $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$

ب) اگر مختصات نقاط برخورد مسیرها را با دایره A و A' و B و B' بنامیم مطابق شکل داریم: $A'(26, 13)$ و $A(0, 13)$.



معادله خط گذرنده از نقاط B و B' برابر است با $x = 18$ که با جایگذاری کردن در معادله دایره داریم

$$(18-13)^2 + (y-13)^2 = 169 \Rightarrow (y-13)^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow y - 13 = \pm 12 \begin{cases} \boxed{y = 25} \\ \boxed{y = 1} \end{cases}$$

پس مختصات $B(18, 25)$ و $B'(18, 1)$ می‌باشند.

پ) در $(18, 13)$

ت) شعاع دایره برابر ۱۳ و فاصله مرکز دایره از محل تقاطع دو مسیر ۵ واحد است. از رابطه فیثاغورس فاصله نقطه B از محل تقاطع ۱۲ واحد است و طول مسیر عمودی $\boxed{BB' = 2400}$

پاسخ ۵ ←

مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}) = (-1, -1)$

شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4-4(-8)} = \frac{1}{2}\sqrt{40} = \sqrt{10}$

فرم استاندارد دایره $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \Rightarrow \boxed{(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10}$

پاسخ ۶ ← کافیست مختصات مرکز دایره را مشخص کرده و سپس فاصله مرکز دایره را از خط داده شده محاسبه کنیم و اندازه آن را با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم:

الف) مرکز $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (2, 2)$

فاصله مرکز از خط $6x + 4y = 0$: $OH = \frac{|6(2)+4(2)+0|}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{20}{\sqrt{52}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$

شعاع دایره $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-4)^2-4(7)} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$

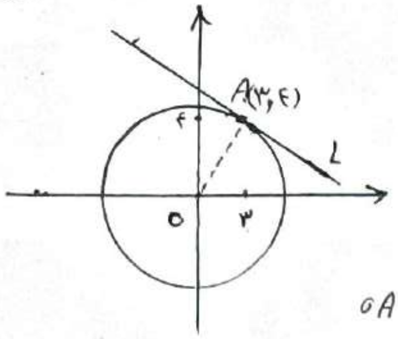
$OH > r \Rightarrow$ خط بیرون دایره است، خط با دایره تقاطع ندارد

ب) معادله خط: $x + y + 2 = 0$ با تبدیل به صورت $ax + by + c = 0$ ، شعاع $r = \sqrt{2}$ ، مرکز $O(0, 0)$

فاصله مرکز دایره از خط $OH = \frac{|1(0)+1(0)+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \overset{\text{گویا}}{=} \sqrt{2}$

چون $OH = r$ پس خط بر دایره مماس است.

116,۳

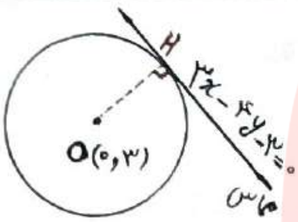


پاسخ تمرین ۷ ← برای نوشتن معادله خط مماس مختصات یک نقطه از آن و شیب آن لازم است. چون شعاع بر خط مماس در نقطه تماس عمود است پس شیب خط مماس و شیب شعاع عکس قرینه یکدیگر می‌باشند

شیب خط OA : $m_{OA} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3} \xrightarrow{OA \perp L} m_L = -\frac{3}{4}$

معادله خط مماس (خط L) : $y-y_1 = m_L(x-x_1) \Rightarrow y-4 = -\frac{3}{4}(x-3)$

$\Rightarrow 4y+3x=25$



پاسخ تمرین ۸ ← می‌دانیم فاصله مرکز دایره از خط مماس برابر شعاع دایره می‌باشد

شعاع دایره $r = OH = \frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$

معادله دایره : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-3)^2=3^2$

$\Rightarrow \boxed{x^2+(y-3)^2=9}$

پاسخ تمرین ۹ ←

الف) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$, $x^2+y^2+2x-4y-9=0$

مرکز $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) = (1,-2)$ ، مرکز $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) = (-1,2)$

شعاع $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2-4(-4)} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$ ، $r' = \frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-4)^2-4(-9)} = \frac{1}{2}\sqrt{56} = \sqrt{14}$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(1-(-1))^2+(-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

چون $r'-r < OO' < r+r'$ بنابراین دو دایره متقاطع می‌باشند.

ب) $(x-2)^2+(y+3)^2=7$, $x^2+(y-5)^2=5$

قرینه، جذر

مرکز $O=(2,-3)$ ، شعاع $r=\sqrt{7}$ ، مرکز $O'=(0,5)$ و شعاع $r'=\sqrt{5}$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

چون $OO' > r+r'$ بنابراین دو دایره بیرون هم (متخارج) می‌باشند.

پاسخ تمرین ۱۰ ← شعاع دایره $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2-4(-3)} = \boxed{4}$

مرکز دایره $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) = (2,3)$

خط المرکزین $OO' = \sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2} = 5$

$O'(-1,-1)$

شرط مماس درون $\Rightarrow OO' = |r-r'| \Rightarrow 5 = |4-r'|$ ، $r'=-1$ ✗ ، $r'=9$ ✓

معادله دایره مورد نظر : $(x+1)^2+(y+1)^2=81$