فصل ۵ کاربرد مشتق

درس اول : (اکسترمم‌های تابع)

در این درس می‌خواهیم ارتباط علامت مشتق یک تابع را با صعودی یا نزولی بودن آن تابع بررسی کنیم.

توجه : از فصل قبل یاد گرفتیم که مقدار مشتق تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است.

اکیداً صعودی — اکیداً نزولی — ثابت

بنابراین :

$f'=0$ ← $\overset{\text{شیب}}{m}=0$ ← تابع ثابت	$f'<0$ ← $\overset{\text{شیب}}{m}<0$ ← تابع اکیداً نزولی	$f'>0$ ← $\overset{\text{شیب}}{m}>0$ ← تابع اکیداً صعودی

یعنی هرجا شیب مماس مثبت باشد مشتق مثبت است و تابع اکیداً صعودی است.

آزمون یکنوایی تابع :

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد ($f'>0$) آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و منفی باشد ($f'<0$) آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.

ج) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

نکته : با توجه مطالب بیان شده برای مشخص کردن بازه‌های مربوط به صعودی بودن یا نزولی بودن تابع f کافی است f' را تعیین علامت کنیم.

توجه : جدول تعیین علامت مشتق را جدول تغییرات تابع گویند. در این جدول اکیداً صعودی را با علامت ↗ و اکیداً نزولی بودن را با علامت ↘ نشان می‌دهیم.

مثال: بررسی کنید توابع زیر در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در چه بازه هایی اکیداً نزولی اند؟

1) $f(x) = -7x + 5$

$f'(x) = -7 < 0 \longrightarrow$ (مشتق همواره منفی)

x	$-\infty$	ریشه ندارد	$+\infty$
$f'(x) = -7$		$-$	
f		$\searrow \quad \searrow$	

در بازهٔ $(-\infty, +\infty)$ تابع f اکیداً نزولی است.

---

2) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$f'(x) = 2x - 4$

ریشه مشتق

$2x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x) = 2x - 4$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازهٔ $(-\infty, 2)$ اکیداً نزولی

در بازهٔ $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی

---

3) $f(x) = x^3 - 12x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

ریشه های مشتق

$3x^2 - 12 = 0 \longrightarrow x^2 = \frac{12}{3} = 4 \longrightarrow \boxed{x = \pm 2}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازهٔ $(-\infty, -2)$ اکیداً صعودی

در بازهٔ $(-2, 2)$ اکیداً نزولی

در بازهٔ $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی

مثال: بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14$ در آن اکیداً نزولی باشد به صورت (a, b) می باشد $b - a$ کدام است؟

پاسخ $\longrightarrow$ می دانیم اگر علامت مشتق در یک بازه منفی باشد تابع در آن بازه اکیداً نزولی است لذا مشتق را تعیین علامت می کنیم

$f'(x) = 6x^2 - 18x$

ریشه های مشتق

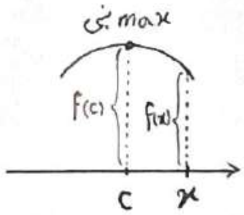
$\longrightarrow 6x^2 - 18x = 0 \longrightarrow 6x(x - 3) = 0 \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ \boxed{x = 3} \end{cases}$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x) = 6x^2 - 18x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$ اکیداً نزولی		$\nearrow$	

f در بازهٔ $(0, 3)$ اکیداً نزولی است لذا: $b - a = 3 - 0 = 3$

a, b

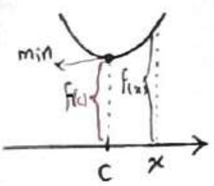
اکسترمم‌های نسبی تابع:



تعریف ماکزیمم نسبی: f در نقطه‌ای به طول c ماکزیمم نسبی دارد، هرگاه درون دامنه یک همسایگی از c باشد که برای هر x از این همسایگی داشته باشیم $\boxed{f(c) \geq f(x)}$

توجه: تابع در نقطه $(c\,,\,\underbrace{f(c)}_{\text{مقدار max}})$ ماکزیمم نسبی دارد.

مثال: در شکل‌های زیر عرض نقطه توپر از عرض نقاط اطراف خودش بالاتر (یا مساوی) است لذا تابع در این نقاط توپر ماکزیمم نسبی دارد.



تعریف مینیمم نسبی: تابع f در نقطه‌ای به طول c مینیمم نسبی دارد، هرگاه درون دامنه f یک همسایگی از c باشد به طوریکه برای هر x از این همسایگی داشته باشیم $\boxed{f(c) \leq f(x)}$

توجه: تابع در نقطه $(c\,,\,\underbrace{f(c)}_{\text{مقدار مینیمم}})$ مینیمم نسبی دارد و $f(c)$ را مقدار min نسبی گویند.

توجه: نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع را نقاط اکسترمم نسبی آن تابع گویند.

مثال: در شکل‌های زیر عرض نقطه توپر از عرض نقاط اطراف خودش پایین‌تر (یا مساوی است) لذا تابع دارای نقاط توپر مینیمم نسبی دارد.

مثال: جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

پاسخ:

ریشه‌ی مشتق

$f'(x) = 3x^2 - 3$

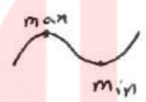
$3x^2 - 3 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow \boxed{x = \pm 1}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	
			max		min		

نقطه $(1,2)$ مینیمم نسبی تابع است و مقدار مینیمم نسبی ۲ می باشد.

" $(-1,6)$ ماکزیمم نسبی " " " ماکزیمم نسبی ۶ می باشد.

توجه: شکل کلی نمودار تابع در مثال قبل به صورت



است مشاهده می‌شود حرکت فلشها در جدول تغییرات مشابه نمودار کلی است و ماکزیمم و مینیمم را نشان می دهد.

مثال (خرداد ۹۹)**:** تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ را در نظر بگیرید.

با رسم جدول تغییرات تابع نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

پاسخ ←

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

$-6x^2 + 6x + 12 = 0 \xrightarrow{\div(-6)} x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow x = 2 \,,\; x = -1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	-14	$\nearrow$	11	$\searrow$	
			min		max		

$(2,11) \longrightarrow$ max نسبی

$(-1,-14) \longrightarrow$ min نسبی

تمرین (شهریور ۹۸)**:** جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 4$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

تمرین: جدول تغییرات تابع $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

تمرین (دی ۹۹) جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

توجه : کار در کلاس صفحه ۱۰۵ کتاب درسی حل و بررسی شود.

نکته : نقاطی که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد به شرط اینکه حتماً مشتق در اطراف آن ها تغییر علامت داشته باشد، نقاط اکسترمم نسبی می باشند.

مثال: در تابع $f(x)=x^3$ با نمودار 

$f'(x)=3x^2=0 \to \boxed{x=0}$ ریشه مشتق

x		0	
$f'(x)=3x^2$	$+$	0	$+$
f	↗		↗

اما چون مشتق در اطراف این نقطه تغییر علامت ندارد پس $x=0$ (f در نقطه به طول) اکسترمم نیست.

نکته : هر نقطه که روی نمودار یک تابع باشد مختصاتش در معادله تابع صدق می کند (و برعکس)

بنابراین مختصات نقاط اکسترمم نسبی در معادله تابع صدق می کند (چون روی نمودار تابع قرار دارند)

مثال (ش ۹۹) : اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۳- باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

پاسخ ← نقطه اکسترمم نسبی (۳- و ۱) روی نمودار تابع قرار دارد پس در معادله تابع صدق می کند:

$$\underset{\downarrow\, y}{f(x)}=ax^2+bx \xrightarrow{(1,-3)} -3=a(1)^2+b(1) \longrightarrow \boxed{a+b=-3}$$

طول نقطه اکسترمم ریشه مشتق تابع است لذا مشتق به ازای طول اکسترمم برابر صفر است.

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=2ax+b \xrightarrow{f'(1)=0} 2a(1)+b=0 \longrightarrow \boxed{2a+b=0}$$

از تشکیل دستگاه معادلات داریم: $b=-6 , a=3$

تمرین: (نهایی ۹۹ خارج و تمرین کتاب) : اگر نقطه (۲ و ۱) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد مقادیر b و d را بدست آورید.

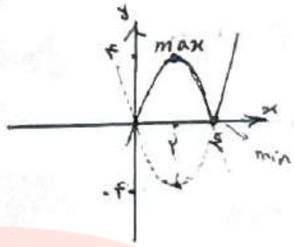
تست (کنکور ۹۸ داخل): در تابع با ضابطه $f(x)=x|x-4|$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

$2\sqrt{5}$ $3\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$ $\sqrt{5}$

پاسخ ← تابع داده شده بدون قدرمطلق به صورت مقابل است:

$$f(x)=x|x-4|=\begin{cases} x(x-4) & x\geq 4 \\ -x(x-4) & x<4 \end{cases}=\begin{cases} x^2-4x & x\geq 4 \\ -x^2+4x & x<4 \end{cases}$$

هرکدام از ضابطه‌ها یک سهمی است که از اجتماع آنها به ازای $x\geq 4$ و $x<4$ نمودار f به شکل



است. در $x=2$ و $x=4$ به ترتیب ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد.

$B(2,4)$ $A(4,0)$

فاصله ماکزیمم تا مینیمم $AB=\sqrt{(2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

تست (کنکور ۹۸ خارج): در تابع با ضابطه $f(x)=x|x|-2x$ فاصله دو نقطه ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن کدام است؟

4 $3\sqrt{2}$ 3 $2\sqrt{2}$ ✓

پاسخ: (مشابه تست قبل نمودار دو سهمی داریم که از اجتماع آنها به ازای $x\geq 0$ و $x<0$ نمودار f به شکل کلی

می‌باشد. نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی $A(-1,1)$ و $B(1,-1)$

تست (کنکور ۹۹ خارج) مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ✓   ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{5}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

پاسخ ← به کمک مشتق و برابر با صفر نقطه ماکسیمم نسبی را حساب می‌کنیم. $f'(x)=0$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+2x+2x^2+2-\cancel{2x^3}-4x^2+6x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \longrightarrow -2x^2+8x+2=0 \xrightarrow{\div(-2)} x^2-4x-1=0 \longrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2} \begin{cases} 2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \end{cases}$$

مخرج کسر همواره مثبت است علامت f' همان علامت صورت کسر است

x	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'=\frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗	max	↘

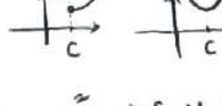
مقدار ماکسیمم نسبی $f(2+\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$

در تابع قرار دهیم و ساده می‌کنیم

تست: اگر تابع f در نقطه c دارای اکسترمم نسبی باشد الزاماً تابع f چگونه است؟

۱) $f'(c)=0$ ۲) در c پیوسته است   ۳) ✓ در همسایگی c تعریف شده است   ۴) در c مشتق پذیر است.

پاسخ ← در شکل‌های



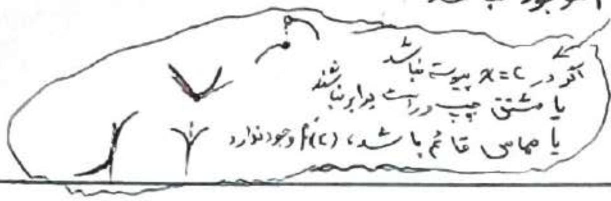
تابع f در c مینیمم نسبی دارد، در اولی f در c پیوسته و در دومی f در c ناپیوسته است.

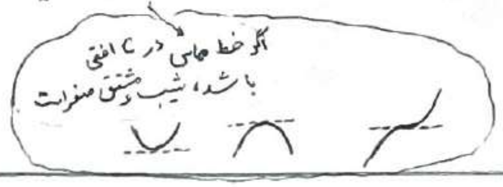
در اولی $f'(c)=0$ و در دومی $f'(c)$ وجود ندارد

لذا گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ لزوماً درست نمی‌باشند و فقط گزینه ۳ درست است.

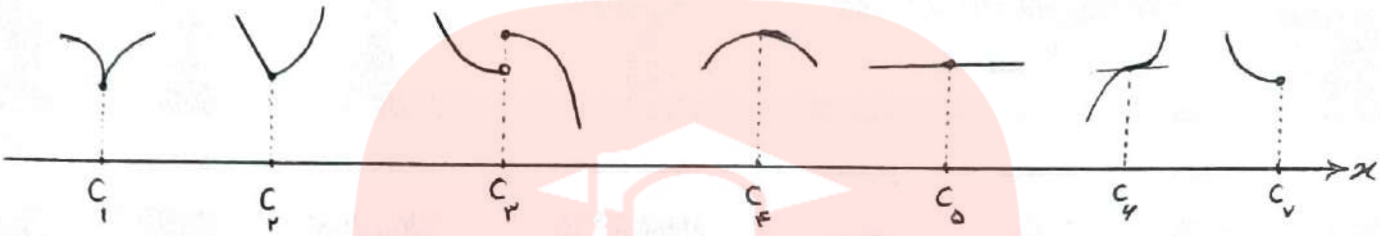
نقطه بحرانی: نقطه به طول $x=c$ از دامنه f را یک نقطه بحرانی این تابع می‌نامیم هرگاه: $\left\{\begin{array}{l} f'(c)=0 \\ \text{یا} \\ f'(c) \text{ موجود نباشد} \end{array}\right.$

$f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد





مثال: تابع f در نقاط به طول‌های c_1 تا c_7 بحرانی است.



مثال (تمرین کتاب)**:** نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt{4-x^2}$ را بدست آورید.

پاسخ ← ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم: $4-x^2\geq 0 \to x^2\leq 4 \xrightarrow{\text{جذر}} |x|\leq 2 \to -2\leq x\leq 2 \to D_f=[-2,2]$

نقاطی از D_f که در آنجا $f'=0$ یا f' وجود ندارد را محاسبه می‌کنیم که همان طول نقاط بحرانی می‌باشد

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \xrightarrow[\text{درجه نقاطی } f' \text{ وجود ندارد}]{\text{درجه نقاطی } f'=0} \begin{cases} f'(x)=0 \xrightarrow{\text{فقط صورت}=0} x=0\in D_f \\ f' \text{ کسری است برای ریشه‌های مخرج وجود ندارد} \longrightarrow 4-x^2=0 \to x=\pm 2\in D_f \end{cases}$$

بنابراین طول نقاط بحرانی تابع $\{2, -2, 0\}$ می‌باشند.

$x=0 \to y=\sqrt{4-0}=\sqrt{4}=2 \to (0,2)$

$x=-2 \to y=\sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0 \to (-2,0)$ مختصات نقاط بحرانی

$x=2 \to y=\sqrt{4-4}=\sqrt{0}=0 \to (2,0)$

توجه: با توجه به مثال بالا اگر $D_f=[a,b]$ باشد آنگاه تابع در $x=a$ (اول بازه) و $x=b$ (آخر بازه) بحرانی است.

مثال (تمرین کتاب)**:** نقاط بحرانی تابع $g(x)=x^3+3x^2-4$ را بدست آورید.

پاسخ ← g تابع چندجمله‌ای است $\boxed{D_g=\mathbb{R}}$ و در تمام نقاط دامنه مشتق وجود دارد لذا نقاطی که در آنجا مشتق صفر شود بحرانی است.

$g'(x)=3x^2+6x=0 \to 3x(x+2)=0 \to \boxed{x=0}\in D_g$ ، $\boxed{x=-2}\in D_g$ (ریشه‌های مشتق)

$g'(-2)=0$ ، $g'(0)=0$

بنابراین تابع g در نقاط به طول $x=0$ و $x=-2$ بحرانی می‌باشد، مختصات نقاط بحرانی $(0,-4)$ و $(-2,0)$

مثال: نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ را بدست آورید. دامنه $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

پاسخ ⟵ $f'(x)=\frac{2x(x-1)-1x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0 \xrightarrow{\text{فقط صورت برابر صفر}} x^2-2x=0 \to x=0\in D_f ,\ x=2\in D_f$

f' به ازای ریشه‌ی مخرج موجود نیست $\longrightarrow \overset{\text{مخرج}}{x-1=0} \longrightarrow \overset{\text{ریشه مخرج}}{x=1} \notin D_f$

بنابراین طول نقاط بحرانی $\{0 , 2\}$ می‌باشند.

نتیجه: در توابع کسری گویا ریشه‌ی مخرج کسر مشتق، نقطه‌ی بحرانی نمی‌باشند چون متعلق به دامنه تابع نیستند.

مثال: نقاط بحرانی تابع دوضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\geq 0 \\ x+\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ را بدست آورید.

پاسخ ⟵ در توابع چندضابطه‌ای علاوه بر بررسی نقاط مرزی (از نظر پیوستگی و سپس از نظر مشتق چپ و راست) نقاطی از دامنه تک تک ضابطه‌ها که مشتق در آن صفر می‌شود یا وجود ندارد نقطه بحرانی است.

دامنه $D_f=[0,+\infty)\cup(-\infty,0)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & x>0 \\ 1+\frac{-1}{2\sqrt{-x}} & x<0\end{cases}$

f در نقطه مرز $x=0$ پیوسته است لذا مشتق چپ و راست را محاسبه و مقایسه می‌کنیم.

$f'_+(0)=-2$
$f'_-(0)=-\infty$
$\longrightarrow f'(0)=$ وجود ندارد $\longrightarrow \underset{\text{بحرانی}}{x=\boxed{0}}\in D_f$

$f'(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \longrightarrow \overset{\text{بحرانی}}{x=\boxed{1}}\in \overset{\text{دامنه ضابطه اول}}{(0,+\infty)} \\ 1+\frac{-1}{2\sqrt{-x}}=0 \to \frac{1}{2\sqrt{-x}}=1 \to 2\sqrt{-x}=1 \to 4(-x)=1 \to \overset{\text{بحرانی}}{x=\boxed{-\frac{1}{4}}}\in \overset{\text{دامنه ضابطه دوم}}{(-\infty,0)}\end{cases}$

بنابراین طول نقاط بحرانی $x=0 , 1 , -\frac{1}{4}$ می‌باشند.

نکته: تابع ثابت $f(x)=k$ دارای بی‌شمار نقطه بحرانی است.

تمرین (دی ۹۹): در تابع زیر ابتدا نقاط بحرانی تابع را بدست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا در صورت وجود مشخص کنید.

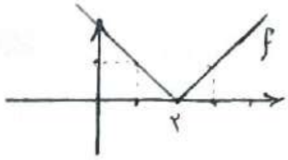
$f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

مثال: (کار در کلاس صفحهٔ ۱۰۷)

با رسم نمودار تابع $f(x)=|x-2|$

الف) نشان دهید f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد. ب) آیا $f'(2)$ وجود دارد؟ چرا؟ پ) آیا $x=2$ طول نقطهٔ بحرانی است؟ چرا؟

پاسخ ← رسم نمودار



الف) با توجه به نمودار به ازای هر x نزدیک ۲ داریم $f(2) \leq f(x)$ یعنی f در $x=2$ مینیمم نسبی دارد.

ب) $f'(2)$ وجود ندارد زیرا نمودار در این نقطه زاویه دار است

پ) $x=2$ طول نقطه بحرانی است زیرا اولاً $2 \in D_f$ ثانیاً: $f'(2)$ وجود ندارد.

قضیه: اگر تابع f در نقطه به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد آنگاه $f'(c)=0$

(f در c بحرانی است)

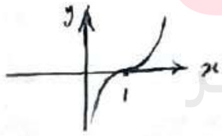
(به عبارت دیگر هر نقطه اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی است)

توجه: عکس قضیه بالا در حالت کلی درست نیست یعنی هر نقطه بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی نیست.

مثلاً: در تابع $f(x)=(x-1)^3$ داریم: $f'(x)=3(x-1)^2=0 \xrightarrow{\text{ریشه مشتق}} x=1$

یعنی $f'(1)=0$ ولی تابع در $x=1$ اکسترمم نسبی ندارد (جدول تغییرات و نمودار نشان می‌دهند f در $x=1$ اکسترمم ندارد)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'=3(x-1)^2$		+	0	+	
		↗		↗	



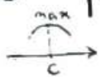
مماس در $x=1$ افقی است لذا شیب و در نتیجه مشتق برابر صفر است لذا بحرانی است ولی اکسترمم نیست

f' در اطراف $x=1$ تغییر علامت نداده پس $x=1$ طول اکسترمم نیست

آزمون مشتق اول: فرض کنید c طول نقطه بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و f در یک همسایگی محذوف c مشتق پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع است.

x		c	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$



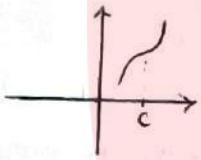
ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه $x=c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

x		c	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$

ج) اگر f' در $x=c$ تغییر علامت ندهد به طوریکه f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد آنگاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

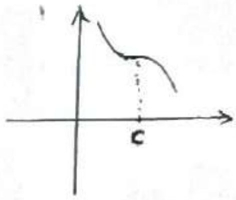
x		c	
f'	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$

همواره صعودی



x		c	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

همواره نزولی



اکسترمم‌های مطلق تابع:

از تمام نقاط دامنه، بالاتر

ماکزیمم مطلق: نقطه ای از دامنه تابع که نسبت به تمام نقاط موجود در دامنه تابع عرض بیشتری داشته باشد.

مینیمم مطلق: نقطه ای از دامنه تابع که نسبت به تمام نقاط موجود در دامنه تابع عرض کمتری داشته باشد.

از تمام نقاط

توجه:

۱- نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار می‌توانند نقاط اکسترمم مطلق باشند.

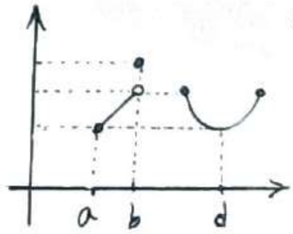
۲- اکسترمم‌های نسبی از نقاط همسایگی خودش بالاتر مساوی (پایین‌تر مساوی) است، اما اکسترمم مطلق از تمام نقاط دامنه تعریف بالاتر (یا پایین‌تر) است.

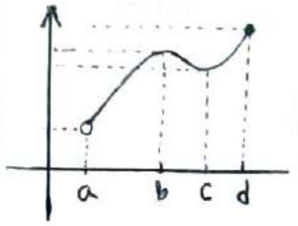
۳- برای اکسترمم مطلق بودن نیازی به همسایگی نیست.

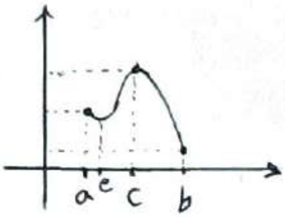
۴- برعکس اکسترمم‌های نسبی، عرض نقاط اکسترمم مطلق منحصر به فرد است (ولی ممکن است دو یا چند نقطه با طول متفاوت اکسترمم مطلق باشند)

۵- اگر تابع f در نقاط اکستریم مطلق خود دارای همسایگی باشند، این نقاط اکستریم نسبی هم خواهند بود.

مثال:







$x=a,d$ طول min مطلق

$x=b$ طول max مطلق

$x=d$ طول min نسبی

$x=a,b,d$ طول نقاط بحرانی

$x=a$ مینیمم مطلق نیست (تعریف نشده)

$x=b$ طول ماکزیمم نسبی

$x=c$ طول min نسبی

$x=d$ طول ماکزیمم مطلق

$x=b,c,d$ طول نقاط بحرانی

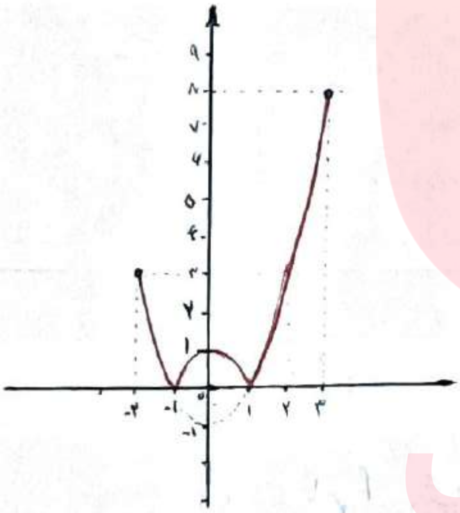
$x=c$ طول ماکزیمم مطلق و نسبی

$x=b$ طول min مطلق

$x=a,b,c,e$ طول نقاط بحرانی

$x=e$ طول min نسبی

مثال: تابع $f(x)=|x^2-1|$ را در بازهٔ $[-2,3]$ رسم کنید و با توجه به نمودار، نقاط اکستریم مطلق و نسبی را تعیین کنید.



پاسخ: ابتدا نمودار x^2-1 را رسم کرده سپس آن قسمت از نمودار که زیر محور x ها است را آینه وار نسبت به محور x ها قرینه می کنیم نمودار $y=|x^2-1|$ حاصل می شود.

$x=-1,1$ طول min نسبی و مطلق ← مختصات $(1,0)$ و $(-1,0)$

$x=0$ طول max نسبی ← $(0,1)$

$x=3$ طول max مطلق ← $(3,8)$

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۱۰ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

قضیه: اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه f در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

روش پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته f در بازهٔ بسته $[a,b]$: (بدون رسم نمودار)

۱- مشتق تابع را بدست آورده و نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

۲- مقدار تابع را در هریک از نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم.

۳- بزرگترین عدد بدست آمده مقدار ماکزیمم مطلق و کوچکترین عدد بدست آمده مقدار مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

مثال: اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)=2x^3+3x^2-5$ را در بازهٔ $[-2,1]$ درصورت وجود تعیین کنید.

پاسخ: $g'(x)=6x^2+6x=0 \rightarrow 6x(x+1)=0$ ، $x=0 \in [-2,1]$ بحرانی ، $x=-1 \in [-2,1]$

بنابراین نقاط ۱، ۰، ۱-، ۲- بحرانی می‌باشند (۲-: اول بازه، ۱: آخر بازه)

$$\begin{cases} g(-2)=\boxed{-9} \\ g(-1)=-4 \\ g(0)=-5 \\ g(1)=\boxed{0} \end{cases}$$

$g(-2)=-9$ مقدار مینیمم مطلق

$g(1)=0$ مقدار ماکزیمم مطلق

مثال: (نهایی ۹۸ و تمرین کتاب): جدول تغییرات تابع $f(x)=-2x^3+9x^2-13$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا مشخص کنید. ب) اکسترمم‌های مطلق تابع f را در بازهٔ $[-1,2]$ تعیین کنید.

پاسخ: $f'(x)=-6x^2+18x=0 \rightarrow 6x(-x+3)=0$ ، $\boxed{x=0} \in [-1,2]$ ، $x=3 \notin [-1,2]$

x	$-\infty$		0		3	
f'		$-$	0	$+$	0	$-$
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

ب)

$f(-1)=-2(-1)^3+9(-1)^2-13=-2$

$f(0)=-2(0)^3+9(0)^2-13=\boxed{-13}$ مقدار مینیمم مطلق

$f(2)=-2(2)^3+9(2)^2-13=\boxed{7}$ مقدار ماکزیمم مطلق

تمرین (خرداد ۹۹) تابع $f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ را درنظر بگیرید:

الف) با رسم جدول تغییرات تابع نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آنرا درصورت وجود مشخص کنید.

ب) مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازهٔ $[0,3]$ درصورت وجود بدست آورید.

تمرین (شهریور ۹۹) اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^3-3x+7$ را در بازهٔ $[-1,3]$ درصورت وجود بدست آورید.

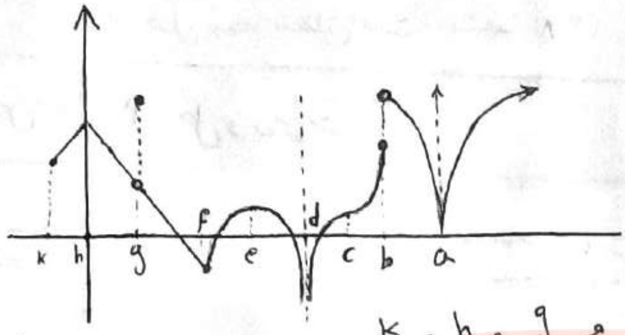
تست: تابع $y=f(x)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۵

۷

۸ ✓

۹



(نمودار f)

پاسخ:

نقاط بحرانی ← a و b و c و e و f و g و h و k

a: مشتق بی‌نهایت (مماس قائم)

b: ناپیوسته

c: مشتق صفر (مماس افقی)

e: مشتق صفر (مماس افقی)

f: زاویه‌دار

g: ناپیوسته

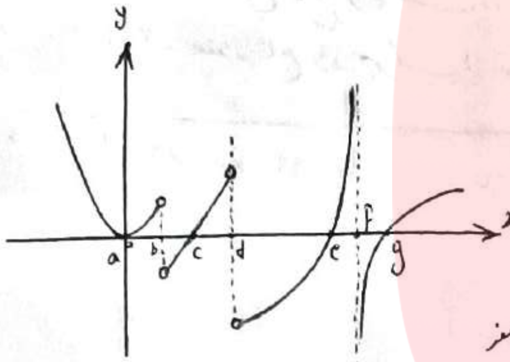
h: زاویه‌دار

k: ابتدای دامنه

توجه: نقطه d بحرانی نمی‌باشد چون در دامنه تابع نیست

تست: اگر نمودار تابع f' به صورت مقابل باشد، تابع پیوسته f با دامنه $\mathbb{R}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۳ ۴ ۵ ۷



(نمودار f')

نقاط بحرانی: a و b و c و d و e و f و g

a: مشتق صفر

b: مشتق چپ و راست برابر نمی‌باشند (گوشه‌ای)

c: مشتق صفر

d: گوشه

e: مشتق صفر

f: مشتق بی‌نهایت

g: مشتق صفر

توجه: تمرینات صفحه ۱۱۲ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

92,1

حل تمرینات صفحه ۱۱۲

پاسخ ۱: $f'(x)=3x^2-12 \xrightarrow{f'=0} 3x^2-12=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

جدول تغییرات:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	20	↘	-12	↗	

بزرگترین بازه نزولی اکید ← $(-2,2)$

پاسخ ۲: $g'(x)=\frac{0-2x(1)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{g'=0} -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		↗	1	↘	

در بازه $(-\infty,0)$ صعودی اکید

در بازه $(0,+\infty)$ نزولی اکید

پاسخ ۳: الف) در جزوه به عنوان مثال حل شد

ب) مشتق $g'(x)=3x^2+6x \xrightarrow{g'=0} x(3x+6)=0 \Rightarrow x=0 \ , \ x=-2$ بحرانی

مختصات نقاط بحرانی: $(0,-4)$ و $(-2,0)$

پ) مشتق $h'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Longrightarrow$ در $x=0$ مشتق پذیر نیست $\rightarrow$ مختصات بحرانی: $(0,0)$

پاسخ ۴: الف) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

$f'(x)=3x^2+6x-9 \xrightarrow{f'=0} 3x^2+6x-9=0 \longrightarrow x=\boxed{1} \ , \ x=\boxed{-3}$ طول بحرانی (طول نقاط اکسترمم نسبی) $\Rightarrow$ مختصات بحرانی: $(1,-15)$ ، $(-3,17)$

x	$-\infty$		-3		1		
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	17	↘	-15	↗	
			max		min		

max نسبی $(-3,17)$

min نسبی $(1,-15)$

ب) $h(x)=-x^3-3x+2$

$h'(x)=-3x^2-3 \xrightarrow{h'=0} -3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=-1$ جواب ندارد $\Rightarrow$ نقطه بحرانی ندارد

اکسترمم نسبی ندارد

x	$-\infty$		$+\infty$
$y'=-3x^2-3$		$-$	

← همواره نزولی

پاسخ ۵: الف) در جزوه به عنوان مثال حل شد.

ب) $g(x)=x^3+2x-5$ ، $x\in[-2,1]$

$g'(x)=3x^2+2=0 \Longrightarrow x^2=-\frac{2}{3}$ جواب ندارد ← فاقد نقطه بحرانی

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'=3x^2+2$		$+$	
g		↗	

← اکیداً صعودی

لذا طول نقاط بحرانی اول و آخر بازه می باشد. (1 ، -2)

$g(-2)=-17$ min مطلق $\longrightarrow$ min مطلق $(-2,-17)$

$g(1)=-2$ max مطلق $\longrightarrow$ max مطلق $(1,-2)$

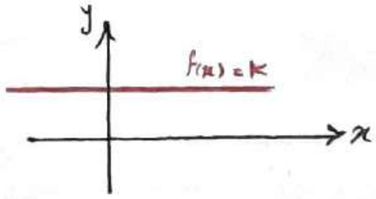
طول max — عرض یا مقدار max

پاسخ ۶:

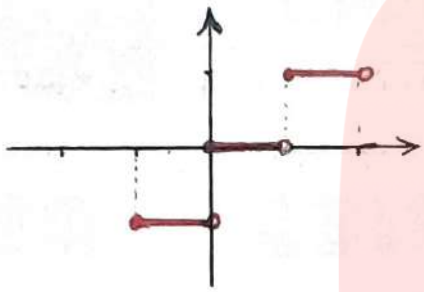
$$y=x^3+bx^2+d \xrightarrow[\text{مختصات اکسترمم در ضابطه تابع صدق می‌کند.}]{(2,1)} 1=8+4b+d \Rightarrow \boxed{4b+d=-7}$$

$$y'=3x^2+2bx \xrightarrow[\text{برابر صفر است}]{\text{مشتق به ازای طول نقطه اکسترمم}} y'(2)=0 \Rightarrow 3(2)^2+2b(2)=0 \Rightarrow 12+4b=0 \Rightarrow \boxed{b=-3}$$

در رابطه بالا قرار می‌دهیم $\boxed{d=5}$



پاسخ ۷: در تابع ثابت $f(x)=k$ هر نقطه دلخواه از دامنه یک نقطه بحرانی است.



در تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ هر نقطه دلخواه از دامنه یک نقطه بحرانی است.

تست: مجموع ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{\frac{4}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}$ در بازه $[-1,8]$ کدام است؟

۵   ۲   ۳-   ۱۳

$$f'(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{نقاط بحرانی}} \begin{cases} f'(x)=0 \Rightarrow x=1 \\ f'(x)\ \text{موجود نباشد} \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-1)=5 \\ f(0)=0 \\ f(1)=\boxed{-3}\ \text{min مطلق} \\ f(8)=\boxed{8}\ \text{max مطلق} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع}} 8+(-3)=\boxed{5}$$

تست کنکور ۹۵: مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-15x$ در بازه $[-4,3]$ کدام است؟

۱) ۱۸- و ۲۴   ۲) ۴۵- و ۲۷ ✓   ۳) ۳۶- و ۲۷   ۴) ۲۷- و ۳۶

$$y'=x^2-2x-15=0 \Rightarrow (x-5)(x+3)=0 \begin{cases} x=5 \notin [-4,3] \\ x=-3 \in [-4,3]\ ✓ \end{cases}$$

$f(-4)=\frac{68}{3}$

$f(-3)=27$ max

$f(3)=-45$ min

کاربرد مشتق :

درس دوم : بهینه سازی

در تمام فعالیتهای روزمره زندگی هدف مهم آن است که بهترین تصمیم گرفته شود

به عبارت دیگر به دنبال ماکزیمم سازی یا مینیمم سازی هستیم.

(درآمد - سود - حجم - مساحت) (هزینه‌ها - زمان - فاصله)

مثلاً : کشاورزی تصمیم می‌گیرد با صرف کمترین هزینه بیشترین مقدار محصول را از زمین برداشت کند.

روش حل مسائل بهینه سازی :

ابتدا دامنه را پیدا می‌کنیم

سپس با استفاده از صورت مسئله معادله ای را مشخص می‌کنیم (معادله اولیه)

معادله ای که می‌خواهیم ماکزیمم یا مینیمم شود را می‌نویسیم (معادله ثانویه)

یکی از متغیرها را از معادله اولیه برحسب دیگری بدست می‌آوریم و در معادله ثانویه قرار می‌دهیم.

در مرحله آخر از معادله ثانویه ساده شده مشتق می‌گیریم و با مشخص کردن نقاط بحرانی اکسترمم مطلق را بدست می‌آوریم.

مثال : (کار در کلاس صفحه ۱۱۹ دی ۹۸) دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

پاسخ : $D_f = (-\infty , +\infty)$ دامنه

۱۰ = تفاضل دو عدد حقیقی

معادله اولیه : $y - x = 10$

معادله ثانویه : $P = xy$ $\xrightarrow{y = x+10}$ $P = x(x+10)$ $\xrightarrow{\text{ساده شود}}$ $\boxed{P(x) = x^2 + 10x}$

حاصلضرب کمترین مقدار شود

تابع برحسب یک متغیر

مشتق گیری از معادله ثانویه ساده شده $\longrightarrow$ $P'(x) = 2x + 10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -5}$ طول نقطه بحرانی

$\rightarrow \boxed{y = 5}$ جواب‌ها

x		-5	
P'	$-$	0	$+$
P	$\searrow$	-25 min	$\nearrow$

تمرین : (شهریور ۹۹) دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۲۰ باشد و حاصلضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

مثال: (ش ۹۸): دو عدد حقیقی a و b را طوری بیابید که داشته باشیم $2a+b=40$ و حاصلضرب آنها بیشترین مقدار ممکن گردد.

حل: $D_f=(-\infty,+\infty)$

معادله اولیه: $2a+b=40$

معادله ثانویه: $P=ab \xrightarrow{b=40-2a} P=a(40-2a) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{P(a)=40a-2a^2}$

مشتق گیری از معادله ثانویه: $P'(a)=40-4a=0 \rightarrow a=15$ طول بحرانی

جایگذاری از معادله اولیه: $b=30$

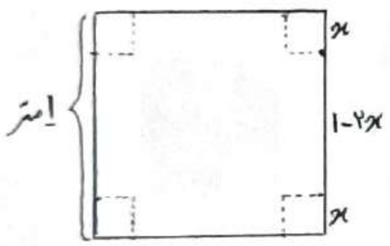
a		15	
$P'(a)$	+	0	−
$P(a)$	↗	450	↘
		max مطلق	

حاصلضرب ماکزیمم: $P(15)=450$

تمرین (نهایی ۹۸): اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه $10x-y=5$ باشد، مقادیر x و y را طوری بدست آورید که حاصلضرب این دو عدد مینیمم گردد.

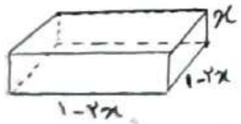
مشابه مثال ۲ صفحه ۱۱۵

مثال: (خرداد ۹۸) ورق فلزی مربعی شکل به طول یک متر را در نظر بگیرید



می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش دهیم و آنها را کنار بگذاریم سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد.

پاسخ ←



دامنه $D=(0,\frac{1}{2})$ (یعنی مقدار x نمی‌تواند صفر و $\frac{1}{2}$ باشد باید عددی بین ۰ و $\frac{1}{2}$ باشد)

معادله اولیه: ضلع مربع قاعده جعبه $=1-2x$

معادله ثانویه: $\underbrace{V}_{\text{حجم}}=\underbrace{(1-2x)(1-2x)}_{\text{مساحت قاعده}}\times\underbrace{x}_{\text{ارتفاع}}=(1-2x)^2\cdot x=x-4x^2+4x^3$

$(1-4x+4x^2)$

مشتق گیری: $V'(x)=1-8x+12x^2=0$
- $x=\frac{1}{2}\notin(0,\frac{1}{2})$
- $\boxed{x=\frac{1}{6}}$ جواب

x		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$	
V'	+	0	−	0	+
V	↗	$\frac{2}{27}$	↘		↗
		max			

حجم ماکزیمم: $V(\frac{1}{6})=\frac{2}{27}$

(مشابه مثال صفحه ۱۱۴ کتاب)

مثال (دی ۹۷): اگر محیط مستطیلی ۲۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.

پاسخ ← $D=(0,12)$

معادله اولیه: محیط $=24 \to 2(x+y)=24 \to \boxed{x+y=12}$

معادله ثانویه: مساحت $S=xy \xrightarrow{y=12-x} S=x(12-x) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=-x^2+12x}$

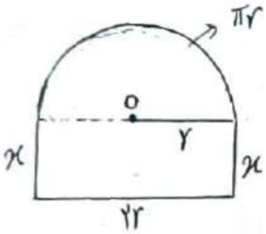
$$\xrightarrow{\text{مشتق}} S'(x)=-2x+12=0 \to \boxed{x=6}$$

جوابها: $\to \boxed{y=6}$

x		6	
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	36 max	$\searrow$

تمرین: (دی ۹۹_مثال صفحه ۱۱۴) نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم اندازه باشد.

تست (مشابه کار در کلاس ۴ صفحه ۱۱۹ کتاب درسی):



محیط شکل مقابل برابر ۱۲ متر می‌باشد، شعاع نیم دایره کدام باشد تا حاصل مساحت شکل بیشترین مقدار ممکن شود؟

۱) $\frac{12}{\pi+4}$ ✓　۲) $\frac{6}{\pi+4}$　۳) $\frac{12}{\pi+2}$　۴) $\frac{6}{\pi+2}$

پاسخ ←

معادله اولیه: محیط شکل $=12 \to x+2r+x+\pi r=12 \to \boxed{2x+(2+\pi)r=12}$ معادله اولیه

معادله ثانویه: $S=\underbrace{2r\cdot x}_{\text{مساحت مستطیل}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\pi r^2}_{\text{مساحت نیم دایره}} \xrightarrow{x=\frac{12-(2+\pi)r}{2}}$

$$S=2r\left(\frac{12-(2+\pi)r}{2}\right)+\frac{1}{2}\pi r^2 \xrightarrow{\text{ساده شود}} S(r)=12r-(2+\pi)r^2+\frac{1}{2}\pi r^2$$

$$\xrightarrow{\text{ساده شود}} S(r)=12r-\left(2+\frac{\pi}{2}\right)r^2$$

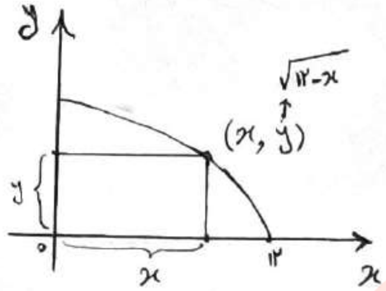
$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(r)=12-2\left(2+\frac{\pi}{2}\right)r=0 \to 12-(4+\pi)r=0 \to \boxed{r=\frac{12}{4+\pi}}$$

شعاع نیم دایره

r		$\frac{12}{4+\pi}$	
S'	$+$	0	$-$
S	$\nearrow$	max	$\searrow$

تست (کنکور ۹۸) : بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر روی منحنی به معادله $y=\sqrt{12-x}$ در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

$8\sqrt{2}$ $8\sqrt{3}$ 16 8



پاسخ ←

معادله اولیه : $y=\sqrt{12-x}$

» ثانویه : $S=xy \longrightarrow \boxed{S=x\sqrt{12-x}}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=1\times\sqrt{12-x}+\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}x=\frac{24-3x}{2\sqrt{12-x}}$$

مخرج مشترک و ساده کردن

$S'(x)=0 \longrightarrow 24-3x=0 \longrightarrow \boxed{x=8}$ طول بحرانی

x	0		8		12
S'		+	0	−	
S	0	↗	16 (max)	↘	0

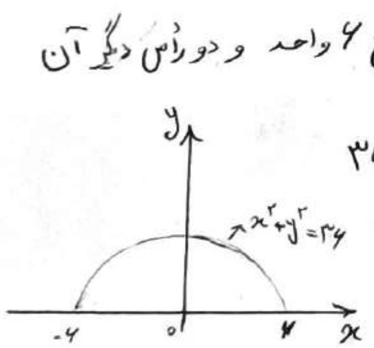
$S'(x)$ وجود ندارد به ازای ریشه مخرج $\longrightarrow 12-x=0 \longrightarrow x=12 \notin D_f=(0,12)$

تمرین : بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی $y=(x-2)^2$ روی بازه $[0,2]$ است کدام است؟

$\frac{28}{27}$ $\frac{15}{9}$ $\frac{32}{27}$ $\frac{11}{9}$

تست (کنکور ۹۸ خارج) : بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم دایره باشد کدام است؟

۱) ۱۸   ۲) ۲۴   ۳) ۲۷   ۴) ۳۶ ✓



پاسخ ← معادله نیم دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۶ به صورت $x^2+y^2=6^2$ می باشد

معادله اولیه : $x^2+y^2=36$

معادله ثانویه (مساحت مستطیل) : $S=\underbrace{(2x)}_{\text{طول}}\underbrace{y}_{\text{عرض}} \xrightarrow{y=\sqrt{36-x^2}} S=2x\sqrt{36-x^2}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=2\sqrt{36-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}}2x=0 \longrightarrow 2\sqrt{36-x^2}=\frac{2x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 36-x^2=x^2 \longrightarrow 2x^2=36 \longrightarrow x^2=18 \longrightarrow x=\sqrt{18}$

$\longrightarrow$ مساحت ماکزیمم $S(\sqrt{18})=2\sqrt{18}\times\sqrt{18}=\boxed{36}$

تستِ (کنکور ۹۹ داخل): از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد دو ضلع قائمه با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم بیشترین باشد؟

$\frac{\sqrt{2}}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{1}$ $\frac{2}{1}$

پاسخ ←

مخروط

معادله اولیه (فرض رابطه فیثاغورس): $a^2+b^2=100 \rightsquigarrow \boxed{a^2=100-b^2}$

معادله ثانویه: حجم مخروط $V=\frac{1}{3}\pi a^2 . b \rightsquigarrow V(b)=\frac{1}{3}\pi(100-b^2)b$

$\rightsquigarrow V(b)=\frac{\pi}{3}(100b-b^3)$

$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} V'(b)=\frac{\pi}{3}(100-3b^2)=0 \rightsquigarrow b^2=\frac{100}{3} \rightsquigarrow b=\boxed{\frac{10}{\sqrt{3}}}$ طول نقطه بحرانی

b		$\frac{10}{\sqrt{3}}$	
V'	+	0	−
V	↗	max	↘

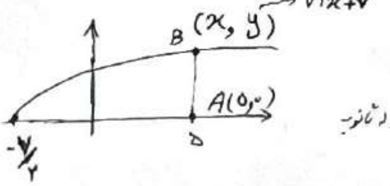
نسبت دو ضلع قائمه: $\frac{a}{b}=\frac{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{10}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$

$a^2=100-\frac{100}{3}=\frac{200}{3} \rightsquigarrow a=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

تستِ (کنکور ۹۹ خارج): کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5,0)$ از نقاط منحنی به معادله $y=\sqrt{2x+7}$ کدام است؟

۱) ۴ ✓   ۲) ۴٫۵   ۳) ۵   ۴) $3\sqrt{2}$

پاسخ ←



معادله اولیه $y=\sqrt{2x+7}$

معادله ثانویه $AB=\sqrt{(5-x)^2+(0-y)^2} \rightarrow AB=\sqrt{(5-x)^2+(0-\sqrt{2x+7})^2}$

$\rightarrow f(x)=\sqrt{25-10x+x^2+2x+7}$

$\rightarrow f(x)=\sqrt{x^2-8x+32}$

$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}} f'(x)=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0 \rightarrow 2x-8=0 \rightarrow \boxed{x=4}$

$y=\sqrt{15}$

x		4	
f'	−	0	+
f	↘	4 min	↗

توجه: کار در کلاس صفحه ۱۱۸ و تمرینات صفحه ۱۲۰ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

(پاسخ کار در کلاس و تمرینات صفحه ۱۱۸ تا ۱۲۰ کتاب درسی)

کار در کلاس : ص ۱۱۸

می خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد، ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل: مقدار فلز مینیمم شود یعنی مساحت کل استوانه کمترین شود (معادله ثانویه)

$$\text{حجم} = 1\ lit = 1000\ cm^3$$

معادله اولیه: $\pi r^2 h = 1000$

معادله ثانویه: $\underset{\text{مساحت کل استوانه در باز}}{S} = \underset{\text{مساحت قاعده}}{\pi r^2} + \underset{\text{مساحت جانبی}}{2\pi r h} \xrightarrow{h=\frac{1000}{\pi r^2}} S = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}}$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(r) = 2\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \Longrightarrow \frac{2\pi r^3 - 2000}{r} = 0 \to r^3 = \frac{2000}{2\pi} = \frac{1000}{\pi} \Rightarrow \underset{\text{شعاع}}{\overset{\text{بحرانی}}{\boxed{r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}}}}$$

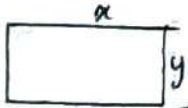
$$r = 0 \times$$

کمترین مقدار فلز (min مطلق) : $S\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 300\sqrt[3]{\pi}$

بنابراین اگر شعاع قاعده و همچنین ارتفاع استوانه هر دو برابر $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \simeq 6/83$ سانتی متر در نظر گرفته شوند کمترین مقدار فلز مصرف خواهد شد.

---

* **حل تمرینات صفحه ۱۲۰ کتاب**



$$\text{مساحت} = 10000\ m^2$$

معادله اولیه: $xy = 10000$

۱- الف)

معادله ثانویه (هزینه دیوار کشی): $f = 2(2x + 8y) \xrightarrow{y=\frac{10000}{x}} f = 2\left(2x + 8\times\frac{10000}{x}\right)$

$$\xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{f(x) = 4x + \frac{160000}{x}}$$

ب) ←

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(x) = 4 - \frac{160000}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 160000}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 160000 = 0 \Rightarrow x^2 = 40000$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \boxed{x = 200}$$

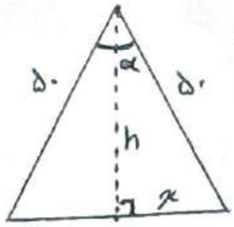
معادله اولیه: $\boxed{y = 50}$

مینیمم هزینه — min مطلق : $f(200) = 1600$

یعنی اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ متر و دیوارهای شرقی و غربی هر کدام ۵۰ متر باشند هزینه دیوارکشی، حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

کاربرد مشتق (بهینه سازی)

پاسخ ۲:



معادله اولیه: $h^2+x^2=50^2 \Rightarrow h=\sqrt{2500-x^2}$

معادله ثانویه مساحت مثلث: $S=\frac{1}{2}(2x)\times h$

$\xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=x\sqrt{2500-x^2}}$

$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=1\times\sqrt{2500-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{2500-x^2}}\times x=\frac{2500-x^2-x^2}{\sqrt{2500-x^2}}=\frac{2500-2x^2}{\sqrt{2500-x^2}}$

$S'(x)=0 \Rightarrow 2500-2x^2=0 \Rightarrow x^2=1250 \Rightarrow x=\sqrt{1250}=\boxed{25\sqrt{2}}$

$\xrightarrow{\text{در معادله اولیه}} \boxed{h=25\sqrt{2}}$

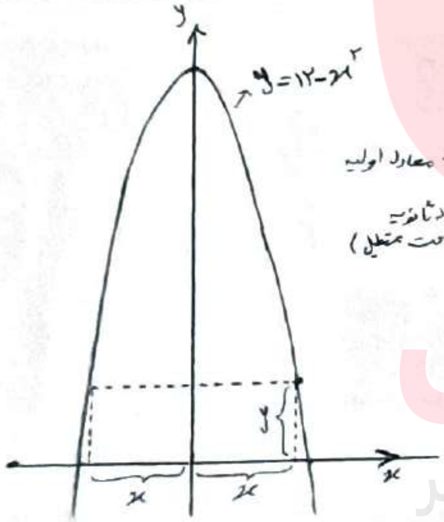
مساحت ماکزیمم $S(25\sqrt{2})=25\sqrt{2}\times\sqrt{2500-1250}=625\times2=\boxed{1250}$

ب) روش دوم:

بیشترین مساحت وقتی است که $\sin\alpha=1$

مساحت $S=\frac{1}{2}\times50\times50\times\sin\alpha = \frac{1}{2}\,50\times50\times1=\boxed{1250}$

پاسخ ۳.



معادله اولیه: $y=12-x^2$

معادله ثانویه (مساحت مستطیل): $S=2x.y \xrightarrow{\text{به جای y قرار می‌دهیم}} S=2x(12-x^2) \xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=24x-2x^3}$

$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} S'(x)=24-6x^2$

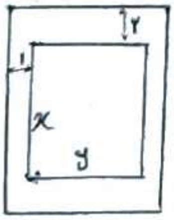
$S'(x)=0 \Rightarrow 24-6x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \to \boxed{x=2}$ ✓ $\xrightarrow{\text{در معادله اولیه قرار می‌دهیم}} \boxed{y=8}$

$x=-2$ ×

مساحت ماکزیمم $S(2)=24(2)-2(2)^3=\boxed{32}$

بنابراین اگر ابعاد مستطیل ۴ ($2x$) و ۸ باشند بیشترین مساحت را دارد.

پاسخ ۴: (خرداد ۹۹)



حجم متن

معادله اولیه: $xy=32 \Rightarrow y=\frac{32}{x}$

معادله ثانویه (مساحت صفحه): $S=(y+2)(x+4) \Longrightarrow S=(\frac{32}{x}+2)(x+4)=32+\frac{128}{x}+2x+8$

$\xrightarrow{\text{ساده شود}} \boxed{S(x)=\frac{128}{x}+2x+40}$

$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} S'(x)=-\frac{128}{x^2}+2=0 \Longrightarrow x^2=64 \Rightarrow \boxed{x=8} \xrightarrow{\text{در معادله اولیه}} \boxed{y=4}$

مطلق min. $S(8)=72$

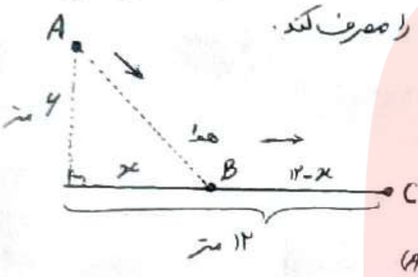
بنابراین اگر ابعاد صفحه $\boxed{x+4=12}$ و $\boxed{y+2=6}$ باشند، آنگاه مقدار کاغذ کمترین مقدار ممکن می‌شود.

تمرین: می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل با ضخامت معین و درباز بسازیم که گنجایش آن ۳۰۰۰ واحد مکعب باشد ارتفاع قوطی کدام باشد تا مقدار فلز به کار رفته برای تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq ۳$)

۱) ۱۰ ۲) ۴ ۳) ۱۵ ۴) ۸

جواب: $h=۱۰$ و $r=۱۰$ (مشابه کار در کلاس ص ۱۱۸ حل شود)

مثال: مرغ دریایی در نقطه A قرار گرفته و قصد دارد به نقطه C برود برای اینکار قسمتی از مسیر را در هوا و بخشی را روی سطح آب مطابق شکل زیر طی می‌کند. اگر این پرنده روی آب ۱۰ کالری بر متر و در هوا $۱۰\sqrt{۵}$ کالری بر متر انرژی مصرف کند، فاصله نقطه B از C چند متر باشد تا مرغ دریایی کمترین انرژی ممکن را مصرف کند.



معادله اولیه: $AB^۲ = ۶^۲ + x^۲ \Longrightarrow AB = \sqrt{۳۶+x^۲}$

معادله ثانویه (انرژی مصرف شده در مسیر ABC): $f(x) = (AB \times ۱۰\sqrt{۵}) + (BC \times ۱۰)$

$f(x) = \sqrt{۳۶+x^۲} \times ۱۰\sqrt{۵} + (۱۲-x)\times ۱۰$

$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(x) = \frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{۳۶+x^۲}} \times ۱۰\sqrt{۵} + (-۱۰) = ۰ \Longrightarrow \frac{۱۰\sqrt{۵}\,x}{\sqrt{۳۶+x^۲}} = ۱۰$

$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} ۱۰\sqrt{۵}\,x = ۱۰\sqrt{۳۶+x^۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۵x^۲ = ۳۶ + x^۲ \Rightarrow ۴x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = \pm ۳$

قابل قبول $\boxed{x=۳}$

جواب: $BC = ۱۲-x = ۱۲-۳ = \boxed{۹}$

کمترین انرژی $f(۳) = \sqrt{۴۵} \times ۱۰\sqrt{۵} + ۹\times ۱۰ = \boxed{۲۴۰}$

مطلق min

توجه: مثال ۵ ص ۱۱۷ کتاب درسی شبیه مثال بالا حل می‌شود به طور دقیق مطالعه شود، مهم است.