فصل ۴

درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق

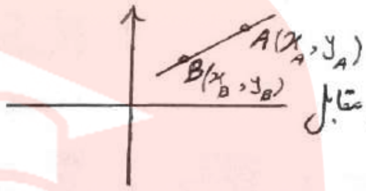
مشتق یکی از مفاهیم اساسی ریاضی است که دارای کاربردهای وسیع در ریاضیات و علوم دیگر است.

ایده اولیه در مورد مفهوم مشتق ، به شیب یک خط مربوط می‌شود.

یادآوری : هرگاه دونقطه از یک خط معلوم باشد آنگاه :

$$\text{شیب خط} = \frac{\text{تفاضل عرضها}}{\text{تفاضل طولها}}$$

مثلاً برای شکل مقابل



$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

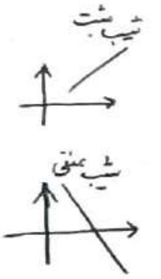
توجه : شیب خط افقی صفر است.

شیب خط عمودی وجود ندارد.

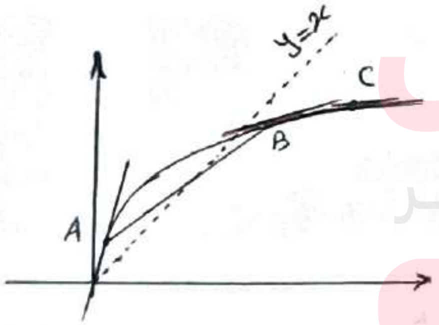
شیب خط مایل با نگاه از سمت چپ به آن

اگر سربالائی باشد شیب مثبت

اگر سرپائینی باشد شیب منفی



مثال : با توجه به شکل مقابل شیب‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



پاسخ ←

$$m_C < m_B < m_{AB} < m < m_A$$

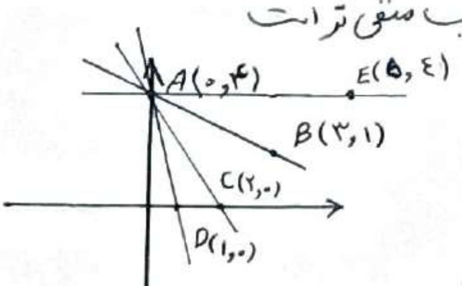
شیب خط $y=x$

در شیب‌های مثبت هرچقدر خط عمودی تر باشد عدد شیب بیشتر است و هرقدر خط افقی تر باشد عدد شیب کمتر است.

یا خط مماس بر منحنی

توجه : در شیب‌های منفی نیز هرچقدر خط عمودی تر باشد عدد شیب منفی تر است

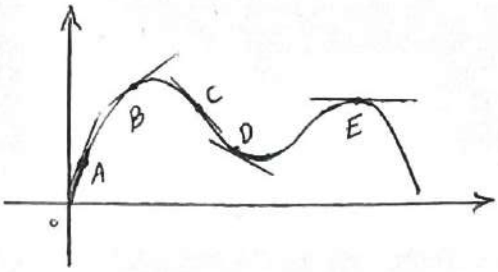
مثال : در شکل مقابل شیب‌ها را با هم مقایسه کنید.



پاسخ ←

$$m_{AD} < m_{AC} < m_{AB} < m_{AE}$$

$$m_{AD} = \frac{0-4}{1-0} = \frac{-4}{1} = -4 \qquad m_{AC} = -2 \qquad m_{AB} = -1 \qquad m_{AE} = 0$$



مثال: با توجه به نمودار مقابل جدول زیر را کامل کنید.

شیب	-3	0	2	-2	$\frac{2}{3}$
نقطه	C	E	A	D	B

پاسخ: ابتدا در هر نقطه یک خط مماس بر منحنی با رنگ دیگر مشخص می‌کنیم در اینصورت راحت‌تر به جواب می‌رسیم.

تعریف مشتق: حد زیر را در (صورت وجود) مشتق تابع f در نقطه a می‌نامند و با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهند

مشتق f در نقطه $x=a$: $\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2+3x$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=5$ واقع بر منحنی تابع بدست آورید.

پاسخ ← هرگاه در صورت مسئله کلمه تعریف مشتق آمده باشد باید حتماً از حد بیان شده استفاده کنیم.

$$f'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x^2+3x)-40}{x-5}\overset{\text{تیپ } \frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\cancel{(x-5)}(x+8)}{\cancel{(x-5)}}=\boxed{13}$$

مثال (خرداد ۹۸): مشتق تابع $f(x)=x^3-2$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-1$ بدست آورید.

پاسخ ←

$$f'(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^3-2)-(-3)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x+1)}}=1+1+1=\boxed{3}$$

اتحاد چاق و لاغر

تمرین (دی ۹۷): اگر $f(x)=1-2x$ باشد $f'(-1)$ را با استفاده از تعریف مشتق بدست آورید.

نکته: (تعریف مشتق به روش دیگر): در این روش علاوه بر محاسبه مشتق تابع در یک نقطه داده شده می‌توان فرمول‌های مشتق‌گیری را (که مشتق تابع در نقطه دلخواه x است) ثابت کرد.

مشتق تابع f در نقطه دلخواه : $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

مشتق تابع f در نقطه $x=a$: $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

مثال: مشتق تابع $f(x)=x^2+5$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول ۲ بدست آورید.

پاسخ ←

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{(2+h)^2+5}^{f(2+h)}-\overbrace{(9)}^{f(2)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{4}+4h+h^2+\cancel{5}-\cancel{9}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}}=4+0=\boxed{4}$$

مثال: اگر $f'(5)=12$ باشد حاصل حد $\lim_{h\to 0}\frac{f(5)-f(5+h)}{3h}$ را بدست آورید.

پاسخ ← حد داده شده را طبق تعریف حد مشتق در $x=5$ می‌نویسیم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(5)-f(5+h)}{3h}\overset{\text{فاکتور از منفی}}{=}-\frac{1}{3}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}}_{f'(5)}=-\frac{1}{3}\times f'(5)=-\frac{1}{3}\times 12=-4$$

فاکتور از ۳

تست: اگر $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2\sqrt{x}$ آنگاه $f'(4)$ کدام است؟

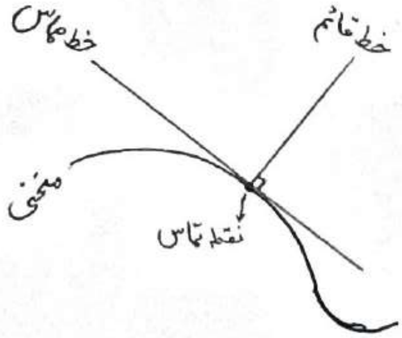
۱) ۲ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ ←

می‌دانیم: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\overset{\text{طبق فرض}}{=}2\sqrt{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=2\sqrt{x}\longrightarrow f'(4)=2\sqrt{4}=2\times 2=4$$

تمرین: اگر $f'(2)=6$ باشد آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{5h}$ را بدست آورید.



معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای روی منحنی :

مشتق تابع به ازای طول نقطه تماس = شیب خط مماس

$$m_{\text{مماس}} = f'(a)$$

چون خط قائم بر منحنی، در نقطه تماس بر خط مماس عمود است لذا :

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}}$$

نقطه تماس (x_1, y_1)

معادله خط مماس : $\boxed{y - y_1 = m_{\text{مماس}}(x - x_1)}$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = x^2 + 10x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی را بیابید.

پاسخ ← ابتدا با جایگزین کردن $x=2$ در معادله تابع عرض نقطه تماس را نیز بدست می‌آوریم.

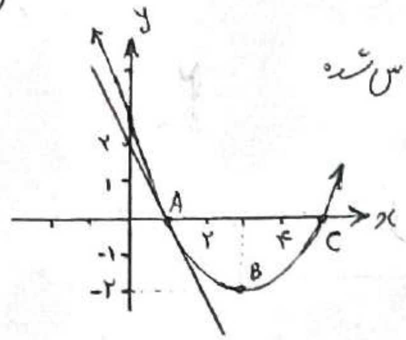
$$y = x^2 + 10x \xrightarrow{x=2} y = 24 \longrightarrow (\underset{x_1}{2}, \underset{y_1}{24}) \text{ نقطه تماس}$$

$$\text{شیب مماس } m = f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+10x) - (24)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+12)}{\cancel{(x-2)}} = \boxed{14}$$

معادله خط مماس : $y - y_1 = m_{\text{مماس}}(x - x_1) \longrightarrow y - 24 = 14(x-2) \longrightarrow \boxed{y = 14x - 4}$

تمرین : معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = 3x^2 - 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = -3$ واقع بر منحنی بنویسید.

مثال (خرداد ۹۹): در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=1$ بر نمودار f مماس شده است:



الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=1$ حساب کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.

پاسخ ← دو نقطه خط مماس (۰،۲) و (۱،۰) را داریم لذا:

$$f'(1) = \underset{\text{شیب مماس}}{m} = \frac{۲-۰}{۰-۱} = \frac{۲}{-۱} = -۲$$

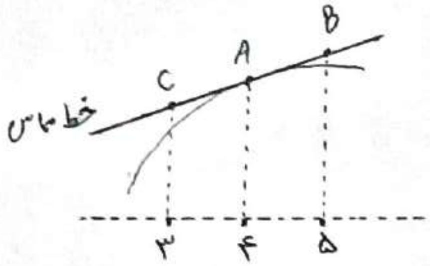
ب) $m_B < m_C$

m_B: ۰ (زیرا خط مماس در این نقطه افقی است)

m_C: عددی مثبت

مثال (خرداد ۹۹): برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f(۴)=۲۵$ و $f'(۴)=\frac{۳}{۲}$

با توجه به شکل مختصات نقاط A و B را بیابید.



پاسخ ← چون $f(۴)=۲۵ \rightsquigarrow A(۴,۲۵)$

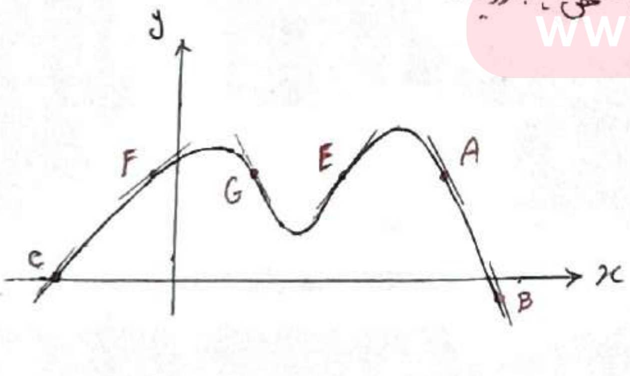
$$f'(۴)=\frac{۳}{۲} \Rightarrow m_{AB}=\frac{۳}{۲} \rightsquigarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۳}{۲}$$

$$\to \frac{y_B-۲۵}{\underbrace{\cancel{۵-۴}}_{۱}}=\frac{۳}{۲}$$

$$\to y_B = ۲۵+۱/۵ = ۲۶/۵ \rightsquigarrow B(۵,۲۶/۵)$$

توضیح: مختصات نقطه C نیز مشابه به مختصات B حاصل می‌شود.

مثال: نقاطی مانند A و B و C و D و E و F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مقابل مشخص کنید به طوری که:



الف) در A شیب مماس بر نمودار منفی باشد

ب) در B مقدار تابع و مقدار مشتق منفی باشد

پ) در C مقدار تابع صفر باشد ولی مشتق مثبت باشد

ت) در D مشتق صفر باشد

ث) E و F نقاط متفاوتی روی منحنی باشند که شیب یکسان دارند

ج) در G مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق منفی باشد.

مقدار مشتق = شیب مماس

مقدار تابع = عرض یک نقطه

پاسخ ← نقاط مورد نظر با رنگ دیگر مشخص شده و در هر نقطه مماس بر منحنی را رسم می‌کنیم

توجه: تمرینات کتاب درسی صفحه ۷۵ و ۷۶ حل و بررسی شوند.

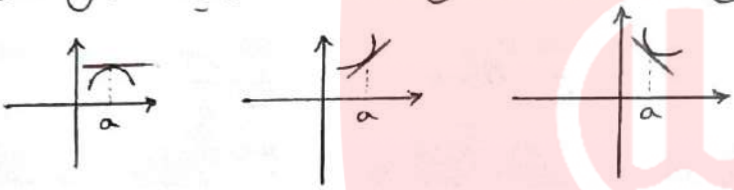
فصل ۴ ← درس ۲

مشتق پذیری

تابع f را در نقطه $x=a$ مشتق پذیر گویند هرگاه حد تعریف مشتق وجود داشته باشد (متناهی باشد)

f در a مشتق پذیر است $\Leftarrow$ اگر $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ وجود داشته باشد

توجه: می‌دانیم مشتق یعنی شیب خط مماس، پس اگر تابع (منحنی) در یک نقطه خط مماس داشته باشد و این خط مماس موازی محور y ها نباشد مشتق پذیر است.



مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=|x-3|$ را در نقطه $x=3$ بررسی کنید.

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{|x-3|-0}{x-3}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-3)}{x-3}=+1\\[2mm]\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=-1\end{cases}$$

$\longrightarrow$ حد وجود ندارد ($f'(3)$ وجود ندارد)

f در ۳ مشتق پذیر نیست.

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 2\\ 1 & x=2\end{cases}$ را در نقطه $x=2$ بررسی کنید.

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-2}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-1}{x-2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty\\[2mm]\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-1}{x-2}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

$\longrightarrow$ حد وجود ندارد ($f'(2)$ وجود ندارد) $\longrightarrow$ f در $x=2$ مشتق پذیر نیست.

مشتق راست: حد تعریف مشتق را از راست، مشتق راست f گویند و با نماد $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق راست: $$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتق چپ: حد تعریف مشتق را از چپ، مشتق چپ f گویند و با نماد $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق چپ: $$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

بنابراین چون شرط وجود حد آنستکه حد چپ = حد راست لذا شرط مشتق پذیری آنستکه $\boxed{f'_+(a)=f'_-(a)}$

مثال: در تابع با ضابطه $f(x)=|x|.[x]$ مشتق پذیری در $x=0$ را بررسی کنید.

پاسخ ⟵

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|[x]-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}[x]}{\cancel{x}} = \boxed{[0^+]=0}$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|[x]-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}[x]}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0^-} -[0^-] = \boxed{-(-1)=1}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ لذا f در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

تمرین (خرداد ۹۹): به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-4|$ را در $x=-2$ بررسی کنید.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آنگاه f در a پیوسته است؟

فرض: یعنی $f'(a)$ وجود دارد و یک عدد است

حکم: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

حد تابع — مقدار تابع

اثبات:

عدد

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right) = \lim_{x\to a}\left((x-a)\times\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\right) = \lim_{x\to a}(x-a)\times \overbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}^{f'(a)} = 0\times f'(a) = 0$$

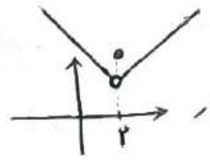
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\left(f(x)-f(a)\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) - \overbrace{\lim_{x\to a} f(a)}^{f(a)} = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

خود عدد ثابت = حد عدد ثابت

بنابراین طبق قضیه نتیجه می‌شود: اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد.

همچنین نتیجه می‌شود: اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد آنگاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست

مثلاً: تابع f با نمودار



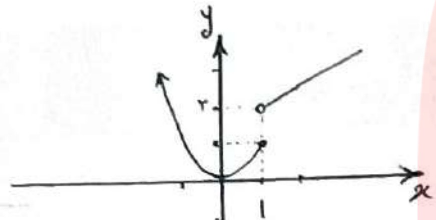
در $x=2$ پیوسته نیست و چون در این نقطه نمی‌توان مماس بر نمودار رسم کرد

لذا $f'(2)$ وجود ندارد (یعنی f در ۲ مشتق‌پذیر نیست)

کار در کلاس صفحه ۷۸ کتاب:

نمودار تابع $g(x)=\begin{cases} x^2 & x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ را رسم کنید چرا $g'(1)$ موجود نیست؟

پاسخ ←



روش اول: با توجه به نمودار چون g در $x=1$ پیوسته نیست پس در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست یعنی $g'(1)$ وجود ندارد.

(البته از اینکه تابع در $x=1$ حد ندارد نیز نتیجه می‌شود پیوسته نیست)

روش دوم: مشتق راست و چپ را با استفاده از تعریف مشتق بدست می‌آوریم:

$$g'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

$$g'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=2$$

بنابراین $g'(1)$ وجود ندارد (g در $x=1$ مشتق‌پذیر نیست)

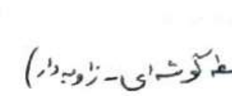
نقاط مشتق ناپذیر تابع: تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱- f در a پیوسته نباشد.

۲- f در a پیوسته باشد ولی

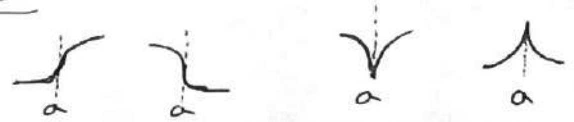
- مشتق چپ و راست در a هر دو موجود (متناهی) و نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای یا زاویه‌دار)

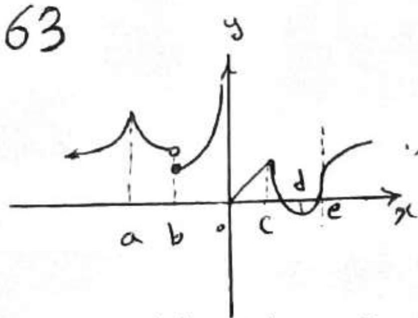
- مشتق چپ و راست یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای - زاویه‌دار)



- مشتق چپ و راست هر دو نامتناهی باشند. (در این صورت $x=a$ را مماس قائم بر منحنی گویند)

مماس قائم ←





مثال: با توجه به نمودار مقابل نقاط مشتق ناپذیر تابع f را با ذکر دلیل مشخص کنید.

پاسخ ⟵ تابع f در نقاط a و b و o و c و e مشتق ناپذیر است.

a: در این نقطه مماس قائم دارد

b: f در این نقطه ناپیوسته

o: f در این نقطه ناپیوسته است.

c: نقطه زاویه دار

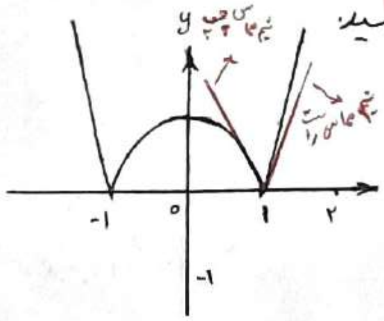
e: f در این نقطه مماس قائم دارد

کار در کلاس صفحه ۸۲ کتاب بررسی شود

نکته: در نقاط زاویه دار خط مماس بر منحنی وجود ندارد اما دو نیم مماس می توان رسم کرد.

مثال: پس از رسم نمودار تابع $f(x)=|x^2-1|$ مشتق پذیری در $x=1$ را با توجه به نمودار بررسی کنید.

ب) اگر در این نقطه مشتق پذیر نیست معادله نیم مماس چپ و راست را بنویسید.



پاسخ ⟵ نمودار $y=x^2$ را یک واحد به پایین انتقال می دهیم نمودار $y=x^2-1$ حاصل می شود سپس قرینه آن قسمتی که زیر محور xها است را آینه وار نسبت به محور x قرینه می کنیم نمودار $y=|x^2-1|$ حاصل می شود

در نقطه $x=1$ نمودار زاویه دار است ⟵ لذا f در $x=1$ مشتق پذیر نیست (یعنی $f'(1)$ وجود ندارد)

توجه شود با اینکه f در $x=1$ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست

شیب نیم مماس چپ $m = f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{|x^2-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1} \overset{\text{مزدوج}}{=} \lim_{x\to 1^-} -(x+1) = \boxed{-2}$

شیب نیم مماس راست $m = f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{|x^2-1|-0}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \boxed{2}$

معادله نیم مماس چپ: $y-y_0=m(x-x_0) \xrightarrow[m=-2]{(1,0)} y-0=-2(x-1) \longrightarrow \boxed{y=-2x+2}$

معادله نیم مماس راست: $y-y_0=m(x-x_0) \xrightarrow[m=2]{(1,0)} y-0=2(x-1) \longrightarrow \boxed{y=2x-2}$

کار در کلاس صفحه ۷۹ بررسی و حل شود

تابع مشتق: مشتق تابع f در نقطه دلخواه x از دامنه‌اش را با $f'(x)$ نشان می‌دهیم و به آن تابع مشتق می‌گویند.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

دامنه f': مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' گویند.

مثال: تابع مشتق $f(x)=x^2$ را بدست آورید.

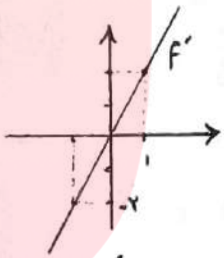
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$

$$=\lim_{h\to 0}2x+h=\boxed{2x}$$

تابع مشتق $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x)=2x}$

f' تابع چندجمله‌ای $\longrightarrow D_{f'}=\mathbb{R}$

(نمودار f)



(نمودار f')

توجه: می‌توان مقادیر مشتق تابع f را در نقاط مختلف دامنه‌اش با توجه به ضابطه بدست آمده حساب کرد مثلاً:

$f'(5)=10$ ، $f'(-3)=-6$ و $f'(0)=0$

مثال: برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ تابع مشتق و دامنه تابع مشتق را بدست آورید.

پاسخ ←

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\ \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{گویا کردن صورت}}{=}\lim\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h)-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

تابع مشتق $\Rightarrow$ $\boxed{f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}}$

$D_f=[0,+\infty)$

$D_{f'}=(0,+\infty)$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}3x & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$ الف) ضابطه f' را حساب کنید.

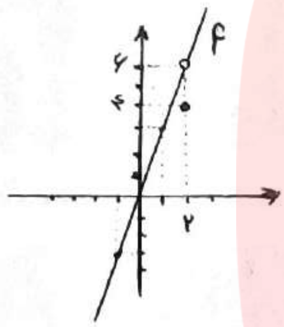
اگر $x\neq 2 \rightsquigarrow f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)-\cancel{3x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}}=3$

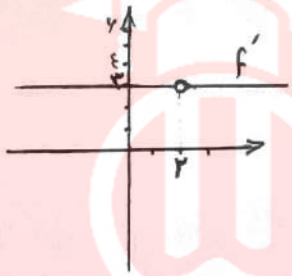
اگر $x=2 \rightsquigarrow f'(2)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{x-2}\ \begin{matrix}\nearrow +\infty\\ \searrow -\infty\end{matrix} \longrightarrow$ $f'(2)$ وجود ندارد

$\xrightarrow{\text{ضابطه } f'}$ $f'(x)=\begin{cases}3 & x\neq 2\\ \text{وجود ندارد} & x=2\end{cases}$

(توجه: در این مثال ضابطه f' را از تعریف مشتق بدست آوردیم در درسهای بعد از فرمولهای مشتق‌گیری نیز می‌توان ضابطه f' را بدست آورد.)

ب) نمودار f و f' و دامنه هریک را مشخص کنید.





$D_f=\mathbb{R}$ $\qquad$ $D_{f'}=\mathbb{R}-\{2\}$

کار در کلاس صفحه ۸۴ مشابه مثال بالا حل شود

مثال: (شهریور ۹۹) تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ 2x+1 & x<0\end{cases}$ داده شده است؟

الف) نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد. ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید. پ) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پاسخ ← تابع در صفر پیوسته نیست (زیرا $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$) بنابراین $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) از تعریف مشتق ضابطه را بدست می‌آوریم

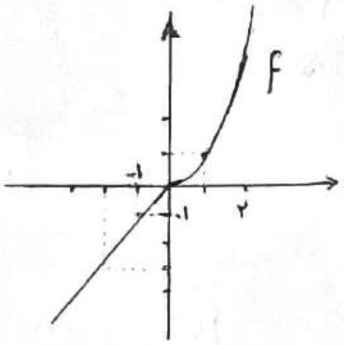
اگر $x>0$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}=2x$

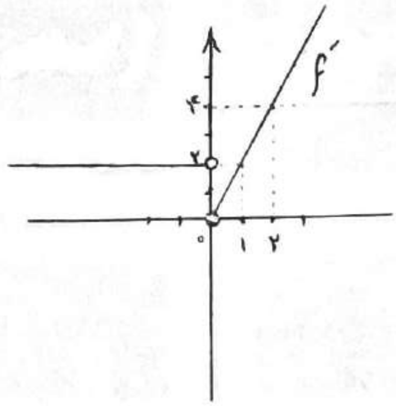
اگر $x<0$: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2(x+h)+1)-(2x+1)}{h}\overset{\text{ساده شود}}{=}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2$

$\xrightarrow{\text{ضابطه } f'}$ $f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ 2 & x<0\end{cases}$

(توجه شود در ضابطه f دامنه $x\geq 0$ را داشتیم اما چون در $x=0$ مشتق نداریم لذا در ضابطه f' دامنه $x>0$ شد)

پ)





دستور محاسبهٔ تابع مشتق، توابع مختلف (فرمولهای مشتق‌گیری)

1) $\boxed{f(x) = \underset{\uparrow}{C} \rightsquigarrow f'(x) = 0}$ مقدار ثابت

(به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت برابر صفر است.)

مثال: $f(x) = 5 \rightsquigarrow f'(x) = 0$ ، $y = \sqrt{3} \rightsquigarrow y' = 0$

2) $\boxed{f(x) = x \rightsquigarrow f'(x) = 1}$

3) $\boxed{f(x) = ax \rightsquigarrow f'(x) = a}$

مثال: $y = 3x \rightsquigarrow y' = 3$ ، $f(x) = -7x \rightsquigarrow f'(x) = -7$

4) $\boxed{f(x) = x^n \rightsquigarrow f'(x) = nx^{n-1}}$

مثال: $f(x) = x^5 \rightsquigarrow f'(x) = 5x^4$

$f(x) = -3x^7 \rightsquigarrow f'(x) = -3 \times 7x^6 = -21x^6$

5) $\boxed{f(x) = \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

۶) $\boxed{f(x) = \underset{\text{تابع}}{u} \pm \underset{\text{تابع}}{v} \rightsquigarrow f'(x) = u' \pm v'}$

یعنی برای محاسبه مشتق مجموع (یا تفاضل) دو تابع مشتق تک تک آنها را حساب می‌کنیم.

مثال: $f(x) = 5x^4 + \sqrt{x} \rightsquigarrow f'(x) = 20x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = 3x^2 - 4x + 7 - x^5 \longrightarrow y' = 6x - 4 + 0 - 5x^4$

۷) $\boxed{f(x) = \sqrt{\underset{\text{تابع}}{u}} \longrightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

مثال: $f(x) = \sqrt{2x+3} \longrightarrow f'(x) = \frac{(2x+3)'}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}}$

۸) $\boxed{f(x) = u^n \rightsquigarrow f'(x) = n u' u^{n-1}}$

مثال: $f(x) = (7x+5)^4 \longrightarrow f'(x) = 4(7x+5)'(7x+5)^{4-1}$

$f'(x) = 4(7)(7x+5)^3$

۹) $\boxed{f(x) = \sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{توان!}} f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$

مثال: $y = \sqrt[3]{x} \rightsquigarrow y' = \frac{(x)'}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

مثال: $y = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 2}$ ← توان کل عبارت زیر رادیکال!

$y' = \frac{(7x^2-3x+2)'}{5\sqrt[5]{(7x^2-3x+2)^{5-1}}} = \frac{14x-3}{5\sqrt[5]{(7x^2-3x+2)^4}}$

مثال: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2+10x$ در نقطه‌ای به طول $x=2$ روی منحنی تابع را بنویسید.

پاسخ ←

$$y = -x^2+10x \xrightarrow{x=2} y=16 \rightarrow \underset{\text{نقطه تماس}}{(\overset{x_0}{2}, \overset{y_0}{16})}$$

$$\begin{cases} \text{شیب مماس } m = f'(2) \longrightarrow m = f'(2) = -2(2)+10 = \boxed{6} \\ f'(x) = -2x+10 \end{cases}$$

معادله خط مماس : $y-y_0 = m(x-x_0) \longrightarrow y-16 = 6(x-2) \rightarrow \boxed{y=6x+4}$

مثال (دی ۹۷) : اگر $f'(2)=3$ و $g'(2)=5$ آنگاه حاصل عبارت $(2g-f)'(2)$ را بدست آورید.

$$(2g-f)'(2) = (2g'-f')(2) = 2g'(2)-f'(2) = 2(5)-3 = 7$$

مثال: اگر $f(x) = x+\sqrt{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$ را بدست آورید.

پاسخ ← طبق تعریف مشتق $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = f'(4)$ بنابراین کافیست از تابع $f(x) = x+\sqrt{x}$ مشتق بگیریم، جای x عدد ۴ قرار دهیم.

$$f'(x) = 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = f'(4) = 1+\frac{1}{2\sqrt{4}} = 1+\frac{1}{4} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

مثال: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$ را در $x=1$ بدست آورید (یعنی $f'(1) = ?$)

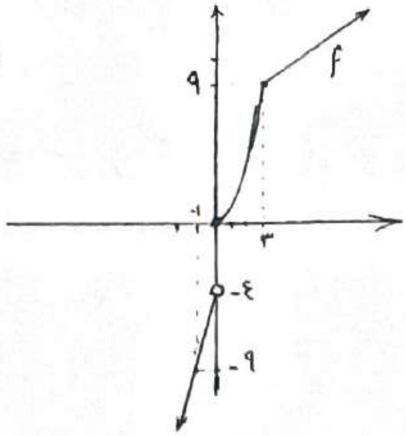
$$f'(x) = \frac{(x^2+3x)'}{2\sqrt{(x^2+3x)}} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \rightsquigarrow f'(1) = \frac{5}{2\sqrt{4}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

تمرین: اگر $f(x) = (x^3-3x+5)^6$ آنگاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ را بدست آورید.

تمرین: مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.
$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & x\geq 1 \\ 3x-1 & x<1 \end{cases}$$

پاسخ ← ابتدا پیوستگی را بررسی کنیم $\boxed{2 = \overset{\text{تابع}}{\text{مقدار}} = \underset{-}{\text{حد چپ}} = \text{حد راست}}$ لذا پیوسته است از طرفی $f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & x>1 \\ 3 & x<1 \end{cases} \leftarrow f'_+(1) = f'_-(1) = 3$ بنابراین f در $x=1$ مشتق پذیر است.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\le x\le 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است.



الف) نمودار f را رسم کنید. ← نمودار:

ب) نشان دهید $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارد.

پاسخ ← با توجه به نمودار، f در $x=0$ پیوسته نیست پس $f'(0)$ وجود ندارد.
نمودار f در $x=3$ زاویه دار است پس $f'(3)$ وجود ندارد.

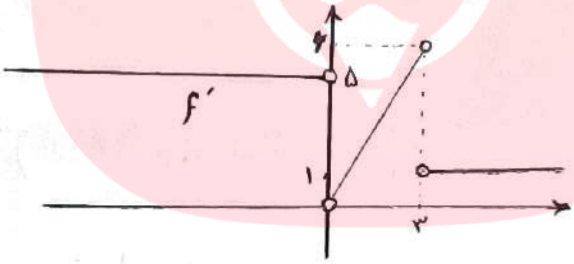
ب۲) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پاسخ ← از ضابطه‌ها مشتق می‌گیریم مساوی‌ها را (از دامنه) حذف می‌کنیم چون در $x=0$ و $x=3$ مشتق وجود ندارد.

$$f'(x)=\begin{cases}5 & x<0\\ 2x & 0<x<3\\ 1 & x>3\end{cases}$$

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

پاسخ ←



مشتق حاصلضرب دو تابع:

۱۰) $\boxed{y=\underbrace{f}_{\text{عبارت اولی}}.\underbrace{g}_{\text{دومی}} \longrightarrow y'=f'g+f.g'}$

$y'=$ (مشتق اولی × خود دومی) + (خود اولی × مشتق دومی)

مثال: $y=\sqrt{x}\,(3x^2+5x) \longrightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2+5x)+\sqrt{x}\,(6x+5)$

مثال: $f(x)=\sqrt{3x+1}\,(2x-4)^3$

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}(2x-4)^3+\sqrt{3x+1}\times 3(2)(2x-4)^2$$

مثال: $y=x.\sqrt[3]{x}$ چون x تنها زیر رادیکال است می‌توان به صورت توان کسری نوشت و ساده کرد سپس مشتق گرفت.

$\rightarrow y=x.x^{\frac{1}{3}}=x^{1+\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$

$\rightarrow y'=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

مشتق تقسیم دو تابع :

11) $$\boxed{y=\frac{f}{g} \longrightarrow y'=\frac{f'g-g'f}{g^2}}$$

$$y'=\frac{(\text{مشتق صورت} \times \text{خود مخرج}) - (\text{مشتق مخرج} \times \text{خود صورت})}{(\text{مخرج})^2}$$

(در عبارت مشتق تقسیم بهتر است همزمان با مشتق گیری جملات فارسی بالا را تکرار کنید)

مثال: $y=\frac{5x+4}{3x+1} \longrightarrow y'=\frac{5(3x+1)-3(5x+4)}{(3x+1)^2}$

مثال: $y=\frac{5x^3-x}{\sqrt{x}} \longrightarrow y'=\frac{(15x^2-1)\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x^3-x)}{(\sqrt{x})^2}$

مثال: $y=\frac{3}{x} \longrightarrow y'=\frac{\overset{\text{مشتق صورت}}{0}(x)-\overset{\text{مشتق مخرج}}{1}(3)}{x^2} \longrightarrow y'=\frac{-3}{x^2}$

مثال (امتحانات نهایی): مشتق توابع زیر را بدست آورید ساده کردن الزامی نیست.

خ ۹۹ 1) $f(x)=\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^8 \longrightarrow f'(x)=8\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)'\times\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^{8-1}$

$\longrightarrow f'(x)=8\left(\frac{-3(x^2+5)-2x(-3x+1)}{(x^2+5)^2}\right)\times\left(\frac{-3x+1}{x^2+5}\right)^7$

خ ۹۹ 2) $g(x)=(\frac{1}{x})\sqrt{3x+2} \longrightarrow g'(x)=(\frac{1}{x})'(\sqrt{3x+2})+(\frac{1}{x})(\sqrt{3x+2})'$

$\longrightarrow g'(x)=(-\frac{1}{x^2})\sqrt{3x+2}+(\frac{1}{x})(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})$

ش ۹۹ 3) $f(x)=\frac{3x+1}{\sqrt{x}}$

ش ۹۹ 4) $g(x)=(\frac{1}{x})(x^2+5x)^7$

خ ۹۹ خارج 5) $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{-3x+1}$

خ ۹۹ خارج 6) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

تمرین (کنکور ۹۸) مشتق تابع $f(x)=x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه $x=-3$ کدام است؟ (جواب: $\frac{3}{4}$)

توجه: کار در کلاس صفحه ۸۷ و ۸۸ کتاب درسی حل و بررسی شود.

تست (کنکور ۹۸ داخل) در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ کدام است؟

$\rightarrow f'(4)$

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{5}{6}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x)+\overset{-(-2)}{2}(1+\sqrt{x})}{(5-2x)^2} \rightsquigarrow f'(4)=\frac{7}{12}$$

تست (۹۸ خارج): در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{1}{4}+h)-f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟

$\rightarrow f'(\frac{1}{4})$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری از } f} f'(x)=\frac{-1\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{(\sqrt{x})^2} \overset{\text{ساده شود}}{=} \frac{-\sqrt{x}+\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} \rightsquigarrow f'(\frac{1}{4})=3$$

تست (۹۹ داخل): مشتق تابع با ضابطه $f(x)=\left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x}\right)^3$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{15}{4}$

پاسخ ← ابتدا توان را در صورت و مخرج کسر تأثیر می دهیم سپس مشتق می گیریم:

$$\xrightarrow{\text{تأثیر توان}} f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2-x)^3}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق گیری}} f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2-x)^3-\overbrace{3(2x-1)(x^2-x)^2}^{\text{مشتق مخرج}}(x^2+2x)}{(x^2-x)^6} \rightsquigarrow f'(2)=-\frac{15}{4}$$

تست (۹۸ داخل): تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\geq 2\\ -x^2+ax+b & x<2\end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است، b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: چون تابع مشتق پذیر است پس پیوسته نیز می باشد لذا در حل اینگونه سائل:

هم شرط پیوستگی را برقرار کنیم: $\boxed{\text{مقدار تابع} = \text{حد تابع}}$ ، حد راست = حد چپ

هم شرط مشتق پذیری را برقرار کنیم: $f'_+(2)=f'_-(2)$

شرط پیوستگی: $\lim_{x\to 2^-}(-x^2+ax+b)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)=f(2) \rightsquigarrow -4+2a+b=1 \Rightarrow \boxed{2a+b=5}$

$$f'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{(x-1)^2} & x>2\\ -2x+a & x<2\end{cases} \xrightarrow{\text{شرط مشتق پذیری}} f'_+(2)=f'_-(2) \rightsquigarrow -1=-4+a \rightsquigarrow a=3$$

$b=-1$

تست (۹۸ خارج): در تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{8}{ax+b} & ; x>2\\ -x^3+6x & ; x\leq 2\end{cases}$ اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

پاسخ ← مثل تست قبل هم شرط پیوستگی و هم شرط مشتق پذیری را برقرار کنید.

تست (کنکور ۹۷): اگر $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+4 & x\geq -2\\ x^3-x & x<-2\end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) صفر ✓ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ ← چون در تمام نقاط مشتق پذیر است در نقطه مرزی پیوستگی و مشتق پذیری را برقرار می کنیم

پیوستگی:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(ax^2+bx+4)=\boxed{4a-2b+4}=f(-2)\\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}(x^3-x)=(-2)^3-(-2)=-8+2=\boxed{-6}\end{cases}\longrightarrow 4a-2b+4=-6 \Rightarrow \boxed{4a-2b=-10}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2ax+b & x>-2\\ 3x^2-1 & x<-2\end{cases}\rightsquigarrow \begin{array}{l} f'_+(-2)=-4a+b\\ f'_-(-2)=11\end{array}\longrightarrow \boxed{-4a+b=11}$$

از حل دستگاه $b=-1$ و $a=-3$ بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases}-3x^2-x+4 & x\geq -2\\ x^3-x & x<-2\end{cases}\longrightarrow f(1)=-3(1)^2-(1)+4=0$$

تست (کنکور ۹۹) تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5-2x} & x\leq -2\\ -\frac{1}{3}x^2+bx+c & x>-2\end{cases}$ در $x=-2$ مشتق پذیر است مقدار c کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ✓ ۴) $\frac{2}{3}$

مشتق تابع مرکب (قاعدهٔ زنجیری)

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در اینصورت تابع fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\boxed{y=(f\circ g)(x) = f(g(x)) \longrightarrow y' = g'(x)\times f'(g(x))}$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=x^3+x+1$ باشد مشتق تابع gof را بازای $x=0$ بدست آورید.

به عبارت دیگر $(gof)'(0)=?$

پاسخ ← روش اول: از فرمول مشتق تابع مرکب

$$y=(g\circ f)(x)=g(f(x)) \longrightarrow y'=(g\circ f)'(x) = f'(x)\cdot g'(f(x))$$

$$\longrightarrow (g\circ f)'(0) = f'(0)\times g'(f(0)) = \frac{1}{2}\times 4 = \boxed{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x+1} \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \longrightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$g(x)=x^3+x+1 \longrightarrow g'(x)=3x^2+1 \longrightarrow g'(f(0)) = g'(1)=3(1)^2+1=4$$

روش دوم: ابتدا ضابطه gof را تشکیل داده وسپس مشتق می‌گیریم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = f^3(x)+f(x)+1 = (\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1}+1$$

$$(gof)'(x) = 3\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)(\sqrt{x+1})^2+\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow (gof)'(0)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

مثال (کنکور ۹۸) اگر $g(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2)=6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

$$(fog)'(2)=6 \xrightarrow{\text{مشتق زنجیری}} g'(2)\times f'(g(2))=6 \longrightarrow -3\times f'(5)=6 \longrightarrow \boxed{f'(5)=-2}$$

$$g'(x)=\frac{2(x-1)-1(2x+1)}{(x-1)^2} \longrightarrow g'(x)=\frac{-3}{(x-1)^2} \longrightarrow g'(2)=-3$$

$$g(x)=\frac{2x+1}{x-1} \longrightarrow g(2)=5$$

نکته: با استفاده از مشتق تابع مرکب داریم:

$$\boxed{y=f(\overset{g(x)}{u}) \Rightarrow y'=u'f'(u)}$$

مثال: اگر $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ و $y=f(\frac{1}{x})$ باشد مقدار $y'(\frac{3}{4})$ کدام است؟

پاسخ ←

$$y=f(\frac{1}{x}) \longrightarrow y'=(\frac{1}{x})'\times f'(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}\times f'(\frac{1}{x})$$

$$\longrightarrow y'(\frac{3}{4}) = \frac{-1}{(\frac{3}{4})^2}\times f'(\frac{1}{\frac{3}{4}}) = \frac{-16}{9}\times f'(\frac{4}{3}) = \frac{-16}{9}\times\frac{3}{5} = \boxed{\frac{-16}{15}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(\frac{4}{3})=\frac{1}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=\frac{3}{5}$$

مثال: اگر $g(x)=f(\sqrt{x})$ و $f'(1)=5$ مطلوبست محاسبه $g'(1)$.

پاسخ ←

$$g(x)=f(\overset{u}{\sqrt{x}})$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} g'(x)=(\sqrt{x})'f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\times f'(\sqrt{x}) \xrightarrow{x=1} g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1}}\times f'(1) = \frac{1}{2}\times 5 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

مثال: اگر $\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(h+2)-f(2)}{h}}_{f'(2)}=\frac{2}{3}$ آنگاه مشتق تابع $f(\sqrt{x-1})$ را به ازای $x=5$ بدست آورید.

$$y=f(\sqrt{x-1}) \longrightarrow y'=(\sqrt{x-1})'\times f'(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\times f'(\sqrt{x-1})$$

$$\xrightarrow{x=5} y'(5)=\frac{1}{2\times 2}\times f'(2) = \frac{1}{4}\times\frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

تمرین: اگر $f'(1)=-5$ آنگاه مشتق تابع $f(\frac{1}{x-1})$ در نقطه $x=2$ را بدست آورید.

مشتق مرتبه دوم: مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد

حال اگر f' مشتق پذیر باشد مشتق آن را با f'' نشان می دهیم (مشتق مرتبه دوم)

$$\boxed{y=f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=f'(x) \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} y''=f''(x)}$$

مثال: مشتق مرتبه دوم تابع $f(x)=5x^3-3x^2+6$ را محاسبه کنید، سپس $f''(-1)$ را محاسبه کنید.

$$f'(x)=15x^2-6x+0 \xrightarrow{\text{مشتق}} f''(x)=30x-6$$

$$f''(-1)=30(-1)-6=\boxed{-36}$$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$، حاصل $f''(0)$ را بدست آورید.

تست (ریاضی ۹۷): اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر از مرتبه دوم باشد و به ازای هر x حقیقی $g(x)=f(4-x^2)$ باشد و $f'(1)=-5$ و $f''(1)=-1$، مقدار $g''(\sqrt{3})$ کدام است؟

مشتق پذیری روی یک بازه:

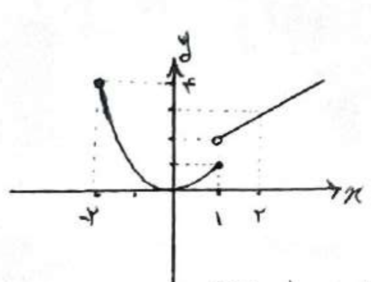
تابع f روی بازه (a,b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق پذیر است هرگاه در بازه (a,b) مشتق پذیر و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

نکته: اگر تابع f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد ($D_f=\mathbb{R}$)، گوئیم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق پذیر است.

نکته: f روی بازه $[a,b)$ مشتق پذیر است هرگاه f روی (a,b) مشتق پذیر و در نقطه a مشتق راست داشته باشد.
f روی بازه $(a,b]$ " " " " " b مشتق چپ داشته باشد.

مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & -2\le x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ را رسم کنید و مشتق پذیری تابع را روی بازه های $[-2,1]$، $(1,+\infty)$، $[1,2]$ و $(0,2)$ بررسی کنید.



پاسخ: f در بازه بسته $[-2,1]$ مشتق پذیر است زیرا در بازه باز $(-2,1)$ مشتق پذیر و در -2 مشتق راست دارد و در 1 مشتق چپ دارد.

در بازه باز $(1,+\infty)$ " " زیرا در همه نقاط این بازه مشتق پذیر است.

در " بسته $[1,2]$ مشتق پذیر نیست زیرا در 1 مشتق پذیری راست ندارد (چون پیوستگی راست در این نقطه ندارد)

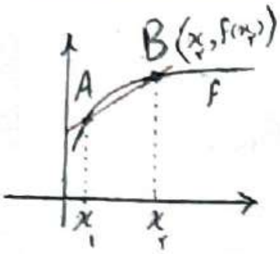
در $(0,2)$ مشتق پذیر نیست زیرا در $1\in(0,2)$ مشتق پذیر نیست.

توجه : با توجه به مطالب تدریس شده تا اینجا کار در کلاس ص ۸۹ و تمرینات صفحه ۹۰ تا ۹۲ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

فصل ۴ ← درس سوم (آهنگ تغییر)

آهنگ متوسط تغییر یک تابع: برای تابع f، آهنگ متوسط تغییر، در بازهٔ $[x_1 , x_2]$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{آهنگ متوسط } f = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1 - x_2}$$



نکته: برای محاسبه آهنگ متوسط در نمودار تابع، باید شیب پاره‌خطی که دو نقطه را به هم وصل می‌کند محاسبه کرد.

$$\text{آهنگ متوسط } f \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \overset{\text{شیب خط قاطع}}{m_{AB}} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

مثال: (شهریور ۹۸): آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x+2}$ را وقتی متغیر از $x_1=2$ به $x_2=7$ تغییر می‌کند.

پاسخ ←

$$\text{آهنگ متوسط } f \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(2)}{7-2} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{4}}{5} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$$

توجه: اگر $\Delta x = x_2 - x_1$ درنظر بگیریم آنگاه آهنگ متوسط تغییر f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$x_2 = x_1 + \Delta x$

$$\text{آهنگ متوسط } f : \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\Delta x} = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=x^2+5x+4$ وقتی $x_1=3$, $\Delta x=0.4$ باشد بدست آورید.

$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow 0.4 = x_2 - 3 \rightarrow x_2 = 3.4$

پاسخ ←

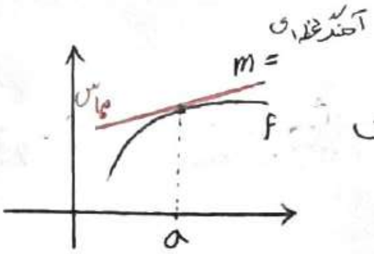
$$\text{آهنگ متوسط } f : \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(3.4)-f(3)}{3.4-3} = \frac{32.56-28}{0.4} = 11.4$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر یک تابع: برای تابع f آهنگ لحظه‌ای تغییر، در نقطه $x=a$ برابر مشتق تابع f در این نقطه:

آنی

$$\text{آهنگ لحظه‌ای } f \text{ در } x=a = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

بنابراین برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در یک نقطه کافیست مقدار مشتق را در آن نقطه محاسبه کنیم.



نکته: برای محاسبه آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع با استفاده از نمودار کافیست شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه را بدست آوریم.

(شیب خط مماس)

$$f \text{ آهنگ لحظه‌ای } = m_{\text{مماس}} = f'(a)$$

مثال: آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\sqrt{x^2+16}$ در بازه $[0,3]$، از آهنگ لحظه‌ای در $x=\sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟

پاسخ ←

$$f(x)=\sqrt{x^2+16} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+16}}$$

$$f \text{ آهنگ لحظه‌ای در } x=\sqrt{2} = f'(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\sqrt{\frac{2}{18}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

$$f \text{ آهنگ متوسط در } [0,3] = \frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{16}}{3}=\frac{5-4}{3}=\frac{1}{3}$$

⟵ برابرند ⟵ اختلاف آنها = ۰

تست (کنکور ۹۸ داخل): در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=2$ از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1,4]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ✓ ۳) ۰/۴۵ ۴) ۰/۷۵

مثال: اگر آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)$ در نقطه $x=-1$ برابر ۲ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1-2h)-f(-1)}{h}$ را محاسبه کنید.

پاسخ ←

(طبق تعریف حد مشتق باید اختلاف دو پرانتز صورت در مخرج جا شود)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-2h)-f(-1)}{h} = -2\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-2h)-f(-1)}{-2h} = -2f'(-1) = -2\times 2 = -4$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای در } x=-1 = 2 \longrightarrow f'(-1)=2$$

تمرین: در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{1}{x^2}$، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی x از ۱ تا ۳ تغییر کند با آهنگ لحظه‌ای در $x=a$ برابر است. مقدار a کدام است؟ (جواب: $a=\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$)

تمرین: آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در بازه $[1, ۲/۲۵]$ با آهنگ لحظه‌ای تابع f در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟ (جواب: $x=\frac{25}{16}$)

$\boxed{x = f(t)}$ (مکان = x ، زمان = t)

سرعت متوسط : همان آهنگ متوسط تابع مکان - زمان است

$$\text{سرعت متوسط } \bar{V} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

سرعت لحظه‌ای : همان آهنگ لحظه‌ای تابع مکان - زمان است .

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t \quad V = f'(t)$$

مثال : معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - 2t + 3$ است ، در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 4]$ برابر است؟

پاسخ ←

$$\text{سرعت متوسط } \bar{V} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{11 - 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای در لحظه } t_0 \quad V = f'(t_0) = 2t_0 - 2 \xrightarrow{\text{برابر}} 2t_0 - 2 = 2 \Rightarrow 2t_0 = 4 \to \boxed{t_0 = 2}$$

$f'(t) = 2t - 2$

یعنی در لحظه ۲ $t=2$ سرعت لحظه‌ای = سرعت متوسط

مثال (دی ۹۷) یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^2$ گرم است آهنگ تغییر متوسط جرم این توده در بازه زمانی $[1, 4]$ چقدر است؟

فرض کنیم $f(t)$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر جرم} = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{34 - 3}{3} = \frac{31}{3}$$

یا $\frac{\Delta m}{\Delta t}$

توجه : کار در کلاس و تمرینات صفحه ۹۹ و ۱۰۰ کتاب درسی حل و بررسی شوند.

تمرین (خرداد ۹۸) معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ برحسب متر داده شده است. تعیین کنید که در چه زمانی ، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 4]$ با هم برابرند.

تمرین (شهریور ۹۹) خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -5t^2 + 20t$ حرکت می‌کند ، که در آن $0 \leq t \leq 5$ برحسب ثانیه است ، سرعت لحظه‌ای در $t = 2$ چقدر است؟

تمرین (خرداد ۹۹ خارج) : معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه زمانی $[0, 5]$ برحسب ثانیه داده شده است . در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه $[0, 5]$ برابر است؟

تمرین (خرداد ۹۹) : یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t^3$ گرم است .

الف) جرم این توده در بازه زمانی $1 \leq t \leq 4$ چند گرم افزایش یافته بود؟ (یعنی آهنگ متوسط تغییر جرم)

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 4$ چقدر است؟ (یعنی آهنگ لحظه‌ای تغییر جرم)