فصل ۳ (حد بی نهایت و حد در بی نهایت)

درس ۱ : حد بی نهایت

بخش‌پذیری چندجمله‌ایها بر $(x-a)$: تقسیم مقابل را درنظر بگیرید:

$$\begin{array}{l|l} \overset{\text{مقسوم}}{f(x)} & \underline{x-a} \ \text{مقسوم‌علیه} \\ & Q(x) \ \text{خارج قسمت} \\ \hline R \leftarrow \text{باقی مانده} & \end{array}$$

رابطه تقسیم را به صورت خطی به شکل $\boxed{\underset{\text{مقسوم}}{f(x)} = \underset{\text{مقسوم‌علیه}}{(x-a)} \times \underset{\text{خارج قسمت}}{Q(x)} + \underset{\text{باقی مانده}}{R}}$ نیز نشان می‌دهند.

اگر در رابطه تقسیم $x=a$ قرار دهیم داریم:

$$f(a) = \cancel{(a-a)} \times Q(a) + R \longrightarrow \boxed{f(a) = R}$$

بنابراین برای بدست آوردن باقی مانده تقسیم بدون انجام تقسیم ابتدا ریشه مقسوم‌علیه را بدست آورده و در مقسوم به جای x ها جایگزین می‌کنیم.

مثال: باقی مانده تقسیم $f(x) = 4x^2 + 7x + 5$ بر $(x-3)$ را بدست آورید.

پاسخ ←

$$x-3=0 \longrightarrow x=3$$

$$\underset{\text{باقی مانده}}{R} = f(3) = 4(3)^2 + 7(3) + 5 = 36 + 21 + 5 = \boxed{62}$$

ب) با انجام تقسیم $f(x)$ بر $(x-3)$ نیز به باقیمانده بدست آمده در (الف) برسید.

$$\begin{array}{l|l} 4x^2+7x+5 & \underline{x-3} \\ -(4x^2-12x) & 4x+19 \ \leftarrow \text{خارج قسمت} \\ \hline 0 \quad 19x+5 & \\ \quad -(19x-57) & \\ \hline \quad 0 \quad +62 \leftarrow \text{باقی مانده} & \end{array}$$

محاسبات:

$$\frac{4x^2}{x} = 4x \qquad \frac{19x}{x} = 19$$

نکته: اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)$ برابر صفر باشد آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$$R = f(a) = 0$$

مثال: الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دوجمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

پاسخ ← $x+1=0 \rightsquigarrow x=-1$

باقیمانده: $R=f(-1)=2(-1)^3+(-1)^2+1=-2+1+1=\boxed{0}$

چون باقی مانده صفر شد بنابراین $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم $f(x)$ را به صورت حاصلضرب عاملها بنویسید (یعنی تجزیه کنید)

پاسخ ← وقتی باقی مانده تقسیم صفر باشد، تجزیه f عبارت $\boxed{\text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیه}}$ می‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+x^2+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(2x^3+2x^2) & 2x^2-x+1 \\ \hline 0 \quad -x^2+1 & \\ -(-x^2-x) & \\ \hline 0 \quad +x+1 & \\ -(x+1) & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

خارج قسمت

$\frac{2x^3}{x}=2x^2$

$\frac{-x^2}{x}=-x$

$\frac{x}{x}=1$

مقسوم علیه　　خارج قسمت

$$\boxed{f(x)=2x^3+x^2+1=(x+1)(2x^2-x+1)}$$

تست (کنکور ۹۹): فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x)=P(x-1)+P(1-x)$ آنگاه باقیمانده حاصل تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

-1　　$\boxed{\text{صفر}}$　　1　　2

پاسخ ← $P(x)$ بر x^2-1 بخش‌پذیر است یعنی بر $(x+1)(x-1)$ بخش‌پذیر است پس باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ صفر است و باقیمانده تقسیم $P(x)$ بر $x+1$ صفر است.

$$\begin{cases}P(1)=0\\ P(-1)=0\end{cases}$$

باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $(x-2)$ برابر $Q(2)$ است:

$$Q(x)=P(x-1)+P(1-x) \xrightarrow{x=2} Q(2)=P(1)+P(-1)=0+0=0$$

مثال: اگر $f(x)=x^3+ax^2+4x-1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را به دست آورید و سپس $f(x)$ را تجزیه کنید.

پاسخ ← چون f بر $x-1$ بخش‌پذیر است پس:

باقی مانده: $R=f(1)=0$

$$\rightsquigarrow 1^3+a(1)^2+4(1)-1=0 \rightsquigarrow a+4=0 \rightsquigarrow a=\boxed{-4}$$

$$\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{a=-4} \begin{array}{l|l} f(x)=x^3-4x^2+4x-1 & x-1 \\ \cline{2-2} -(x^3-x^2) & x^2-3x+1 \\ \hline 0 \quad -3x^2+4x-1 & \\ -(-3x^2+3x) & \\ \hline 0 \quad x-1 & \\ -(x-1) & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{x^3+4x^2+4x-1=(x-1)(x^2-3x+1)}$$

تجزیه

تمرین ۱: اگر باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)=2x^4+mx+2$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد، باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ را بیابید.

تمرین ۲: مقدار K را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3+4x^2-Kx-8$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر باشد.

توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا کار در کلاس صفحه ۵۱ حل و بررسی شود.

حد توابع کسری:

اگر حد تابع f و g وقتی $x \to a$ به ترتیب L و m باشد آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{L}{m}$$

چهار حالت برای حد توابع کسری $\frac{f}{g}$ وقتی $x\to a$ ممکن است حاصل شود:

1) $\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{L\neq 0}{m\neq 0}$ 2) $\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{0}{m} = 0$ 3) $\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{L}{0}$ وجود ندارد

4) $\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{0}{0}$ مبهم

حالت (۱) و (۲) جواب حد مستقیماً حاصل می‌شود حالت (۳) را در حد بی‌نهایت مورد بررسی قرار می‌دهیم حالت (۴) را مبهم گویند و باید عامل صفرکننده $(x-a)$ را در صورت و مخرج ظاهر و سپس حذف کنیم. (عامل صفرکننده را به روش تجزیه، تقسیم کردن یا گویا کردن بوجود می‌آوریم)

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^3+x^2+1}{x+1} = \frac{2(2)^3+2^2+1}{2+1} = \frac{21}{3} = 7$

ب) $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-5x-14}{x^2+4} = \frac{(-2)^2-5(-2)-14}{(-2)^2+4} = \frac{4+10-14}{4+4} = \frac{0}{8} = 0$

مثال: حد توابع زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-25} = \frac{25-35+10}{25-25} = \frac{0}{0} \rightarrow$ مبهم $\rightarrow$ عامل صفرکننده $(x-5)$ را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

$$\underset{\text{مزدوج}}{\overset{\text{تیپ جمع مشترک}}{=}} \lim_{x\to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x-2)}{\cancel{(x-5)}(x+5)} = \frac{5-2}{5+5} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

ب) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x}$ = مبهم $\frac{0}{0}$ $= \lim_{x\to -3} \frac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{-3-3}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$

ج) $\lim_{x\to -2} \frac{2x^3+3x^2+4}{x^2+5x+6}$ = مبهم $\frac{0}{0}$ $= \lim_{x\to -2} \frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x+3)} = \frac{8+2+2}{-2+3} = \frac{12}{1} = 12$

(هرگاه درصورت یا مخرج چندجمله‌ای درجه ۳ یا درجه ۲ باشد که تجزیه آن راحت نباشد می‌توان از تقسیم آن بر عامل صفرکننده در چرکنویس تجزیه را بدست آورد.

$2x^3+3x^2+4 \;\big|\; \frac{x+2}{2x^2-x+2}$ ، ۰ ← باقیمانده

لذا $\boxed{2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)}$

مقسوم علیه (عامل صفرکننده) — خارج قسمت)

د) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x^3-8}$ = مبهم $\frac{0}{0}$ $= \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\cancel{(x-2)}(2x+1)}^{\text{تجزیه از تقسیم بر عامل صفرکننده}}}{\underbrace{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}_{\text{تجزیه از اتحاد چاق و لاغر یا تقسیم کردن بر عامل صفرکننده}}} = \frac{4+1}{4+4+4} = \frac{5}{12}$

اتحاد چاق و لاغر:

$$\begin{cases} a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \end{cases}$$

$x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+2^2)$

$2x^2-3x-2 \;\big|\; \frac{x-2}{2x+1}$ ، ۰

هـ) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x^2+x-1}{4x^2+4x-3}$ = مبهم $\frac{0}{0}$ $= \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(2x+2)}{\cancel{(x-\frac{1}{2})}(4x+6)} = \frac{1+2}{2+6} = \frac{3}{8}$

تجزیه از تقسیم بر عامل صفرکننده

$2x^2+x-1 \;\big|\; \frac{x-\frac{1}{2}}{2x+2}$ ، ۰

$4x^2+4x-3 \;\big|\; \frac{x-\frac{1}{2}}{4x+6}$ ، ۰

محاسبات تقسیم در چرکنویس به عهده دانش‌آموز

و) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{2x^3-13x^2+24x-9} =$

نکته: اگر در حدهای $\frac{0}{0}$ صورت یا مخرج یا هردو عبارت رادیکالی داشته باشد برای ایجاد عامل صفرکننده، صورت و مخرج را در مزدوج عبارت رادیکالی ضرب می کنیم تا گویا شود.

مثال: حدهای زیر را محاسبه کنید

الف) ابهام $\frac{0}{0}$ — اتحاد مزدوج

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}\times\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{8\times 4} = \boxed{\frac{1}{32}}$$

ب) ۹۸ — ابهام $\frac{0}{0}$ — اتحاد مزدوج

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x^2+x-2)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{3\times 2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

ج) ۹۷ و ۹۹ ش — ابهام $\frac{0}{0}$ — مخرج اتحاد مزدوج

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}$$

$x+1-4=x-3$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\cancel{(x-3)}} = \frac{6\times 4}{1} = 24$$

د) کنکور

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x} =$$

هـ) کنکور

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}} =$$

و) ۹۹ خ

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}} =$$

نکته: اگر در حد توابع کسری که $\frac{0}{0}$ می‌شود در صورت و مخرج عبارت رادیکالی با ریشه ۳ باشد از اتحاد چاق و لاغر برای گویا کردن عبارت رادیکالی استفاده می‌کنیم. (معمولاً پرانتز لاغر اتحاد چاق و لاغر را داده اند باید صورت و مخرج را در پرانتز چاق اتحاد ضرب کنیم)

$$\underbrace{(\sqrt[3]{x}+2)}_{\text{لاغر}}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2^2)}_{\text{چاق}} = (\sqrt[3]{x})^3+2^3 = \underbrace{x+8}_{\text{گویا شد}}$$

مثال: حدهای زیر را حساب کنید:

الف) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2} = \frac{0}{0}$ مبهم

در پرانتز چاق اتحاد صورت و مخرج را ضرب می‌کنیم

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}-1\sqrt[3]{x}+1^2)}{(\sqrt[3]{x^2}-1\sqrt[3]{x}+1^2)} \overset{\text{اتحاد چاق و لاغر}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{(\sqrt[3]{x})^3+1^3}{(x+1)(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)} = \frac{1}{1\times(1+1+1)} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ب) $\lim_{x\to 8} \frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2} = \frac{0}{0}$ مبهم

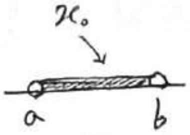
$$= \lim_{x\to 8} \frac{(x^2-8x)}{(\sqrt[3]{x}-2)}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)} = \lim_{x\to 8} \frac{(x^2-8x)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}$$

$$= \lim_{x\to 8} \frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{(x-8)}} = \frac{8\times(4+4+4)}{1} = 96$$

ج) کنکور ۹۸ $\lim_{x\to -8} \frac{x^2+10x+16}{12+6\sqrt[3]{x}} =$

د) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x-2}{\sqrt[3]{x}-1}$

توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا، کار در کلاس صفحه ۵۳ به طور کامل حل شوند.



مفهوم همسایگی : هر بازهٔ باز که x_0 در آن باشد را یک همسایگی از x_0 گویند

(بنابراین وقتی (a,b) یک همسایگی از x_0 باشد آنگاه حتماً $x_0 \in (a,b)$)

مثلاً بازهٔ $(1,3)$ یک همسایگی برای اعداد ۲ و ۱٫۵ و $\sqrt{3}$ و .... است زیرا $2 \in (1,3)$ و ....

ولی $(1,3)$ یک همسایگی برای ۳ و ۱ نیست زیرا $3 \notin (1,3)$, $1 \in (1,3)$

همسایگی محذوف : اگر (a,b) یک همسایگی از x_0 باشد آنگاه مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ یک همسایگی محذوف x_0 است.

همسایگی راست : بازه‌ای که شامل فقط نقاط سمت راست x_0 باشد

همسایگی چپ : بازه‌ای که شامل فقط نقاط سمت چپ x_0 باشد.

مثلاً : بازهٔ $(2,4)$ یک همسایگی چپ ۴ و یک همسایگی راست ۲ می‌باشد

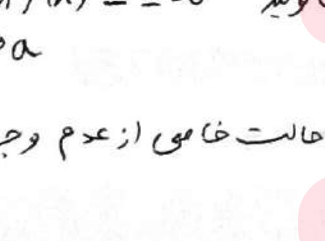
حد بی‌نهایت : (حد نامتناهی)

حدهایی که حاصل آنها $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود را حد بی‌نهایت گویند $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

توجه : می‌دانیم $\pm\infty$ یک عدد حقیقی نیست و رابطهٔ $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ به حالت خاصی از عدم وجود حد اشاره دارد.

تعریف : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد.

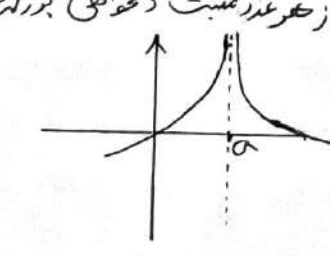
رابطهٔ $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty}$ به این معناست که $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر می‌شود



به شرط آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود

تعریف ۲ : فرض کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد

رابطهٔ $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty}$ به این معناست که $f(x)$ از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر می‌شود به شرط

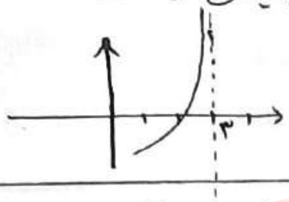


آنکه x به قدر کافی به a نزدیک شود

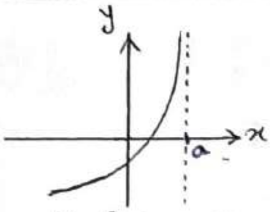
مثال : عبارت $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست ؟ توضیح دهید و نمودار برای آن رسم کنید.

پاسخ ← یعنی $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر می‌شود به شرط آنکه x به قدر کافی از سمت مقادیر کوچکتر از ۳ به ۳ نزدیک شود.

(یا می‌توان گفت : وقتی x از سمت مقادیر کوچکتر از ۳ به ۳ نزدیک می‌شود ، $f(x)$ از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر می‌گردد)

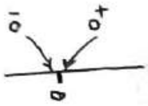


تمرین : برای حدهای $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ نمودار رسم کنید.



$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

انواع صفر:
- صفر مطلق ← 0
- صفر حدی:
  - ← 0^+ : عددی مثبت بسیار بسیار نزدیک صفر
  - ← 0^- : عددی منفی بسیار بسیار نزدیک صفر



نکته : می‌دانیم $\boxed{\frac{\text{عدد}}{0} = \text{وجود ندارد}}$ اما در حالت حدی $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \pm\infty}$

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = \frac{0}{0^+} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \\ \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \\ \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

نکته : برای محاسبه مقدار جزء صحیح یک عدد حقیقی باید ببینیم عدد حقیقی داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی است عدد صحیح کوچکتر حاصل جزء صحیح می‌باشد.

$$n \le \overset{\text{عدد حقیقی}}{x} < n+1 \Longrightarrow [x] = n$$

مثلاً $-4 < -3.9 < -3 \rightarrow [-3.9] = -4$ و $5 < 5.7 < 6 \rightarrow [5.7] = 5$

$[0^+] = 0$ ، $0 < 0^+ < 1$ و $[0^-] = -1$ ، $-1 < 0^- < 0$

مثال: حاصل حدهای زیر را در صورت وجود بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{[x]}{x} = \dfrac{[0^+]}{0^+} = \dfrac{0}{0^+} = 0$

$\dfrac{0}{\text{عدد}} = 0$

ب) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{[x]-1} = \dfrac{1^+-1}{[1^+]-1} = \dfrac{0^+}{1-1} = \dfrac{0^+}{0}$ وجود ندارد

$1 < 1^+ < 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[x]-3}{x-3} = \dfrac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \dfrac{2-3}{0^-} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

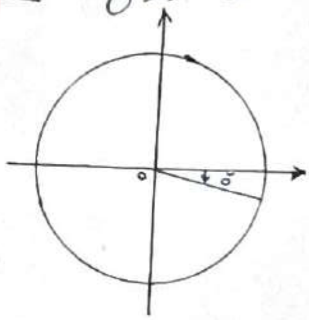
د) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2}{|x-5|} = \lim\limits_{x\to 5^\pm} \dfrac{2}{|x-5|} = \dfrac{2}{|5^\pm - 5|} = \dfrac{2}{|0^\pm|} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{[x]}{\sin x} = \dfrac{[0^-]}{\sin 0^-} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

ربع چهارم

می دانیم $\sin 0 = 0$

و چون زاویه 0^- در ربع چهارم است و سینوس در ربع چهارم منفی است لذا $\sin 0^- = 0^-$



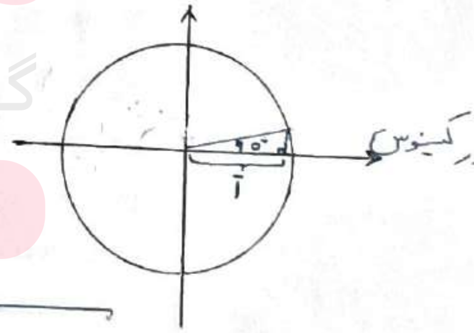
و) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1-\cos x} = \dfrac{1}{1-\cos 0^+} = \dfrac{1}{1-1^-} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

ربع اول

می دانیم $\cos 0 = 1$

و چون زاویه 0^+ در ربع اول است اگر از انتهای زاویه عمود بر محور کسینوسها رسم کنیم مقدار آن از 1 کمتر می شود

$\cos 0^+ = 1^-$



ز) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{2}{\cos x} = \dfrac{2}{\cos \frac{\pi}{2}^+} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

ربع دوم

علامت کسینوس منفی

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ اما $\cos\frac{\pi}{2}^+ = 0^-$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sin \frac{\pi}{2}^-}{\cos \frac{\pi}{2}^-} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\frac{\pi}{2}^-$ از $\frac{\pi}{2}$ کمتر است ← ربع اول

علامت کسینوس مثبت است

47

ز) $\lim\limits_{x\to\pi^+}\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin\pi^+} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

π^+ از ۱۸۰ بیشتر لذا در ربع سوم
علامت سینوس در این ربع منفی است
$\sin\pi = 0$ اما $\sin\pi^+ = 0^-$

تست ۳ (کنکور ۹۹): حاصل $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{[x]+3}{x+2}$ کدام است؟

۱) $-\infty$ ۲) -1 ۳) صفر ✓ ۴) ۱

$\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{[x]+3}{x+2} = \dfrac{[(-2)^-]+3}{-2^-+2} = \dfrac{-3+3}{0^-} = \dfrac{0}{0^-} = 0$

-2^- مثلاً $-2/1$

تست (کنکور ۹۸ داخل): در مورد تابع $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+|x|}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ ۲) $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ ✓

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-1}{x+|x|} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-1}{x-x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2-1}{0} = \dfrac{-1}{0} =$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{x+|x|} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{x+x} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2-1}{2x} = \dfrac{0-1}{2(0^+)} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

تست (کنکور ۹۸ خارج): در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+2\cos x}$، کدام بیان درست است؟

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$ ✓ ۲) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$ ۳) $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}} f(x) = -\infty$ ۴) $\lim\limits_{x\to\frac{4\pi}{3}} f(x) = +\infty$

می‌دانیم

$\cos\dfrac{2\pi}{3} = \underbrace{\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)}_{\text{ربع دوم}} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos\dfrac{4\pi}{3} = \underbrace{\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)}_{\text{ربع سوم}} = -\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^-}\dfrac{\sin x}{1+2\cos x} = \dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+2\cos(\frac{2\pi}{3})^-} = \dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{1+2(-\frac12^+)} = \dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{1-1^-} = \dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{0^+} = +\infty$

مثلاً $(-0/4)$ $(0/8)$

$\lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(\frac{2\pi}{3})^+}\dfrac{\sin x}{1+2\cos x} = \dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{1+2(-\frac12)^-} = \dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{1-1^+} = \dfrac{\frac{\sqrt3}{2}}{0^-} = -\infty$

مثلاً $(-0/6)$ $1/2$

جواب گزینه ۴ باید $\pm\infty$ نوشته می‌شد.

تمرین : حاصل حدهای زیر را بدست آورید:

الف) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{|x|}\times\frac{x+1}{\sin^2 x} =$

ب) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-2x-1}{9-x^2} =$

ج) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1-[x]}{x-1} =$

د) $\lim\limits_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{1+\cos x} =$

هـ) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{[x]-3}{x|x|-9} =$

و) $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+} \tan x \times \lim\limits_{x\to\pi^+} \cot x =$

توجه : با توجه به مطالب تدریس شده تمرینات صفحه ۵۷ کتاب درسی به طور کامل حل و بررسی شوند.

یادداشت :

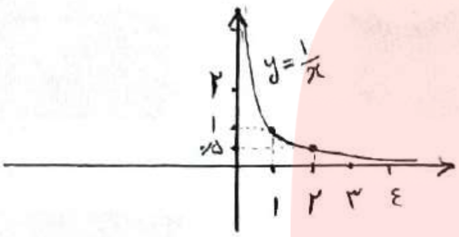
فصل ۳

درس دوم : حد در بی‌نهایت

حد تابع f وقتی $x \to \pm\infty$ ، را حد در بی‌نهایت گویند و به صورت $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ نشان می‌دهند.

(به عبارت دیگر بررسی رفتار تابع f وقتی x خیلی بزرگ می‌شود یا وقتی x خیلی کوچک می‌شود را حد در بی‌نهایت گویند)

مثال: رفتار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در بی‌نهایت (یعنی وقتی $x\to\pm\infty$) مورد بررسی قرار دهید.



x	۱	۲	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$\dots\to+\infty$
$f(x)=\frac{1}{x}$	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	$\dots\to 0$

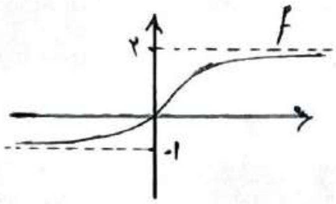
جدول و نمودار نشان می‌دهد وقتی x خیلی بزرگ می‌شود، مقادیر تابع کم و کمتر شده و به صفر نزدیک می‌شوند.

به عبارت دیگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

به طور مشابه در جدول و نمودار می‌توان نشان داد حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $-\infty$ نیز برابر صفر است یعنی $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

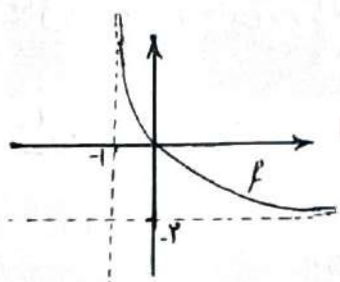
مثال: با توجه به نمودارهای مقابل حدهای زیر را به دست آورید.

الف)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

ب)

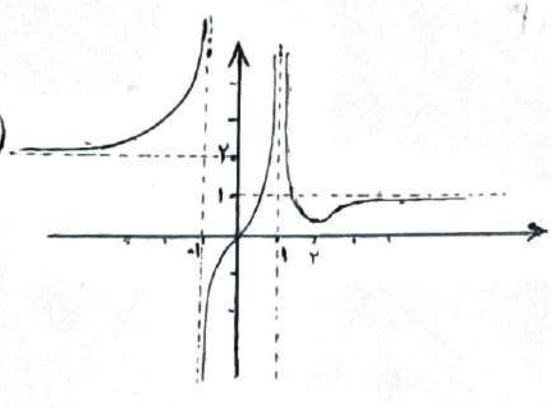


$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=$ وجود ندارد $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

x از دو طرف به صفر نزدیک می‌شود

ج)



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$

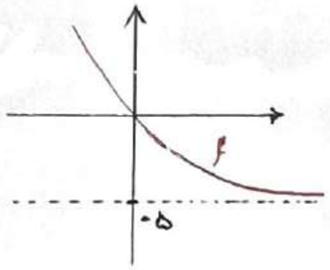
تعریف : فرض کنیم تابع f در بازه‌ای به صورت $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد. رابطه $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = L}$

به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

به طور مشابه رابطه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ تعریف می‌شود.

مثال : رابطه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -5$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پاسخ ← یعنی اگر x به اندازه کافی بزرگ انتخاب شود، تابع $f(x)$ را می‌توان به مقدار دلخواه به -5 نزدیک کرد.



تمرین : رابطه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$ به چه معناست؟ توضیح دهید و نمودار رسم کنید.

نکته : برای محاسبه حد توابع کسری ابتدا از بیشترین توان x در صورت و مخرج فاکتور گرفته سپس از اینکه $\boxed{\frac{\text{عدد}}{\infty}=0}$ جملاتی که در آنها x در مخرج است حذف شده و فقط جملاتی که بیشترین درجه در صورت و مخرج را دارند باقی می‌مانند.

مثال : حد $\lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-3x+1}{5x^2+7x-6}$ را محاسبه کنید.

پاسخ ← در صورت و مخرج x^2 بیشترین توان را دارد که از همه جملات فاکتور می‌گیریم.

فاکتورگیری از بیشترین توان x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-3x+1}{5x^2+7x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(15-\cancel{\frac{3}{x}}+\cancel{\frac{1}{x^2}})}{x^2(5+\cancel{\frac{7}{x}}-\cancel{\frac{6}{x^2}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2}{5x^2} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

فاکتورگیری از x^2

توجه : در روش تشریحی همانطور که در مثال بالا دیدیم از صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور می‌گیریم.

اما در روش تستی کافی است جمله دارای بیشترین توان را نگه داشته و از بقیه جملات صرفنظر کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2-3x+1}{5x^2+7x-6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15x^2}{5x^2} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

نکته: $\text{عدد} \times \infty = \infty$

$(-\infty)^{\text{عدد زوج}} = +\infty$

$(-\infty)^{\text{فرد}} = -\infty$

$(+\infty)^{\text{زوج}} = +\infty$

$(+\infty)^{\text{فرد}} = +\infty$

نکته: حد توابع چندجمله‌ای وقتی $x \to \pm\infty$ برابر حد جمله‌ای که بیشترین درجه را دارد.

بیشترین درجه

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\boxed{ax^n}+bx^{n-1}+\dots+k)=\lim_{x\to\pm\infty}ax^n$$

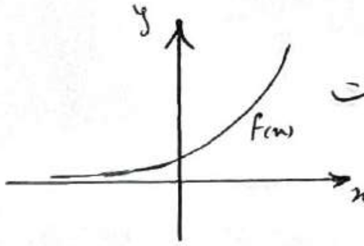
مثال: $\lim_{x\to+\infty}\boxed{7x^2}+3x-4 = \lim_{x\to+\infty}x^2\left(7+\cancel{\frac{3}{x}}-\cancel{\frac{4}{x^2}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\boxed{7x^2}$

مثال: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}(-3x^4+5x^2\boxed{-7x^5}+2x)=\lim_{x\to-\infty}\boxed{-7x^5} = -7(-\infty)^5 = -7(-\infty) = +\infty$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\boxed{3x^2}-2x+4 = \lim_{x\to+\infty}\boxed{3x^2} = 3(+\infty)^2 = 3(+\infty) = +\infty$

تعریف (حد نامتناهی در بی‌نهایت): حدهایی به شکل $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty}$ می‌باشند.



رابطه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ بدین معناست که مقدارهای $f(x)$ را می‌توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی بزرگ اختیار شود.

توجه: کار در کلاس صفحه ۶۲ مربوط به حد نامتناهی در بی‌نهایت می‌باشد.

حد توابع کسری گویا وقتی $x \to \pm\infty$:

$$\text{حاصل حد} = \frac{\text{ضریب بیشترین درجه صورت}}{\text{ضریب بیشترین درجه مخرج}}$$

الف) اگر درجه صورت و مخرج مساوی باشند جواب حد عدد است

ب) اگر درجه صورت از مخرج بیشتر باشد حاصل $\pm\infty$ است.

ج) اگر درجه مخرج از صورت بیشتر باشد حاصل حد ۰ است.

به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+k}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots+k'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \pm\infty & n>m\end{cases}$$

مثال : حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+7}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5\cancel{x}}{3\cancel{x}}=\frac{5}{3}$

ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-14x^2}{7x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-14\cancel{x^2}}{7\cancel{x^2}}=\frac{-14}{7}=-2$

ج) $\lim_{x\to+\infty}\frac{15x^4+3x^3+2x-5}{3x^2+4x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{15x^4}{3x^2}=\lim_{x\to+\infty}5x^2=5(+\infty)^2=5(+\infty)=+\infty$

د) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+7}{x^3+2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=\frac{4}{\infty}=0$

تست : اگر $\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n+2x+4}{3x^2-5x-4}$ برابر -6 باشد حاصل $a+n$ کدام است؟

۱) ۱۵   ۲) ۱۲   ۳) -16 ۴) -2

پاسخ ← چون حاصل حد در بینهایت عدد شده پس صورت و مخرج هم درجه اند یعنی $\boxed{n=2}$

و حاصل حد برابر $\frac{\text{ضریب بیشترین درجه صورت}}{\text{ضریب بیشترین درجه مخرج}}$

$$\xrightarrow{n=2}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+2x+4}{3x^2-5x-4}=-6\longrightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2}{3x^2}=-6\longrightarrow\frac{a}{3}=-6\longrightarrow\boxed{a=-18}$$

$$a+n=2-18=-16$$

تست (کنکور ۹۸ داخل) اگر $f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x}$ باشد حاصل $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) صفر

پاسخ ← ابتدا تابع f را گویا می‌کنیم:

$$f(x)=2x+\sqrt{4x^2+x} \overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=} \frac{(2x)^2-(\sqrt{4x^2+x})^2}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$=\frac{4x^2-(4x^2+x)}{2x-\sqrt{4x^2+x}}=\frac{-x}{2x-\sqrt{4x^2+x}}$$

$$\longrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-\sqrt{4x^2+x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-\sqrt{4x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x-(-2x)}$$

جملا با بیشترین توان را می‌نویسیم

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{4x}=-\frac{1}{4}$$

تست (کنکور ۹۸ خارج): اگر $f(x)=x-\sqrt{4x^2+x}$ باشد، حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ ←

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2+x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{4x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-|2x|}{x}$$

بیشترین توانها

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-(-2x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x}=\frac{3}{1}=\boxed{3}$$

تست (کنکور ۹۹): تابع با ضابطه $f(x)=\frac{ax-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x^n-12}$ در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{6}$ باشد آنگاه $\lim_{x\to3} f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{24}$ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{5}{36}$

پاسخ ← چون حاصل حد در بی‌نهایت عدد غیرصفر شده لذا درجه صورت و مخرج برابرند لذا: $\boxed{n=1}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{1}{6}\xrightarrow{n=1}\lim_{x\to\infty}\frac{ax-\sqrt[3]{x^2}}{4x-12}=\frac{1}{6}\xrightarrow[\text{جملا با بزرگترین توان}]{}\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{4x}=\frac{1}{6}$$

$$\longrightarrow \frac{a}{4}=\frac{1}{6}\to \boxed{a=\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}x-\sqrt[3]{x^2-1}}{4x-12}\overset{\text{صفر صفر}}{=}\lim_{x\to3}\frac{\frac{2}{3}-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}}{4}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{6}{3\sqrt[3]{64}}}{4}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{4}}{4}=\boxed{\frac{1}{24}}$$

هوپیتال ← در مشتق یاد می‌گیریم

از اتحاد چاق و لاغر هم می‌توان گویا کرد ولی طولانی است چون در اینجا حاصل می‌شود که باز عمل تقسیم بر عامل صفرکننده نیز لازم است.

تمرین ۱: حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

۹۹ خرداد
الف) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+4}{x^3+x-8}=$

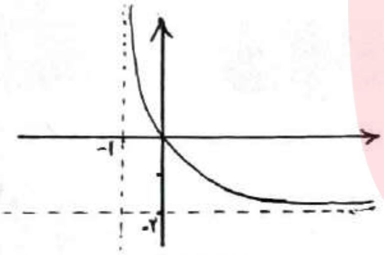
شهریور ۹۹
ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^4-5x+1}{6x^3-11x^2+3}=$

ش ۹۸
ج) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}=$

تمرین ۲: (دی ۹۷) حد تابع زیر وقتی $x\to-\infty$ برابر ...... است.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x>0\\ \frac{5x^2-4x}{-x^2+1} & x\leq 0\end{cases}$$

تمرین ۳ (خرداد ۹۸) با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=$

ب) $\lim_{x\to-1^+}f(x)=$

تمرین ۴: حاصل حد $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3}$ را بدست آورید.

توجه: (تمرینات صفحه ۶۳ و ۶۴ کتاب درسی با توجه به مطالب تدریس شده حتماً حل و بررسی شوند.