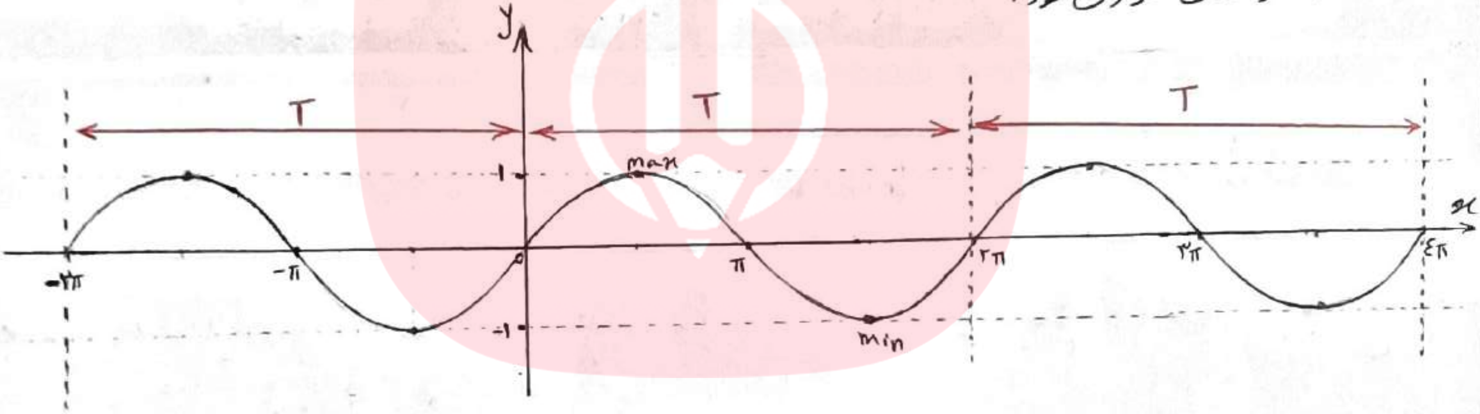
فصل ۲ مثلثات

درس اول : تناوب و تانژانت

تعریف : تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x\pm T)=f(x)$

(کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f گویند.)

اگر دوره تناوب T باشد آنگاه نمودار تابع در فاصله T واحدی تکرار می‌شود مثل نمودار تابع سینوس که در فاصله‌های ۲π واحدی تکرار می‌شود.



دوره تناوب : $T=2\pi$

بیشترین مقدار (max) $=1$

کمترین مقدار (min) $=-1$

نکته : در توابع $y=a\sin(bx)+c$ و $y=a\cos(bx)+c$

دوره تناوب $\boxed{T=\frac{2\pi}{|b|}}$ و $\boxed{max=|a|+c}$ و $\boxed{min=-|a|+c}$

مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را مشخص کنید.

الف) $y=\overset{a}{2}\sin(\overset{b}{3}x)+\overset{c}{1}$

دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}=\boxed{\frac{2\pi}{3}}$, $max=|a|+c=|2|+1=\boxed{3}$, $min=-|a|+c=-|2|+1=\boxed{-1}$

ب) $y=8\cos(\frac{\pi}{2}x)$

دوره تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi}{\pi}=\boxed{4}$, $max=|a|+c=8+0=\boxed{8}$, $min=-|a|+c=-8+0=\boxed{-8}$

تمرین (شهریور ۹۹): دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید: $y=\pi \sin(-x)+1$

تمرین (خرداد ۹۹): دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع مقابل را بدست آورید: $y=\sqrt{3}-\cos(\frac{\pi}{2}x)$

تمرین (دی ۹۸): 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 $y=-\pi \sin(\frac{x}{3})-2$

تمرین — مثال اول صفحه ۳۵ کتاب درسی

مثال: ضابطه تابع مثلثاتی سینوسی را بدست آورید که دورهٔ تناوب آن π و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.

پاسخ ←

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \pi=\frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b|=\frac{2\pi}{\pi} \Rightarrow \boxed{b=\pm 2}$$

$$\begin{cases} max=4 \rightarrow |a|+c=4 \\ min=-2 \rightarrow -|a|+c=-2 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{matrix} |a|=3 \rightarrow \boxed{a=\pm 3} \\ c=1 \end{matrix}$$

توجه: $\left(|a|=\frac{max-min}{2} \quad , \quad c=\frac{max+min}{2} \right)$

ضابطه: $y=a\sin(bx)+c \rightarrow \boxed{y=\pm 3\sin(\pm 2x)+1}$

تمرین: ضابطه تابع کسینوس را بدست آورید که در آن $T=3$ و $max=-1$ و $min=-7$ باشد.

تمرین (خرداد ۹۹ خارج) اگر در یک تابع مثلثاتی دوره تناوب 4π و مقدار ماکزیمم ۱- و مقدار مینیمم ۷- باشد؛ تابع سینوسی آن را بنویسید.

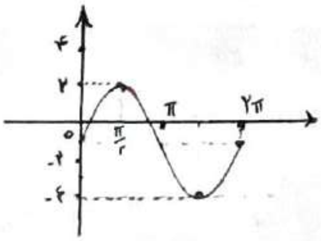
نکته: در نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ اگر نمودار به صورت یعنی از محور y ها صعودی شروع کند $ab>0$ (یعنی a و b هم علامتند)

اگر نمودار به صورت یعنی از محور y ها نزولی شروع کند $ab<0$ (یعنی a و b مختلف العلامه)

نکته: در نمودار تابع $y=a\cos(bx)+c$ اگر نمودار به صورت یعنی از محور y ها نزولی شروع کند $ab>0$ (a و b هم علامتند)

اگر نمودار به صورت یعنی از محور y ها صعودی شروع کند $ab<0$ (a و b مختلف العلامه)

مثال: اگر نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ باشد مقادیر a ، b ، c را بیابید.



پاسخ ←

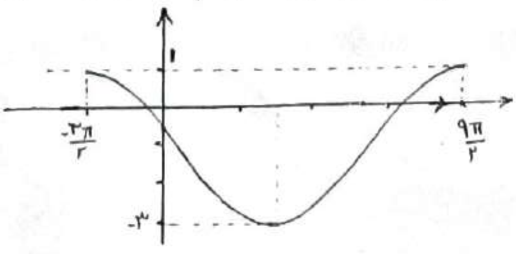
$$\begin{cases} max=|a|+c=2 \\ min=-|a|+c=-4 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} c=-1 \quad |a|=3 \rightarrow a=\pm 3 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} \boxed{a=3} \text{ قابل قبول}$$

$$\text{دوره تناوب } T=\frac{2\pi}{|b|} \rightarrow 2\pi=\frac{2\pi}{|b|} \rightarrow |b|=\frac{2\pi}{2\pi}=1 \rightarrow b=\pm 1 \xrightarrow{\text{طبق نکته}} \boxed{b=1} \text{ قابل قبول}$$

طبق نکته: $ab>0$ ، $a>0 \rightarrow b>0$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در ضابطه}} \boxed{y=3\sin(x)-1}$$

تست (کنکور ۹۹): شکل مقابل نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ را در یک بازهٔ تناوب نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟



۱) ۲-
۲) ۳-
۳) ۴-
۴) ۶-

پاسخ ⟵ ۳

نکته: $\boxed{\text{ابتدای نمودار} - \text{انتهای نمودار} = \text{دوره تناوب}}$

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi \quad \text{دوره تناوب}$$

$$\begin{cases} max = |a| + c = 1 \\ min = -|a| + c = -3 \end{cases} \xrightarrow[\text{جمع طرفین}]{\text{حل دستگاه}} c = -1 \ , \ |a| = 2 \to a = \pm 2$$

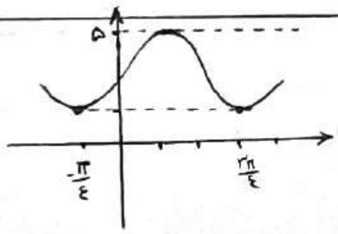
a و b مختلف العلامه $\xleftarrow{\text{نمودار سینوسی محور yها را نزولی قطع کند}}$ $ab<0$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightsquigarrow 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \rightsquigarrow |b| = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \rightsquigarrow b = \pm\frac{1}{3}$$

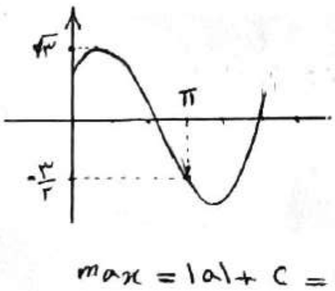
با فرض $a=-2$, $b=\frac{1}{3}$ می‌باشد: پس $\frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6$

درستی بالا $\boxed{C = \frac{max+min}{2} = \frac{1+(-3)}{2} = -1}$ لذا ضابطه تابع به صورت $y = -2\sin(\frac{1}{3}x) - 1$ می‌باشد.

نکته:
۱- فاصله بین دو نقطه ماکزیمم متوالی، یک دوره تناوب است.
۲- فاصله بین دو نقطه مینیمم متوالی، یک دوره تناوب است.
۳- فاصله بین نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی، نصف دوره تناوب است.



تمرین: اگر نمودار تابع به معادله $f(x) = c + 2\sin(bx)$ به صورت مقابل باشد، حاصل $c \times b$ را بدست آورید.
$a = 2 > 0$



تست (۹۸ داخل) شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = c + a\sin(x+\frac{\pi}{3})$ است. a کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ✓ ۴) ۲

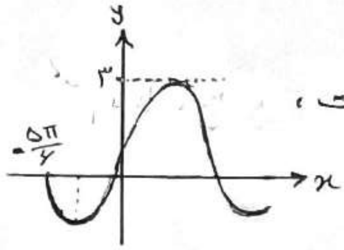
$$max = |a| + c = \sqrt{3} \xrightarrow{a>0} \boxed{a + c = \sqrt{3}}$$

$$y = c + a\sin(x+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow[\text{نقطه روی نمودار در معادله صدق می‌کند}]{(\pi, -\frac{3}{2})} -\frac{3}{2} = c + a\sin(\pi+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{= -\sin\frac{\pi}{3}} -\frac{3}{2} = c - a\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\xrightarrow{\times -2} \boxed{3 = \sqrt{3}a - 2c}$$

$$\times 2\begin{cases} a + c = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}a - 2c = 3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 2a + \cancel{2c} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}a - \cancel{2c} = 3 \end{cases}$$

$$\text{جمع:} \quad (2+\sqrt{3})a = 2\sqrt{3} + 3 \rightsquigarrow a = \frac{2\sqrt{3}+3}{2+\sqrt{3}} \overset{\text{گویا}}{=} \sqrt{3}$$



مثال ٤: (۹۸ خارج) شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=c+a\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ است، مقدار تابع در $\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۱٫۵ ۲) ۲ ✓ ۳) ۲٫۵ ٤) $1+\sqrt{3}$

پاسخ ← اولا دقت کنید که ضابطهٔ تابع $y=c+a\sin x$ است چون $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ همان $\sin x$ است.

$$y=c+a\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\boxed{c+a\sin x}$$

$$\max=|a|+c=3 \xrightarrow{a>0} a+c=3$$

$$\xrightarrow{\text{ضابطه}} y=c+a\sin x \xrightarrow[\text{نقطه روی نمودار است در ضابطه تابع صدق می‌کند}]{(-\frac{5\pi}{6},\,0)} 0=c+a\underbrace{\sin(-\frac{5\pi}{6})}_{-\frac{1}{2}} \longrightarrow c-\frac{a}{2}=0 \xrightarrow{\times -2} a-2c=0$$

$$\times 2\begin{cases} a+c=3 \\ a-2c=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2a+\cancel{2c}=6 \\ a-\cancel{2c}=0 \end{cases}$$

$$\text{جمع:}\quad 3a=6 \longrightarrow a=2,\ c=1$$

$$\xrightarrow{\text{در ضابطه قرار دهیم}} \underbrace{y}_{f(x)}=1+2\sin x \longrightarrow f(\frac{\pi}{4})=1+2\underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{1}{2}}=\boxed{2}$$

توجه: مثال پایین صفحه ۳۵ و ۳۶ مربوط به مطالب بیان شده نیز مورد مطالعه دقیق قرار گیرد.

تابع تانژانت : تابعی با ضابطه $f(x)=\tan x$ می باشد

نکته : می دانیم $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ لذا $\overset{\text{دامنه}}{D_f}=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

$\text{مخرج}=0 \longrightarrow \cos x=0 \longrightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ,\ \overbrace{(\pi+\frac{\pi}{2})}^{\frac{3\pi}{2}}\ ,\ \overbrace{(2\pi+\frac{\pi}{2})}^{\frac{5\pi}{2}}\ ,\ \dots \longrightarrow \boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{2}}$

ریشه‌های مخرج

دامنه تانژانت : $\boxed{D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}}$

برد تابع تانژانت $R_f=\mathbb{R}$

مثال : (دی ۹۷) دامنه تابع $f(x)=\tan(2x)$ را بدست آورید.

پاسخ ← $\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$

$\text{مخرج}=0 \longrightarrow \cos 2x=0 \longrightarrow (2x)=\overbrace{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{\text{همواره}} \xrightarrow{\div 2} \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}$

ریشه‌های مخرج

$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}=\mathbb{R}-\{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\}$

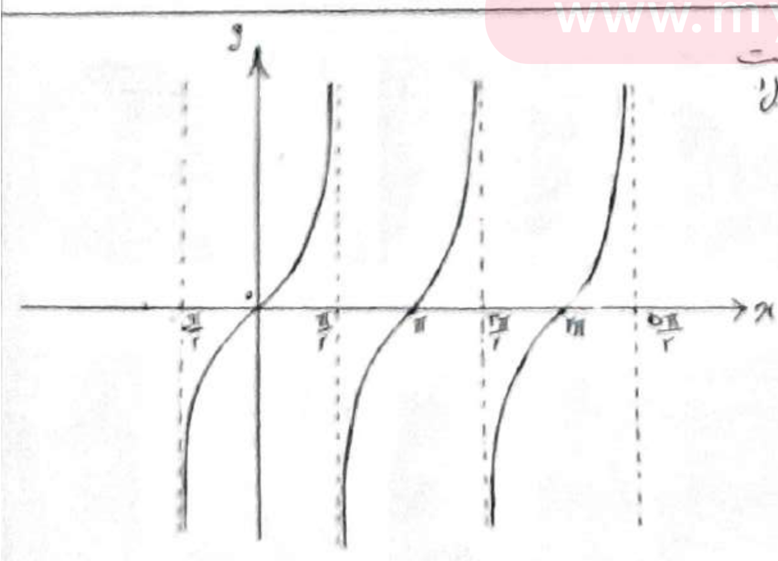
نکته : تابع تانژانت $f(x)=\tan x$ متناوب است و دوره تناوب آن $T=\pi$ می باشد

زیرا $\tan(\pi+x)=\tan x$ (به عبارت دیگر نمودار آن در هر π رادیان تکرار می شود)

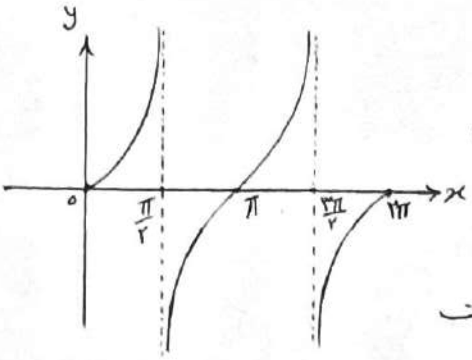
نکته : دوره تناوب $f(x)=\tan(bx)$ به صورت $T=\frac{\pi}{|b|}$ می باشد.

نکته : نمودار تابع $y=\tan x$ به صورت مقابل است $[-\frac{\pi}{2}\ ,\ \overset{2\pi+\frac{\pi}{2}}{\frac{5\pi}{2}}]$

این نمودار در بازه‌های به طول π رادیان تکرار می شود



کار در کلاس ص ۳۹ :



با رسم نمودار تابع $y=\tan x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ صعودی یا نزولی بودن آن را بررسی کنید.

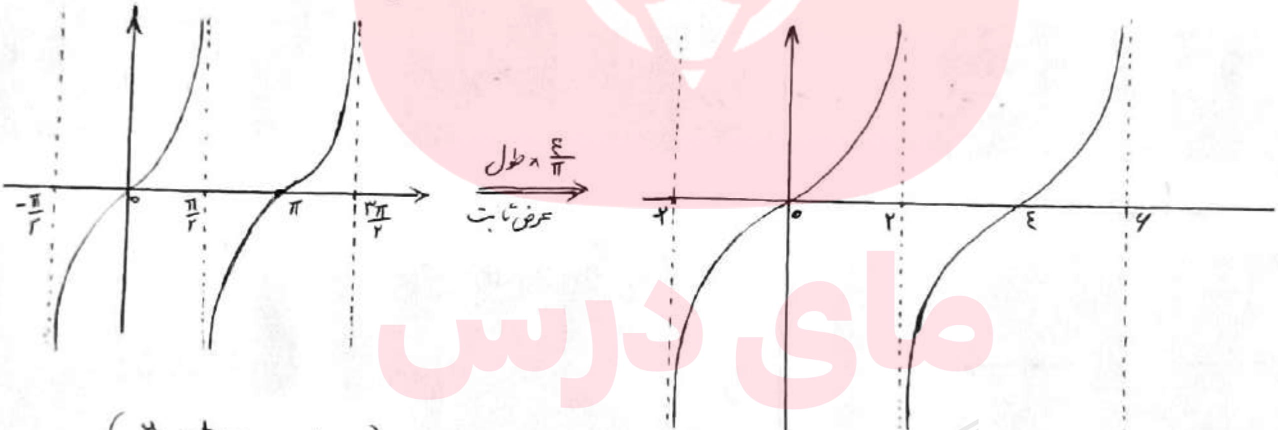
پاسخ ← در بازه‌های $[0,\frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2},2\pi]$ تابع تانژانت اکیداً صعودی (صعودی) است.

نکته: تابع تانژانت در کل دامنه‌اش صعودی نمی‌باشد (فقط در بازه‌هائی که در آنها تعریف شده صعودی است) بازه‌ای وجود ندارد که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

مثال: تابع $f(x)=\tan\frac{\pi x}{4}$ با دامنهٔ $(2, a)$ اکیداً صعودی است حداکثر مقدار a را بدست آورید.

$\frac{1}{k}$

پاسخ ← ابتدا نمودار $y=\tan x$ را رسم می‌کنیم سپس طول نقاط را در $\frac{1}{(\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{\pi}$ ضرب می‌کنیم (عرضها ثابت)



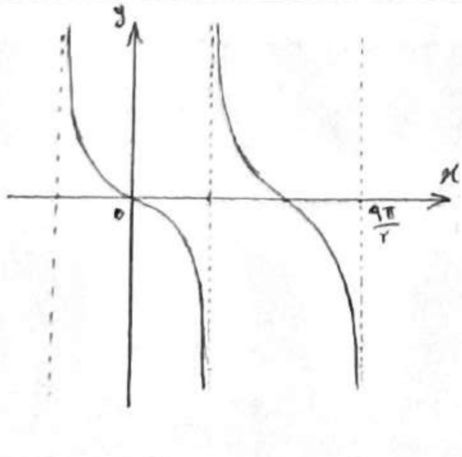
(نمودار $y=\tan x$)

(نمودار $y=\tan\frac{\pi}{4}x$) (منبسط شده نمودار $\tan x$ در راستای محور xها)

با توجه به نمودار حداکثر مقدار a برای آنکه تابع روی بازهٔ $(2, a)$ صعودی باشد برابر 6 می‌باشد.

مثال: بخشی از نمودار $y=\tan(bx)$ به صورت مقابل است

مقدار b کدام است؟



پاسخ ← دوره تناوب $y=\tan(bx)$ به صورت $T=\frac{\pi}{|b|}$ است.

با توجه به شکل از 0 تا $\frac{9\pi}{2}$ یک و نیم دوره تناوب می‌باشد لذا:

$$\frac{T}{2}+T=\frac{9\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} T+2T=9\pi \longrightarrow 3T=9\pi \longrightarrow \boxed{T=3\pi}$$ دوره تناوب

از طرفی $T=\frac{\pi}{|b|} \longrightarrow \frac{\pi}{|b|}=3\pi \longrightarrow |b|=\frac{1}{3} \longrightarrow b=\pm\frac{1}{3}$ ← با توجه به شکل واضح است نمودار نسبت به محور yها قرینه شده ← $\boxed{b=-\frac{1}{3}}$ قابل قبول

درس دوم : معادلات مثلثاتی

نسبتهای مثلثاتی 2α :

نسبتهای مثلثاتی $\alpha+\beta$ به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} 1)\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ 2)\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

اگر در هر دو رابطه قرار دهیم $\alpha=\beta$ خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{(1)} \sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

نصف

مثلاً : $\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$ و $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

نصف

$$\xrightarrow{(2)} \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha \Longrightarrow \boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$1-\sin^2\alpha$ ، $1-\cos^2\alpha$

نتیجه۱: $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

نتیجه۲: $\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$

مثال : (خرداد ۹۹ و تمرین کتاب)

اگر $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ و α زاویه حاده باشد الف) $\cos 2\alpha$ ب) $\sin 2\alpha$ را حساب کنید.

پاسخ الف)

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{5}{13}\right)^2-1=\frac{50}{169}-1=\frac{50-169}{169}=\frac{-119}{169}$$

ب) ابتدا $\sin\alpha$ را از رابطه مقابل بدست می‌آوریم:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \longrightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{169-25}{169}=\frac{144}{169}$$

$$\longrightarrow \sin\alpha=\pm\frac{12}{13} \xrightarrow[\text{یعنی ربع اول}]{\text{حاده } \alpha} \boxed{\sin\alpha=\frac{12}{13}}$$ قابل قبول

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{120}{169}$$

مثال (ش ۹۸) مقدار $\sin 22.5^\circ$ را حساب کنید.

پاسخ ←

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha = 22.5^\circ} \cos 45^\circ = 1 - 2\sin^2 22.5 \longrightarrow 2\sin^2 22.5 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\div 2} \sin^2 22.5 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} \sin 22.5 = +\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

۲۲٫۵ ربع اول

تمرین : مقدار $\sin 15^\circ$ و $\cos 15^\circ$ را حساب کنید.
(ش ۹۹)

مثال : اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\cos 4x$ را بدست آورید.

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \longrightarrow \overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{1} - 2\sin x \cos x = \frac{1}{9}$$

$$\longrightarrow 2\sin x \cos x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \longrightarrow \sin 2x = \frac{8}{9}$$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x = 1 - 2\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 1 - \frac{128}{81} = -\frac{47}{81}$$

نصف

تمرین : اگر $\frac{\tan\alpha + 1}{\tan\alpha - 1} = \frac{3}{2}$ آنگاه حاصل $\sin 2\alpha$ را بدست آورید.

معادله مثلثاتی : معادلاتی که در آنها نسبت مثلثاتی باشد. مثلاً : معادله مثلثاتی

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0$$

یا

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

حل معادله مثلثاتی : با استفاده از روابط جبری و فرمولهای مثلثاتی که آموخته‌ایم سعی می‌کنیم یک معادله مثلثاتی را به صورت ساده شده $\boxed{\sin x = \sin\alpha}$ یا $\boxed{\cos x = \cos\alpha}$ تبدیل کنیم. سپس

از روابط زیر جوابهای کلی آنها را بدست می‌آوریم :

$$\sin x = \sin\alpha \longrightarrow \begin{cases} x = \overbrace{2k\pi + \alpha}^{\text{در ربع اول}} \\ x = \underbrace{2k\pi + (\pi - \alpha)}_{\text{در ربع دوم}} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

سینوس در ربع اول و دوم مثبت است

توجه : اگر در جوابهای کلی به k مقادیر صحیح بدهیم جوابهای متعلق به یک بازه مثلاً $[0, 2\pi]$ بدست می‌آید.

مثال: معادله مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای موجود در بازه $[0,2\pi]$ را مشخص کنید. $2\sin x - 1 = 0$

پاسخ ←

$2\sin x = 1 \longrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (سینوس چه زاویه‌ای $\frac{1}{2}$ است)

$\longrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$:جوابهای کلی

چون جوابهای موجود در $[0,2\pi]$ را خواسته پس تا جایی به k مقدار صحیح می‌دهیم که جوابها از بازه $[0,2\pi]$ خارج نشوند. $\Longrightarrow$

$k=0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}}$ قابل قبول ✓

$k=1 \longrightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{6}$ ✗ , $2\pi + \frac{5\pi}{6}$ ✗

$k=-1 \longrightarrow x = -2\pi + \frac{\pi}{6}$ ✗

مثال: معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید و جوابهای کلی و موجود در بازه $[0,2\pi]$ را مشخص کنید $2\sin x + \sqrt{2} = \underset{2\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$

پاسخ ←

$2\sin x = \underbrace{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}_{\sqrt{2}} \longrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (سینوس چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است)

$\longrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{4})}_{\frac{3\pi}{4}} \end{cases}$:جوابهای کلی

$k=0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}}$ قابل قبول

$k=1$, $k=-1$, ... $\longrightarrow$ جوابها خارج $[0,2\pi]$

مثال: (۹۹ خارج) معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$

پاسخ ←

$2\sin 3x = \sqrt{2} \longrightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (سینوس چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است)

$\longrightarrow \sin 3x = \sin\frac{\pi}{4} \longrightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{4})}_{\frac{3\pi}{4}} \end{cases} \xrightarrow[\text{x تنها باشد}]{\div 3} \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{3\pi}{12} \end{cases}$:جوابهای کلی

توجه: اگر طرف راست معادله پس از ساده شدن منفی شد بدون در نظر گرفتن منفی، ابتدا سینوس آن عدد را محاسبه می‌کنیم سپس علامت را پشت زاویه قرار می‌دهیم:

مثلاً:

$2\sin x + \sqrt{3} = 0 \longrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3}$

$\longrightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{3}) \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{3}) \\ x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{3})) \end{cases}$:جوابهای کلی

مثال: معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin 5x$ را حل کنید.

$$\sin(3x) = \sin(5x) \xrightarrow{\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}} \begin{cases} 3x = 2k\pi + 5x \\ 3x = 2k\pi + (\pi - 5x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x = 2k\pi \xrightarrow{\div(-2)} \\ 8x = 2k\pi + \pi \xrightarrow{\div 8} \end{cases}$$

جوابهای کلی:

$$\longrightarrow \begin{cases} x = -k\pi \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{8} \end{cases}$$

مثال: (شهریور ۹۹ / تمرین کتاب) معادله مثلثاتی $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$ را حل کنید و جوابهای کلی آن را بدست آورید.

پاسخ ← از رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ داریم $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\longrightarrow (1 - \sin^2 x) - \sin x = \frac{1}{4}$$

$$\longrightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(1)(-\tfrac{3}{4}) = 1 + 3 = 4 > 0$$

معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

$$\longrightarrow \sin x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{-1 \pm 2}{2} \begin{cases} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \tfrac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{3}{2}$$ غیرممکن ← جواب ندارد

زیرا همواره $-1 \le \sin x \le 1$

نکته: (حالات خاص) اگر به حالات $\sin x = 0$ یا $\sin x = 1$ یا $\sin x = -1$ رسیدیم

بهتر است جوابها را به صورت زیر بنویسیم: انتهای زاویه‌ای که sin برابر ۱ می‌شود

انتهای زاویه‌هایی که sin صفر می‌شود

$\sin x = 0 \rightarrow \boxed{x = k\pi}$

$\sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\sin x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$

مثال: معادله مثلثاتی $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \sin x(2\sin x - 1) = 0 \begin{cases} \nearrow \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{x = k\pi} \\ \searrow 2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \underbrace{(\pi - \tfrac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} \end{cases} \end{cases}$$

تمرین: معادله مثلثاتی $\sin x - \cos 2x = 0$ را حل کنید. (دی ۹۷، خرداد ۹۸)

تمرین: (ش ۹۸) معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید و جوابهای کلی آن را بدست آورید.

ضرب

نکته: اگر $\cos x = \cos \alpha \Longrightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \alpha}$ جوابهای کلی

کسینوس در ربع اول و چهارم مثبت است

مثال: $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \rightsquigarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}}$: جوابهای کلی

کسینوس چه زاویه‌ای $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است

نکته: (حالات خاص) اگر به حالات $\cos x = 0$ یا $\cos x = 1$ یا $\cos x = -1$ رسیدیم

می‌توان جوابهای کلی آنها را به صورتهای زیر بدست آورد.

سر دو انتهای قطر عمودی که کسینوس آنها صفر است

$\cos x = 0 \longrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$

$\cos x = -1 \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi + \pi}$

$\cos x = 1 \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi}$

مثال: معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید و جوابهای کلی آنرا بدست آورید: $2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} \cos x(2\cos x - 1) = 0$

$\cos x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{2}}$ جوابهای کلی

$2\cos x - 1 = 0 \rightsquigarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}}$ جوابهای کلی

مثال (خرداد ۹۹ ، تمثال کتاب) : معادله مقابل را حل کنید $\underset{a}{2}\cos^2 x - \underset{b}{9}\cos x - \underset{c}{5} = 0$ را حل کنید:

پاسخ ←

$\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(2)(-5) = 81 + 40 = 121 > 0$

$\cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2(2)} = \frac{9 \pm 11}{4} < \begin{matrix} \frac{20}{4} = 5 \\ -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \end{matrix}$

اگر $\cos x = 5$ غیرقابل قبول (زیرا همواره $-1 \leq \cos x \leq 1$)

اگر $\cos x = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{2\pi}{3} \longrightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$

ابتدا علامت منفی را در نظر نمی‌گیریم کسینوس چه عددی $\frac{1}{2}$ است

علامت منفی طبق نکته زیر به پشت زاویه منتقل می‌شود $\cos x = -\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$

مخرج مشترک

تمرین: جوابهای کلی معادله مثلثاتی $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

مثال: معادله مثلثاتی $\cos x = \cos 2x$ را حل کنید.

پاسخ ←

$\cos 2x = \cos x \longrightarrow 2x = 2k\pi \pm x$

$\longrightarrow 2x = 2k\pi + x \longrightarrow x = 2k\pi \longrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$

$\longrightarrow 2x = 2k\pi - x \longrightarrow 3x = 2k\pi \xrightarrow{\div 3} \boxed{x = \frac{2k\pi}{3}}$

مثال: جوابهای معادله مثلثاتی $\cos^2 x + 3\sin(\frac{\pi}{2}+x)+2=0$ را بدست آورید.

ربع دوم → سینوس مثبت است → + تغییر نام به کسینوس = $+\cos x$

پاسخ ←

$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

$\xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} (\cos x+1)(\cos x+2)=0$

$\longrightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi + \pi$

$\longrightarrow \cos x = -2$ غیر قابل قبول

کنکور ۹۸: مجموع جوابهای معادله مثلثاتی $4\sin x \times \sin(\frac{3\pi}{2}-x)=1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

ربع سوم → سینوس منفی → $-$ = تغییر نام به کسینوس = $-\cos x$

پاسخ ←

$\longrightarrow 4\sin x \times (-\cos x) = 1 \longrightarrow -4\sin x \cos x = 1 \longrightarrow -2\sin 2x = 1$

$\longrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \longrightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ 2x = 2k\pi + (\pi - (-\frac{\pi}{6})) \end{cases} \xrightarrow{\div 2} \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \end{cases}$

جوابهای کلی

$k=0 \longrightarrow \cancel{-\frac{\pi}{12}}, \frac{7\pi}{12}$

$k=1 \longrightarrow \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$

$k=2 \longrightarrow \frac{23\pi}{12}, \cancel{\frac{31\pi}{12}}$

چون صورت از دو برابر مخرج بیشتر است پس از 2π بیشتر است

$\xrightarrow{\text{مجموع جوابها}} \frac{60\pi}{12} = 5\pi$

تمرین: جوابهای کلی معادله $\sin(x+\pi)\cos(\frac{\pi}{2}+x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ را بدست آورید.

تمرین: مجموع جوابهای معادله مثلثاتی $\sin 2x + \cos(\frac{\pi}{2}-x) = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

توجه: تمرینات صفحه ۴۸ کتاب درسی با توجه به مطالب تدریس شده تا اینجا قابل حل میباشد

تست (کنکور ۹۹)