به نام خدا

جزوه دست نویس ریاضی ۳ (پایه دوازدهم تجربی)

سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰ — شاهسون

فصل ۱ : تابع

درس اول : توابع چند جمله ای - توابع صعودی و نزولی

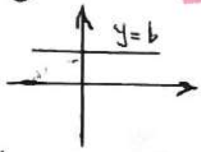
بیشترین توان x عدد n می باشد

توابع چند جمله ای : یک تابع چند جمله ای درجه n در حالت کلی به صورت زیر است :

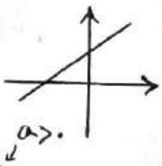
$$\boxed{f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

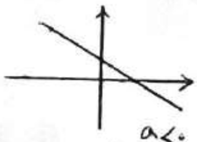
مثال : برخی توابع چند جمله ای که سال های گذشته آشنا شدیم :

1) $f(x)=b$ ⟶ تابع چند جمله ای درجه صفر ⟶ نام خاص این تابع: تابع ثابت ⟶ نمودار آن خط افقی

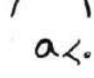


2) $f(x)=ax+b$ (a مخالف صفر) ⟶ تابع چند جمله ای درجه ۱ ⟶ نام خاص: تابع خطی ⟶





3) $f(x)=ax^2+bx+c$ ⟶ تابع چند جمله ای درجه ۲ ⟶ نام خاص: سهمی ⟶



نکته : دامنه توابع چند جمله ای مجموعه اعداد حقیقی می باشد $D_f=\mathbb{R}$

تابع چند جمله‌ای درجه ۳ :

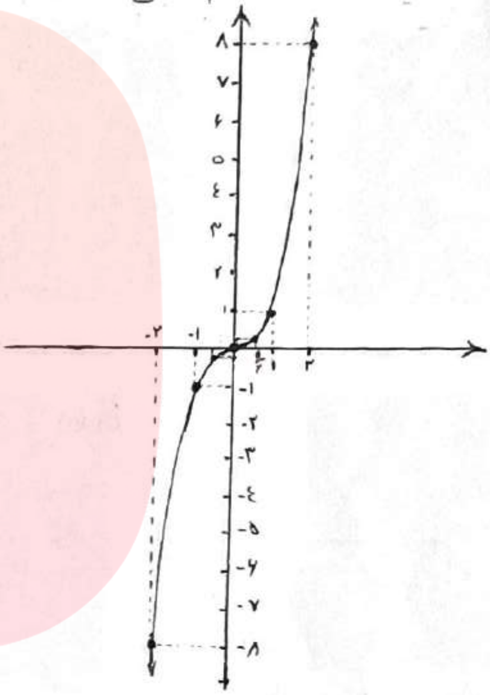
a مخالف صفر

ضابطه تابع چند جمله‌ای درجه ۳ در حالت کلی به صورت $\boxed{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d}$ می‌باشد.

توجه: دامنه و برد این تابع $\mathbb{R}$ می‌باشد.

در این درس به طور خاص تابع درجه ۳ ← $f(x)=x^3$ را بررسی می‌کنیم.

x	...	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	...
$y=x^3$		-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	



دامنه $D_f=(-\infty,+\infty)$

برد $R_f=(-\infty,+\infty)$

توجه: نقاط $(\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ و $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8})$ را به این خاطر در نظر گرفتیم که انحنای نمودار واضح‌تر شود از این به بعد فقط ۱ و ۰ و ۱- را برای x در نظر می‌گیریم.

توجه: با استفاده از قوانین انتقال نمودارها می‌توانیم نمودار توابعی مانند $y=-(x+2)^3-1$ را رسم کرد:

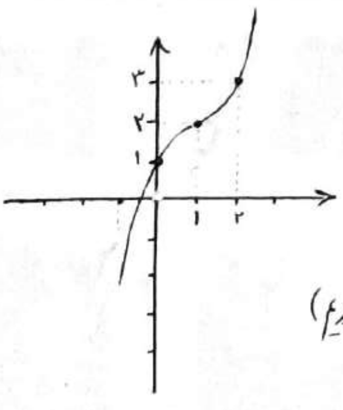
$$y=x^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-(x+2)^3 \xrightarrow{\text{یک واحد به پایین}} y=-(x+2)^3-1$$

دامنه $D_f=(-\infty,+\infty)$

برد $R_f=(-\infty,+\infty)$

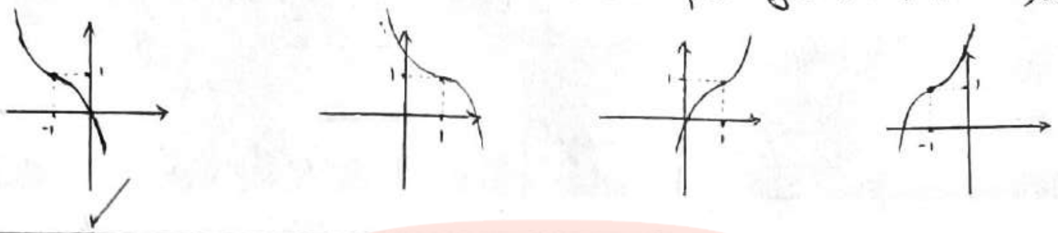
مثال: نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ را از طریق انتقال رسم کنید.

پاسخ ← همه انتقال‌ها را می‌توان همزمان انجام داد یعنی نقاط نمودار $y=x^3$ را ابتدا یک واحد به راست و سپس ۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم. نقاط نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ حاصل می‌شود (فقط سه نقطه نمودار $y=x^3$ را برای انتقال در نظر می‌گیریم).



توجه: فعالیت و کاردرکلاس صفحه ۴ و ۵ کتاب درسی در مورد انتقال نمودار تابع $y=x^3$ می‌باشد
به طور دقیق مورد بررسی قرار دهید.

تست: نمودار $y=-(x+1)^3+1$ کدام است؟



تمرین: نمودار تابع $y=(x-1)^3+2$ را رسم کنید دامنه و برد آن را مشخص کنید.

مثال: اگر نمودار تابع $y=-x^3+ax^2+bx+c$ به صورت

باشد $a-b+2c$ را بدست آورید.

پاسخ ← با توجه به اینکه ضریب پشت x^3 برابر -1 می‌باشد پس نمودار داده شده از انتقال نمودار $y=-x^3$
به صورت زیر حاصل می‌شود

$$y=-x^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=-(x-2)^3 \xrightarrow{\text{یک واحد به پائین}} y=-(x-2)^3-1$$

حال معادله بدست آمده را طبق اتحاد مکعب باز می‌کنیم و با معادله تابع داده شده برابر قرار می‌دهیم a و b و c حاصل می‌شود:

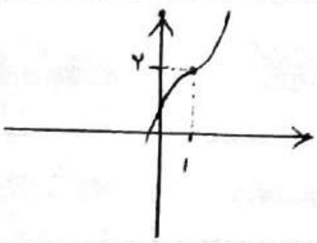
$$y=-(x-2)^3-1 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب}} y=-(x^3-6x^2+12x-8)-1=-x^3+6x^2-12x+7$$

$$y=-x^3+ax^2+bx+c \quad \text{طبق فرض}$$

$$\Rightarrow a=6,\quad b=-12,\quad c=7$$

$$a-b+2c=6-(-12)+2(7)=32$$

تمرین: نمودار تابع با ضابطه $y=(x-a)^3+b$ به صورت مقابل است



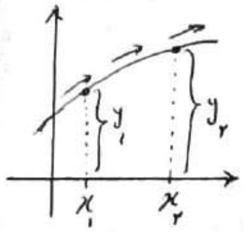
حاصل $a.b$ را بدست آورید.

تمرین: برای رسم تابع $y=(x+a)^3-b$ باید نمودار $y=x^3$ را ۲ واحد به چپ و ۴ واحد به بالا منتقل کنیم، حاصل $a+b$ کدام است؟

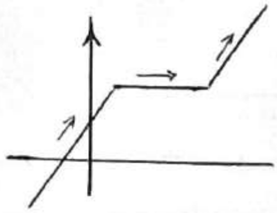
پاسخ ←

$$y=x^3 \xrightarrow{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^3 \xrightarrow{\text{۴ واحد به بالا}} y=(x+2)^3+4$$

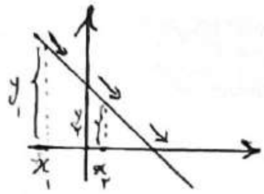
$$\rightarrow a=2,\quad -b=4 \rightarrow b=-4 \Rightarrow a+b=\boxed{-2}$$



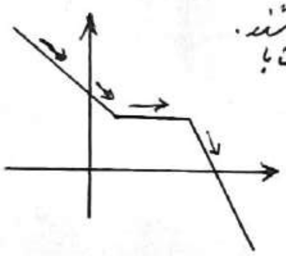
تابع اکیداً صعودی: توابعی که در نمودار آن با افزایش طول نقاط، عرض نقاط افزایش یابد
(به عبارت دیگر وقتی نمودار را از سمت چپ نگاه می‌کنیم جهت حرکت آن فقط رو به بالا باشد)



تابع صعودی: اگر با افزایش طول نقاط عرض‌ها افزایش یابند یا عرض‌ها برابر باشند.
(به عبارت دیگر وقتی نمودار آنرا از سمت چپ نگاه می‌کنیم در قسمت‌هایی جهت حرکت رو به بالا و در قسمت‌هایی حرکت افقی باشد)



تابع اکیداً نزولی: اگر در نمودار تابع با افزایش طول نقاط، عرض نقاط کاهش یابد
(به عبارت دیگر وقتی نمودار را از سمت چپ نگاه می‌کنیم جهت حرکت آن فقط رو به پایین باشد)



تابع نزولی: اگر با افزایش طول نقاط (یعنی حرکت از چپ به راست) عرض‌ها کاهش یابند یا عرض‌ها ثابت باشند.
(به عبارت دیگر وقتی نمودار را از سمت چپ نگاه می‌کنیم جهت حرکت آن در قسمت‌هایی رو به پایین و در قسمت‌هایی افقی باشد)

توجه: با توجه به تعاریف بالا نتیجه می‌گیریم تابع ثابت در یک بازه هم صعودی است و هم نزولی.

مثال: اگر تابع $f(x)=(x-1)^2+mx^2-nx+3$ هم صعودی و هم نزولی باشد حاصل $m\times n$ کدام است؟

پاسخ ـــــ می‌دانیم فقط تابع ثابت $f(x)=k$ در یک بازه هم صعودی است و هم نزولی است

$$f(x)=(x-1)^2+mx^2-nx+3 = x^2-2x+1+mx^2-nx+3$$

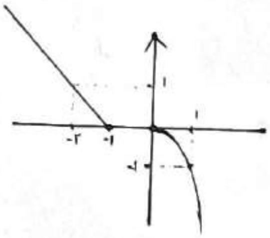
$$\xrightarrow{\text{ساده شود}} f(x)=(1+m)x^2+(-2-n)x+4 \longrightarrow \begin{cases} 1+m=0 \to m=-1 \\ -2-n=0 \to n=-2 \end{cases}$$

برای اینکه f ثابت باشد باید ضریب x^2 و ضریب x صفر شوند و f فقط برابر عدد ثابت شود

بنابراین: $m\times n = -1\times -2 = \boxed{2}$

مثال: کدامیک از موارد زیر درمورد تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}|x+1| & x\le -1\\ -x^2 & x\ge 0\end{cases}$ درست است؟

۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست
۲) اکیداً صعودی است
۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست
۴) اکیداً نزولی است



پاسخ ← می‌توان مستقیماً از نقطه‌یابی نمودار را رسم کرد

x	...	-2	-1
$y=\|x+1\|$	...	1	0

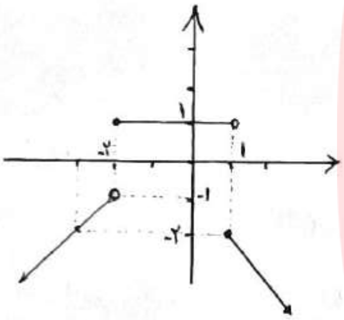
و

x	0	1	...
$y=-x^2$	0	-1	...

توجه

با توجه به نمودار واضح است که تابع f نزولی است ولی چون $f(-1)=f(0)=0$ تابع اکیداً نزولی نمی‌باشد

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-2\\ 1 & -2\le x<1\\ -2x & x\ge 1\end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید



پاسخ ← به روش نقطه‌یابی رسم کنید ولی لازم نیست جدول بکشید مثلاً برای ضابطه اول ۲- و اعداد کوچکتر از آن را قرار دهید چون نقطه مرزی ۲- مساوی ندارد نقطه توخالی روی نمودار درنظر گیریم.

نقاط مرز

در بازه $(-\infty,-2)$ اکیداً صعودی (صعودی)

در $[-2,1)$ ثابت (هم صعودی - هم نزولی)

در $[1,+\infty)$ اکیداً نزولی (نزولی)

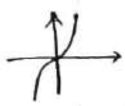
اجتماع بازه‌ها: صعودی ← $(-\infty,1)$ ، نزولی ← $[-2,+\infty)$

تمرین: تابع $f(x)=\begin{cases}x-3 & x<-2\\ 2 & -2\le x<3\\ -2x+4 & x\ge 3\end{cases}$ روی بازه $(-\infty,a)$ صعودی است بیشترین مقدار a کدام است؟ (رسم نمودار)

تمرین: ابتدا تابع مقابل را رسم کنید سپس بازه‌هایی که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید

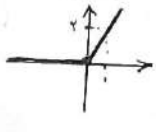
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 1 & 0\le x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases}$$

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم.

مثلاً تابع $y=x^3$ با نمودار  اکیداً صعودی است ← اکیداً یکنوا

$y=-x^3$ با نمودار  اکیداً نزولی است ← اکیداً یکنوا

نکته: تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم.

مثلاً تابع $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$ با نمودار  در $(-\infty,+\infty)$ صعودی است ← یکنوا

توجه: یکنوا یعنی جهت تغییرات y همواره یکسان است.

نکته: ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد. می گوئیم این تابع در کل دامنه اش نه صعودی است و نه نزولی (غیر یکنوا)

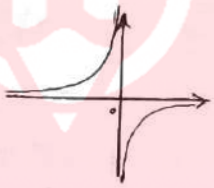
مثلاً تابع $y=x^2$ با نمودار

در $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی
در $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی
اما در کل دامنه اش ($\mathbb{R}$) نه صعودی است نه نزولی (غیر یکنوا)

توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا مسائل کار در کلاس صفحه ۸ و کار در کلاس پائین صفحه ۹ بررسی شوند.

مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد. (غیر یکنوا)

پاسخ ← نمودار تابع به صورت



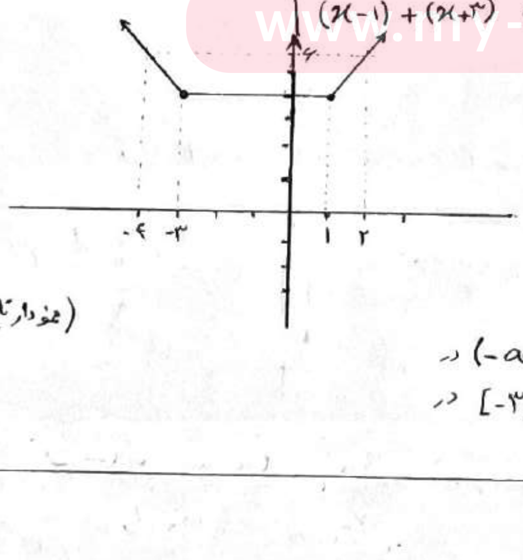
مثال: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=|x-1|+|x+3|$ را ابتدا رسم کرده سپس مشخص کنید در چه بازه های صعودی و در چه بازه های نزولی است؟

یک عبارت قدر مطلقی به ازای مقادیر کوچکتر از ریشه اش پس از حذف قدر مطلق منفی می شود
به ازای مقادیر بزرگتر مساوی ریشه اش مثبت می شود

پاسخ ← ابتدا قدر مطلقها را حذف می کنیم و تابع را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم

ریشه عبارت $=1$ ، ریشه عبارت $=-3$ ، ساده شود

$$f(x)=|x-1|+|x+3| = \begin{cases} -(x-1)-(x+3) & x<-3 \\ -(x-1)+(x+3) & -3\leq x<1 \\ (x-1)+(x+3) & x\geq 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x-2 & x<-3 \\ 4 & -3\leq x<1 \\ 2x+2 & x\geq 1 \end{cases}$$



(نمودار تابع گلدانی)

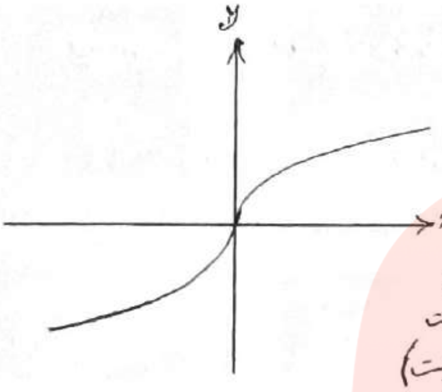
در $(-\infty,-3]$ اکیداً نزولی
در $[-3,1]$ ثابت
در $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی

با در نظر گرفتن تابع ثابت به عنوان هم صعودی و هم نزولی داریم:
در $(-\infty,1]$ ← نزولی
در $[-3,+\infty)$ ← صعودی

تست : (کنکور ۹۸) تابع با ضابطه $f(x)=|x+2|+|x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,-2)$ ✓ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

نکته : به نمودار تابع مقابل دقت کنید.



اکیداً صعودی است

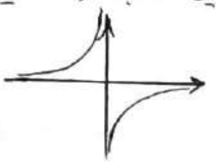
یک به یک است (زیرا هر خط افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند)

نتیجه می‌گیریم هر تابع اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا) حتماً یک به یک است (زیرا توابع اکیداً صعودی همواره در حال افزایش می‌باشند پس هیچ قسمت نمودار افقی نیست لذا یک به یک است به عبارت دیگر در توابع اکیداً صعودی دو x متمایز دارای عرض‌های متمایزی باشند پس یک به یک است)

توجه : مطلب بالا به طور مشابه برای توابع اکیداً نزولی برقرار است.

نتیجه : با توجه به نکته بالا اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد حتماً یک به یک نیز هست ولی عکس این مطلب درست نیست یعنی ممکن است تابعی یک به یک باشد ولی یکنوا نباشد.

مثال :



سؤالات امتحان نهایی :

۱- درستی یا نادرستی را مشخص کنید.

(دی ۹۷ خرداد ۹۹) الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود ☐

(خرداد ۹۸) ب) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنهٔ خود اکیداً یکنوا است ☐

(ش ۹۸) ج) تابع $f(x)=-x^3+2$ در دامنهٔ تعریفش صعودی است ☐

۲- در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

(شهریور ۹۹) الف) توابع اکیداً یکنوا همواره .... هستند.

(دی ۹۸) ب) تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع .... نامیده می‌شود.

(خ ۹۸) ج) تابع $y=(x+1)^4$ در دامنهٔ تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است.

(ش ۹۸) د) تابع $y=x^2|x|$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a برابر ...... است.

توجه : تمرینات صفحه ۱۰ کتاب درسی مهم می‌باشد پس از مطالعه دقیق جزوه تا اینجا حتماً مورد حل و بررسی قرار گیرد.

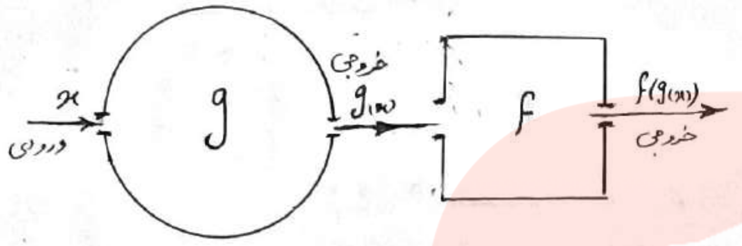
درس دوم

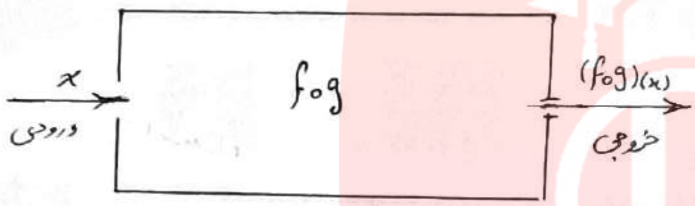
« ترکیب توابع »

gof می‌خوانیم

تابع مرکب: اگر f و g دو تابع باشند آنگاه، ترکیب دو تابع f و g را با نماد fog نشان می‌دهیم و به آن تابع مرکب گویند.

تابع fog به صورت شکل مقابل تعریف می‌شود:





ضابطه تابع مرکب: با توجه به شکلهای بالا ضابطه تابع مرکب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\boxed{(fog)(x) = f(g(x))}$$

برای به خاطر سپردن این ضابطه بگوئید تابعی که نزدیک x است به درون پرانتز می‌رود

توجه: به طور مشابه ضابطه تابع gof نیز تعریف می‌شود:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

تابع f نزدیک x است به داخل پرانتز می‌رود

مثال: اگر $f(x)=\frac{x}{x-1}$ و $g(x)=\sin x$ آنگاه ضابطه تابع مرکب fog را بدست آورید.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)-1} = \frac{\sin x}{\sin x - 1}$$

در ضابطه $f(x)$ به جای x ها باید $g(x)$ قرار دهیم. مثلاً $f(\bigcirc) = \frac{\bigcirc}{\bigcirc - 1}$

حال با توجه به صورت مثال جایگزین می‌کنیم

مثال: اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x-5}$ ضابطه توابع $f\circ g$ ، $g\circ f$ ، $f\circ f$ ، $g\circ g$ را بدست آورید.

پاسخ ←

g نزدیک x است داخل پرانتز برود

در ضابطه f به جای xها $g(x)$ قرار دهیم

به جای $g(x)$ جایگزین می‌کنیم

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{2}{g(x)-1}=\frac{2}{\sqrt{x-5}-1}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)-5}=\sqrt{\left(\frac{2}{x-1}\right)-5}$$

f نزدیک x است داخل پرانتز می‌رود

در ضابطه g به جای xها $f(x)$ قرار دهیم

حال به جای $f(x)$ جایگزین می‌کنیم.

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\frac{2}{f(x)-1}=\frac{2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)-1}$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\sqrt{g(x)-5}=\sqrt{\sqrt{x-5}-5}$$

g نزدیک x است داخل پرانتز برود

در ضابطه g به جای x ها $g(x)$ قرار دهیم

جایگزینی به جای $g(x)$

توجه: با مقایسه ضابطه توابع $g\circ f$ و $f\circ g$ در مثال بالا نتیجه می‌گیریم در حالت کلی: $g\circ f\neq f\circ g$

تمرین: اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ و $g(x)=\frac{3}{x}$ ضابطه $f\circ g$ را بدست آورید.

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\sqrt{x+3}$ دو تابع باشند ضابطه $f\circ g$ و $g\circ f$ را محاسبه کنید.

تمرین: توابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=x^2$ و $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ مفروضند. $f\circ g$ و $g\circ f$ را محاسبه کنید سپس درست یا نادرست بودن $g\circ f=f\circ g$ را نتیجه بگیرید.

مثال (خرداد ۹۹): اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

پاسخ ←

$$f(x)=3x-4 \xrightarrow[\text{قرار دهیم}]{\text{به جای } x \text{ تابع } g(x)} f(g(x))=3g(x)-4$$

از طرفی (طبق صورت مسئله): $f(g(x))=3x^2-6x+14$

$$\xrightarrow[\text{برابر قرار دهیم}]{\text{سمت چپ ها برابرند پس سمت راست را}} 3g(x)-4=3x^2-6x+14$$

$$3g(x)=3x^2-6x+18 \xrightarrow{\div 3} \boxed{g(x)=x^2-2x+6}$$

جواب

تمرین: اگر $f(x)=x^2+2x+2$ باشد تابع $g(x)$ را به گونه ای بیابید که: $(fog)(x)=x^2-4x+5$

مثال: اگر $f(x)=3x^2+x-1$ و $g(x)=1-2x$ آنگاه جوابهای معادله $(gof)(x)=-5$ را بدست آورید.

پاسخ ← ابتدا $(gof)(x)$ را تشکیل می دهیم سپس آن را مساوی ۵- قرار دهیم:

$$\begin{cases} (gof)(x)=g(f(x))=1-2f(x) \overset{\text{به جای } f(x) \text{ جایگذین می‌کنیم}}{=} 1-2(3x^2+x-1)=1-6x^2-2x+2=\boxed{-6x^2-2x+3} \\ (gof)(x)=-5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6x^2-2x+3=-5 \rightarrow -6x^2-2x+8=0 \xrightarrow{\div(-2)} 3x^2+x-4=0 \rightarrow (3x+4)(x-1)=0 \rightarrow x=1,\ x=-\frac{4}{3}$$

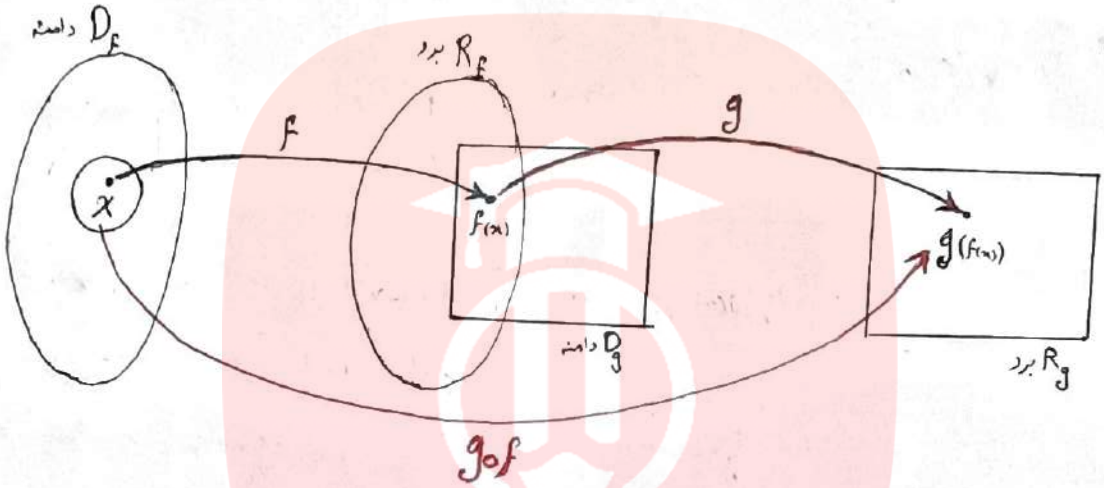
نکته: در عبارت $3x^2+x-4=0$ چون مجموع ضرایب صفر است یکی از ریشه‌ها $x=1$ و ریشه دیگر $x=+\frac{c}{a}=+\frac{-4}{3}=-\frac{4}{3}$ است (روش دوم برای بدست آوردن جوابهای معادله درجه دوم آخر)

تمرین: اگر $f(x)=3x+2$ و $g(x)=x^2+x+5$ آنگاه معادله $(gof)(x)=17$ را حل کنید.

تست کنکور ۹۶: اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$ ضابطه تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) x ۴) $2x$ ✓

دامنه تابع مرکب: برای درک بهتر دامنه تابع مرکب gof به شکل زیر دقت کنید:



بنابراین دامنه تابع gof به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}}$$

* به طور مشابه دامنه تابع fog به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

تابع داخل

دامنه تابع داخلی را ابتدا می‌نویسیم و همیشه x عضو آن هست

دامنه تابع بیرونی در مرحله بعد نوشته می‌شود

$$(fog)(x)=f(g(x))$$

تابع که داخل پرانتز ورودی را تابع داخلی می‌گوییم

مثال: اگر $f(x)=\frac{2}{x-1}$ ، $g(x)=\frac{3}{x}$ دامنه و ضابطه تابع fog را بدست آورید.

پاسخ ← (f یک تابع کسری گویا است $\to D_f=\mathbb{R}-\{1\}$) ($D_g=\mathbb{R}-\{0\} \to g$ یک تابع کسری گویا است)

ضابطه: $(fog)(x)=f(g(x))=\frac{2}{g(x)-1}=\frac{2}{(\frac{3}{x})-1}$

دامنه: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{\overset{\text{شرط اول}}{x\in\mathbb{R}-\{0\}} \mid \overset{\text{شرط دوم}}{\frac{3}{x}\in\mathbb{R}-\{1\}}\}=(\mathbb{R}-\{0\})\cap(\mathbb{R}-\{3\})=\mathbb{R}-\{0,3\}$

اشتراک شرط اول و ساده شده شرط دوم

ساده کردن شرط دوم در چرک نویس: $\frac{3}{x}\in\mathbb{R}-\{1\}\to\frac{3}{x}\neq1\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}x\neq3$ یا $\mathbb{R}-\{3\}$

مثال: اگر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=\sqrt{x-3}$ دامنه تابع مرکب gof را حساب کنید.

دامنه ↓ $D_f=\mathbb{R}$ دامنه ↓ $D_g=[3,+\infty)$

پاسخ ←

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{\overbrace{x\in\mathbb{R}}^{\text{شرط اول}} \mid \overbrace{2x+1\in[3,+\infty)}^{\text{شرط دوم}}\}=\mathbb{R}\cap[1,+\infty)=[1,+\infty)$$

اشتراک شرط اول و ساده شده شرط دوم

جواب

محاسبات ساده کردن شرط دوم در چرک نویس:

$$2x+1\in[3,+\infty)\longrightarrow 2x+1\geq 3\longrightarrow 2x\geq 2\xrightarrow{\div 2} x\geq 1$$
$$[1,+\infty)$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$، دامنه تابع $(fog)(x)$ را حساب کنید.

ب) ضابطه fog را بنویسید.

پاسخ ← $1-x\geq 0\Rightarrow x\leq 1\rightarrow D_f=(-\infty,1]$ $\quad x-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\longrightarrow D_g=[1,+\infty)$

الف)

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{\overbrace{x\in[1,+\infty)}^{\text{شرط اول}} \mid \overbrace{\sqrt{x-1}\in(-\infty,1]}^{\text{شرط دوم}}\}$$

$$=[1,+\infty)\cap(-\infty,2]=[1,2]$$

اشتراک شرط اول و ساده شده شرط دوم

جواب

محاسبات ساده کردن شرط دوم در چرک نویس:

$$\sqrt{x-1}\in(-\infty,1]\longrightarrow\sqrt{x-1}\leq 1$$
$$\xrightarrow{\text{به توان}} x-1\leq 1\longrightarrow x\leq 2$$
$$(-\infty,2] \text{ شرط دوم}$$

ب) به عهده دانش آموز

نکته: اگر تابع f و g به صورت زوج مرتب داده شده باشند در این صورت برای محاسبه تابع مرکب gof به صورت زوج های مرتب چون

$$\boxed{D_{gof}\subseteq D_f}$$

همواره دامنه تابع مرکب زیرمجموعه دامنه تابع داخلی آن است

لذا کافیست gof را روی تک تک اعضای D_f تأثیر دهیم اگر جوابی بدست آمد یک زوج مرتب از تابع gof حاصل شده است (که مؤلفه اول همان عضو D_f و مؤلفه دوم همین عددی که از تأثیر gof حاصل و شود)

مثال : اگر $f=\{(-1,1)\ (1,2)\ (2,3)\ (4,5)\}$ و $g=\{(-1,0)\ (1,2)\ (2,4)\ (5,3)\}$ آنگاه تابع مرکب fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ ⟵ $D_{fog} \subseteq D_g=\{-1,1,2,5\}$: همواره دامنه تابع مرکب زیرمجموعه دامنه تابع داخلی آن می باشد

بنابراین fog را روی تک تک اعداد ۵ ، ۲ ، ۱ ، ۱- تاثیر می دهیم

$(fog)(-1)=f(g(-1))=f(0)=$ وجود ندارد

$(fog)(1)=f(g(1))=f(2)=3$

$(fog)(2)=f(g(2))=f(4)=5$

$(fog)(5)=f(g(5))=f(3)=$ وجود ندارد

$\Longrightarrow fog=\{(1,3)\ (2,5)\}$ جواب

تمرین : با توجه به مثال بالا تابع مرکب gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.

مثال : اگر $f=\{(0,-1)\ (5,2)\ (3,5)\ (-2,4)\}$ و $g=\{(1,2)\ (3,-1)\ (2,0)\ (-1,4)\ (5,7)\}$ باشند آنگاه تابع gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ ⟵ $D_{gof} \subseteq D_f=\{0,5,3,-2\}$: همواره دامنه تابع مرکب زیرمجموعه دامنه تابع داخلی آن می باشد.

f ⟵ تابع داخلی

بنابراین gof را روی تک تک اعداد ۲- ، ۳ ، ۵ ، ۰ تاثیر می دهیم.

$(gof)(0)=g(f(0))=g(-1)=4$

$(gof)(5)=g(f(5))=g(2)=0$

$(gof)(3)=g(f(3))=g(5)=7$

$(gof)(-2)=g(f(-2))=g(4)=$ وجود ندارد

$\Longrightarrow gof=\{(0,4)\ (5,0)\ (3,7)\}$

تمرین : با توجه توابع $f=\{(1,2)\ (2,-1)\ (3,1)\ (4,2)\}$ و $g=\{(1,-2)\ (2,3)\ (5,2)\ (-1,3)\}$ تابع مرکب gof را به صورت زوج مرتب بنویسید.

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g=\{(0,4)(3,2)(5,6)\}$ دو تابع باشند تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید.

پاسخ ⟵ می‌دانیم: $D_{fog} \subseteq D_g = \{0, 3, 5\}$

لذا fog را روی تک تک اعداد ۰، ۳، ۵ تأثیر دهیم تا مولفه دوم زوج‌ها در صورت وجود بدست آید.

$$\left.\begin{array}{l} (fog)(0) = f(\overset{4}{g(0)}) = f(4) = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1 \\ (fog)(3) = f(\overset{2}{g(3)}) = f(2) = \sqrt{2-3} = \sqrt{-1} \rightarrow \text{وجود ندارد} \\ (fog)(5) = f(\overset{6}{g(5)}) = f(6) = \sqrt{6-3} = \sqrt{3} \end{array}\right\} \rightarrow fog = \{(0,1)\ (5,\sqrt{3})\}$$

جواب

توجه: تمرینات ۱ تا ۹ صفحه ۲۲ کتاب درسی در این مرحله پس از مطالعه دقیق جزوه حل و بررسی شود.

---

* چند تمرین از سؤالات امتحان نهائی:

۱- (دی ۹۷) توابع $f(x)=\frac{x+3}{2x}$ و $g(x)=3x-1$ را در نظر بگیرید دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف بدست آورید.

۲- (خرداد ۹۸) دو تابع $f(x)=\sqrt{x-4}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف بدست آورید.

۳- (شهریور ۹۸) (شهریور ۹۹) اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد دامنه و ضابطه $(fog)(x)$ را بدست آورید.

۴- (دی ۹۸) اگر $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ باشد دامنه تابع fog را به کمک تعریف محاسبه کنید.

۵- (خرداد ۹۹) اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را بدست آورید.

۶- اگر $f(x)=\sqrt{3-2x}$ و $g(x)=\frac{6}{x-5}$ ، دامنه تابع gof را بدست آورید.
(جواب: $(-\infty,\frac{3}{2}]-\{-1\}$)

انتقال نمودار توابع:

یادآوری: ۱) اگر نمودار $y=f(x)$ را a واحد به بالا انتقال دهیم نمودار $y=f(x)+a$ حاصل می‌شود.

۲) " " " " " " به پایین " " " $y=f(x)-a$ " " " .

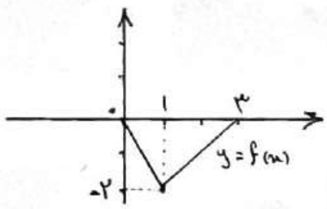
۳) " " " " " " " به راست " " $y=f(x-a)$ " " " .

۴) " " " " " " " به چپ " " $y=f(x+a)$ " " " .

رسم نمودار $y=kf(x)$:

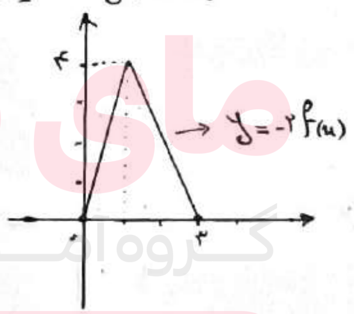
برای رسم نمودار تابع $y=kf(x)$ کافیست فقط عرض نقاط $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

مثال: اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد با استفاده از آن نمودار $y=-2f(x)$ را رسم کنید.
دامنه و برد آنرا با دامنه و برد $y=f(x)$ مقایسه کنید.



پاسخ ←

نقاط $y=f(x)$		نقاط $y=-2f(x)$
(۰,۰)	$\xrightarrow[\text{عرض} \times -2]{\text{طول ثابت}}$	(۰,۰)
(۱,-۲)		(۱,۴)
(۳,۰)		(۳,۰)

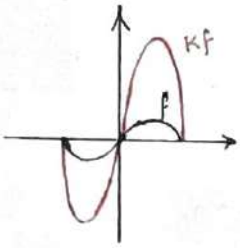


ب) $D_f=[0,3]$ ، $D_{-2f}=[0,3]$ دامنه‌ها

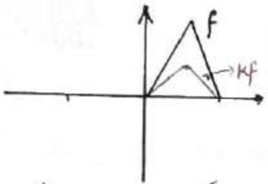
$R_f=[-2,0]$ ، $R_{-2f}=[0,4]$ بردها

نکته: دامنه تابع $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

نکته: (تغییرات نمودار $y=kf(x)$ نسبت به نمودار $y=f(x)$)



اگر $k>1$ نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k کشیده می‌شود (انبساط عمودی)



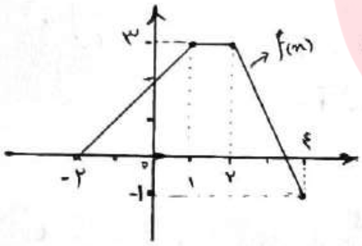
اگر $0<k<1$ نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود (انقباض عمودی)

اگر $k<0$ ابتدا نمودار نسبت به محور x ها قرینه می‌شود سپس با ضریب $|k|$ در امتداد محور y ها کشیده یا فشرده می‌شود.

رسم نمودار $y=f(kx)$

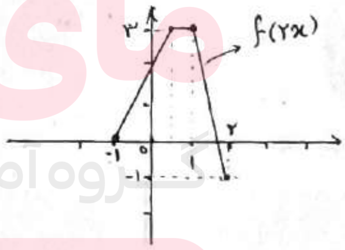
برای رسم نمودار $y=f(kx)$ کافیست طول نقاط نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

مثال: با توجه به نمودار تابع f به صورت مقابل نمودار تابع $y=f(\underbrace{2}_{k}x)$ را رسم کنید.



پاسخ ←

نقاط $f(x)$	طول $\times \frac{1}{k}$ ، عرض ثابت ($\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$)	نقاط $f(2x)$
$(-2,0)$	→	$(-1,0)$
$(1,3)$	→	$(\frac{1}{2},3)$
$(2,3)$	→	$(1,3)$
$(4,-1)$	→	$(2,-1)$

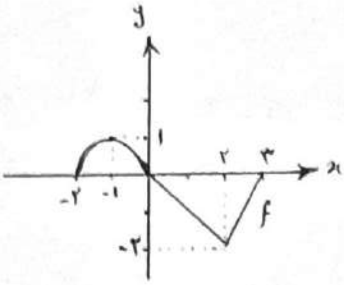


$D_f=[-2,4] \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} D_{f(2x)}=[-1,2]$

بردها: $R_f=[-1,3]$ ، $R_{f(2x)}=[-1,3]$

نکته: از مثال بالا نتیجه می‌گیریم $D_f=[a,b] \xrightarrow{\times \frac{1}{k}} D_{f(kx)}=\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right]$

ولی بردهای $f(kx)$ و $f(x)$ یکسان است.



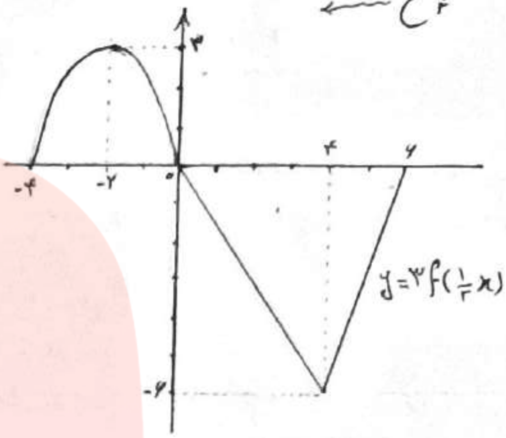
مثال: (خرداد ۹۹) نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده

الف) نمودار تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع $y=3f(\frac{1}{2}x)$ را تعیین کنید.

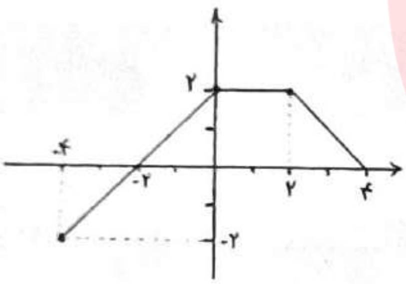
پاسخ ⟵

نقاط f		نقاط $3f(\frac{1}{2}x)$
$(-2,0)$		$(-4,0)$
$(-1,1)$	$\times 2$ طول ($\frac{1}{k}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$)	$(-2,3)$
$(0,0)$	$\times 3$ عرض	$(0,0)$
$(2,-2)$		$(4,-6)$
$(3,0)$		$(6,0)$



ب) دامنه $D=[-4,6]$

برد $R=[-6,3]$

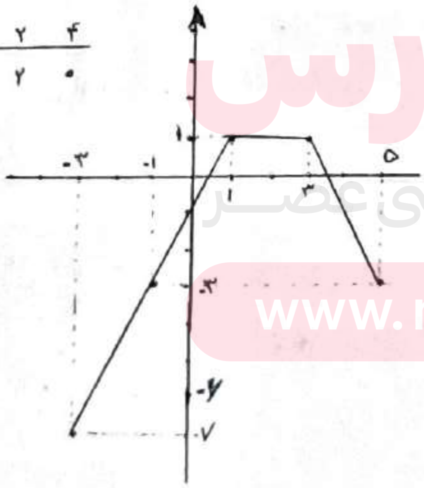


مثال: (تمرین ۱۲ ص ۲۳ کتاب) با استفاده از نمودار تابع f، نمودار $y=2f(x-1)-3$ را رسم کنید.

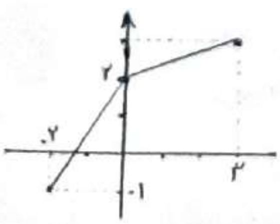
پاسخ ⟵ نقاط $y=f(x)$ را یک واحد به راست سپس عرضها دو برابر و در انتها سه واحد به پایین منتقل می کنیم.

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	0	2	2	0

x	$-4+1 = -3$	$-2+1$	$0+1$	$2+1$	$4+1 = 5$
$y=2f(x-1)-3$	$2(-2)-3 = -7$	$2(0)-3$	$2(2)-3$	$2(2)-3$	$2(0)-3 = -3$



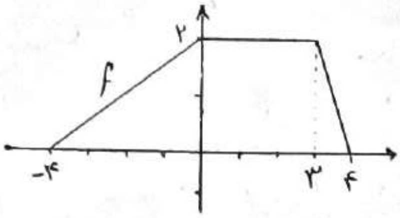
چند مسئله امتحان نهائی:



۱ـ (دی ۹۷) با استفاده از نمودار تابع f نمودار $y=f(\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید.

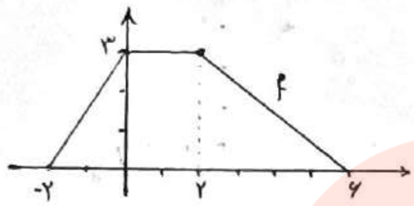
تمرین ۲ (خرداد ۹۸) با استفاده از نمودار $y=f(x)$ نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید

دامنه و برد تابع جدید را بدست آورید.



تمرین ۳ (شهریور ۹۹) : نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل رسم شده

نمودار $y=\frac{1}{2}f(2x)$ را رسم کنید.



نکته : (تغییرات نمودار $y=f(kx)$ نسبت به نمودار $y=f(x)$)

۱) اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود (انقباض افقی)

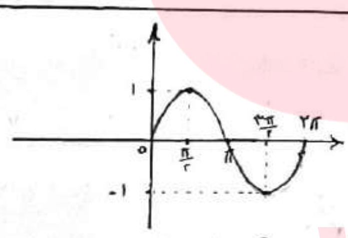
۲) اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود (انبساط افقی)

۳) اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور y ها قرینه می‌شود سپس با ضریب $|\frac{1}{k}|$ به طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

رسم نمودار $|f|$

برای رسم نمودار $|f|$، ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس قسمتی از نمودار که زیر محور x ها است را آینه‌وار نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

مثال:



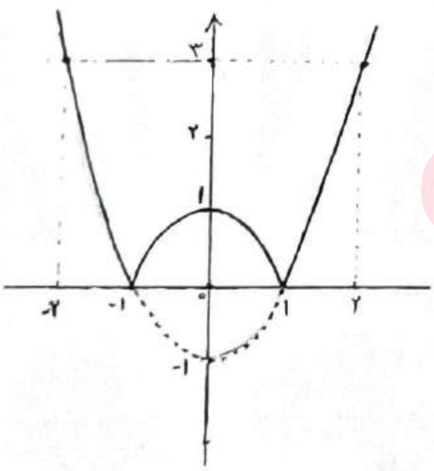
$y=\sin x$

$y=|\sin x|$

مثال: نمودار تابع $y=|x^2-1|$ را رسم کنید.

پاسخ: ابتدا نمودار $y=x^2-1$ را از انتقال $y=x^2$ یک واحد به پایین رسم می‌کنیم

سپس قسمتهایی که زیر محور x ها قرار دارند را آینه‌وار نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.



$y=|x^2-1|$

تمرین: نمودار $y=||x|-1|$ را رسم کنید.

درس سوم : (تابع وارون)

اگر f تابعی یک به یک باشد آنگاه وارون پذیر است و تابع وارون را با نماد f^{-1} نشان می دهند.

نکته: اگر f به صورت زوج مرتبی داده شده باشد و جای مولفه های اول و دوم زوج ها را عوض کنیم f^{-1} حاصل می شود.

$$f=\{(3,2)(5,1)(0,7)\} \longrightarrow f^{-1}=\{(2,3)(1,5)(7,0)\}$$

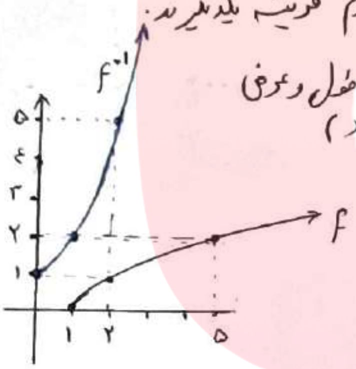
توجه: به طور کلی اگر $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f^{-1}$

$$\begin{cases} \text{دامنه } D_f = \overset{\text{برد}}{R_{f^{-1}}} \\ \text{دامنه } D_{f^{-1}} = R_f \end{cases}$$

نکته: نمودار f و f^{-1} نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

(بنابراین اگر نمودار f را داشته باشیم کافیست جای طول و عرض نقاط f را عوض کنیم مختصات نقاط f^{-1} حاصل می شود)

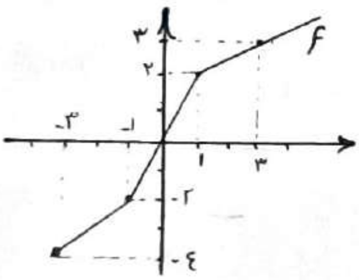
مثال:



نقاط نمودار f	نقاط نمودار f^{-1}
(1,0)	(0,1)
(2,1)	(1,2)
(5,2)	(2,5)

$D_f=R_{f^{-1}}=[1,+\infty)$

مثال: نمودار f به صورت مقابل است نمودار f^{-1} از کدام یک از نقاط زیر عبور نمی کند؟



1) $(2,1)$ 2) $(3,3)$ 3) $(-3,-4)$ 4) $(-1,-2)$

تمرین: با توجه به نمودار بالا حاصل $\dfrac{f^{-1}(2)+f(-3)}{f^{-1}(-4)+f^{-1}(-2)}$ را بدست آورید.

مثال: اگر $f(x)=3ax-5$ و نقطه $(4,7)$ روی نمودار تابع f^{-1} باشد مقدار a را بدست آورید.

$(4,7)\in f^{-1} \Rightarrow (7,4)\in f \rightsquigarrow f(7)=4$

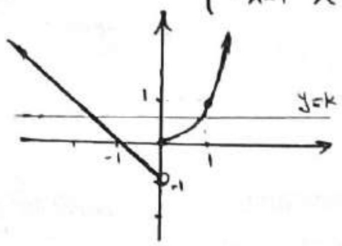
$3a(7)-5=4$

$21a=9$

$\boxed{a=\frac{9}{21}}$

مثال: به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع مقابل وارون پذیر نیست.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0\\ -x-1 & x<0\end{cases}$$



پاسخ ← خط افقی $y=k$ نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد بود.

نکته مهم: اگر f تابعی وارون پذیر و f^{-1} وارون آن باشد همواره داریم:

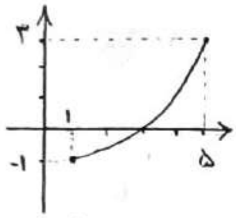
$$\begin{cases} (f\circ f^{-1})(x)=x & ; \quad x\in D_{f^{-1}} \\ (f^{-1}\circ f)(x)=x & ; \quad x\in D_f \end{cases}$$

دامنه تابع داخلی

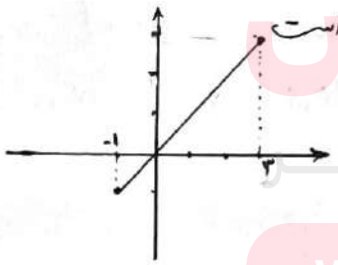
دامنه تابع داخلی

به عبارت دیگر ترکیب هر تابع با تابع وارون خود حتماً تابع همانی است.

مثال: شکل مقابل نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $y=(f\circ f^{-1})(x)$ کدام است؟



پاسخ ← طبق نکته بالا گفتیم $(f\circ f^{-1})(x)$ همان تابع همانی $y=x$ است فقط دامنه آن همان دامنه f^{-1} (تابع داخلی) یعنی برد f است، در شکل برد f بازه $[-1,3]$ است.



به طور کلی: دو تابع f و g وارون یکدیگرند هرگاه:

$$\begin{cases} (f\circ g)(x)=x & x\in D_g \\ (g\circ f)(x)=x & x\in D_f \end{cases}$$

دامنه تابع داخلی

(یعنی اگر ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی باشد f و g وارون یکدیگرند)

مثال: نشان دهید دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$ و $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند.

پاسخ ←

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)}+3=\frac{1}{\frac{1}{x-3}}+3=(x-\cancel{3})+\cancel{3}=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\frac{1}{f(x)-3}=\frac{1}{(\frac{1}{x}+3)-3}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$$

دی ۹۸

تمرین: نشان دهید توابع $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند.

نحوهٔ محاسبهٔ ضابطهٔ تابع وارون:

برای بدست آوردن ضابطهٔ تابع وارون f^{-1}

ابتدا در معادله $y=f(x)$: متغیر x را برحسب y محاسبه می‌کنیم (یعنی x را تنها در یک طرف نگه داریم)

سپس جای x و y را عوض می‌کنیم (y به x و برعکس).

مثال: برای توابع زیر ضابطهٔ تابع وارون را بدست آورید:

الف) $f(x)=1+\sqrt[3]{x-5}$

$$y=1+\sqrt[3]{x-5} \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y-1=\sqrt[3]{x-5} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} (y-1)^3=x-5$$

$$\rightarrow x=(y-1)^3+5$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} \boxed{y=(x-1)^3+5} : f^{-1}(x)$$

ب) $g(x)=\frac{3x+8}{5}+4$

$$y=\frac{3x+8}{5}+4 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y-4=\frac{3x+8}{5} \rightarrow 3x+8=5y-20$$

$$\rightarrow 3x=5y-28$$

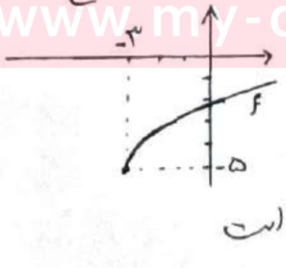
$$\rightarrow x=\frac{5y-28}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}} \boxed{y=\frac{5x-28}{3}} : g^{-1}(x)$$

مثال: وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون پذیر بودن تابع، ضابطهٔ تابع وارون را بدست آورید:

$f(x)=\sqrt{x+3}-5$

پاسخ ⟵ نمودار تابع f از طریق انتقال به صورت



است، چون خط‌های افقی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند لذا f یک‌به‌یک است

درنتیجه وارون پذیر است.

$$y=\sqrt{x+3}-5 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y+5=\sqrt{x+3} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y+5)^2=x+3 \rightarrow x=(y+5)^2-3$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر نام}} \boxed{y=(x+5)^2-3} : f^{-1}(x)$$

$$D_{f^{-1}}=R_f=[-5,+\infty)$$

مثال (کنکور ۹۹): اگر $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+\sqrt{x}$ باشد مقدار $g(6)+g(12)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

$f(x)=x+\sqrt{x}$, $g(x)=f^{-1}(x) \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ عدد } 6} g(6)=f^{-1}(6)=x \rightsquigarrow f(x)=6 \rightsquigarrow x=4$

فرض کنیم — به ازای چه مقداری از x

$\xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{به جای } x \text{ عدد } 12} g(12)=f^{-1}(12)=x \rightsquigarrow f(x)=12 \rightsquigarrow x=9$

فرض کنیم

$\Rightarrow g(6)+g(12)=4+9=\boxed{13}$

توجه: $y=f(x) \Rightarrow f^{-1}(y)=x$

تمرین: اگر $f(x)=\sqrt{x+5}$ دامنه و برد توابع f و f^{-1} را بدست آورده و نمودار آنها را رسم کنید و ضابطه f^{-1} را نیز بدست آورید.

مثال: (کنکور ۹۸ داخل) اگر $f(x)=x^2-2x-3 \; ; \; x\geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱ ✓

پاسخ:
$f(x)=\underbrace{x^2-2x-3}_{+1-4}=(x-1)^2-4 \; ; \; x\geq 1$

حال وارون f را پیدا می‌کنیم:

$\Longrightarrow y=(x-1)^2-4 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y+4=(x-1)^2 \longrightarrow \sqrt{y+4}=x-1 \longrightarrow x=\sqrt{y+4}+1$

$f^{-1}(x)$: $\xrightarrow{\text{تغییر نام}} \boxed{y=\sqrt{x+4}+1}$

حال نقطه تلاقی $f^{-1}(x)$ و $g(x)$ را می‌یابیم:

$\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{کنترل گزینه‌ها}} x=\boxed{21}$

تمرین: وارون هر یک از توابع زیر را بدست آورید.

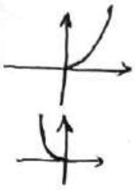
الف) $y=(x+1)^3-2$

ب) $f(x)=1+\sqrt{x-2}$

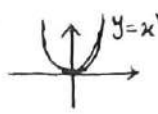
ج) $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$

د) $g(x)=\frac{x}{2}+3$

نکته : می دانیم اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می توان تابعی یک به یک بدست آورد.



مثلاً تابع f با نمودار



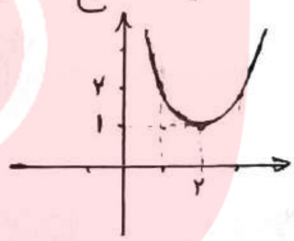
$y=x^2$

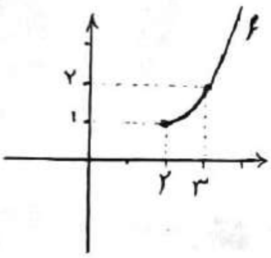
$D_f=(-\infty,+\infty)$

یک به یک نیست ولی با محدود کردن دامنه تابع به بازهٔ $[0,+\infty)$ و یا بازهٔ $(-\infty,0]$ تابع یک به یک بدست می آید.

مثال : با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک بدست آورید. دامنه و برد تابع (یک به یک) و وارون آن‌را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

پاسخ ←
$$f(x)=x^2-4x+\overset{4+1}{5}=(x-2)^2+1$$





دامنه f را به بازهٔ $[2,+\infty)$ محدود می کنیم نمودار آن به صورت مقابل می شود که یک به یک است و لذا وارون پذیر است. (ضابطه تغییر نمی کند ولی دامنه تغییر می کند)

$f(x)=(x-2)^2+1$ $\quad D_f=[2,+\infty)$ و $R_f=[1,+\infty)$

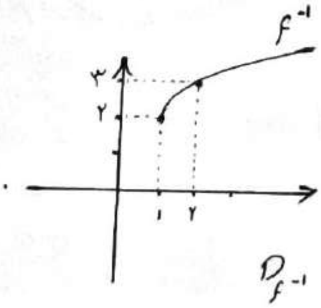
محاسبه ضابطه تابع وارون : $y=(x-2)^2+1 \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ بر حسب } y} y-1=(x-2)^2 \xrightarrow{\text{جذر}} x-2=\pm\sqrt{y-1}$

چون $D_f=[2,+\infty)$ یعنی $x\geq 2 \to x-2\geq 0$ لذا علامت منفی طرف دوم غیرقابل قبول است

$\Rightarrow x-2=\sqrt{y-1}$

$\Rightarrow x=\sqrt{y-1}+2$

$\xrightarrow{\text{تعویض } x,y} \boxed{y=\sqrt{x-1}+2} : f^{-1}(x)$



حال جای طول و عرض نقاط f را عوض کنیم نقاط f^{-1} بدست می آید:

$D_{f^{-1}}=[1,+\infty)$ و $R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$

توجه: در مثال بالا اگر دامنه را به $(-\infty,2]$ نیز محدود کنیم جواب مشابه است.

$\boxed{y=-\sqrt{x-1}+2} : f^{-1}(x)$

منفی

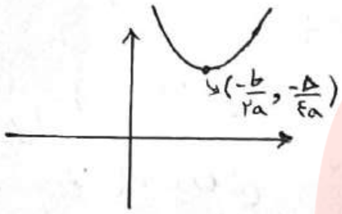
تمرین: (خرداد ۹۹ خارج) : الف) وارون تابع $y=\sqrt{x+2}$ را بدست آورید.

ب) با محدود کردن دامنه تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک بدست آورید و ضابطه تابع وارون را بدست آورید.

نکته: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ با دامنه $(-\infty,+\infty)$ یک به یک نیست ولذا وارون پذیر نمی باشد

اما در بازه های محدود $(-\infty,\frac{-b}{2a}]$ و $[\frac{-b}{2a},+\infty)$ یک به یک ولذا وارون پذیر است

طول راس سهمی



برد این توابع $R_f=[\frac{-\Delta}{4a},+\infty)$ می باشد (وقتی $a>0$ باشد)

عرض راس سهمی

نکته: برای محاسبه ضابطه تابع وارون در توابع چندضابطه ای کافیست در تک تک ضابطه ها x را برحسب y بدست آورده وسپس جای x و y را عوض کنیم.

مثال: ضابطه وارون تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ را بدست آورید.

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{محاسبه } x \text{ برحسب } y} y^2=x \longrightarrow x=y^2 \xrightarrow[\text{عوض}]{\text{جای } x \text{ و } y} \boxed{y=x^2} : f^{-1}$$

$$y=-\sqrt{-x} \longrightarrow y^2=-x \longrightarrow x=-y^2 \longrightarrow \boxed{y=-x^2} : f^{-1}$$

$D_{f^{-1}}=R_f$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases} \quad \text{یا} \quad f^{-1}(x)=x|x|$$

وارون تابع مرکب: همواره داریم

$$\boxed{(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}}$$

یعنی اگر ترکیب دو تابع را وارون کنیم تک تک تابع ها وارون می شود و جای آنها عوض می شود.

نهایی ۹۸،۹۷

مثال (تمرین کتاب درسی) : اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3$ و $g(x)=x^3$ مقادیر زیر را بدست آورید.

الف) $(f\circ g)^{-1}(5)$

ب) $(g^{-1}\circ f^{-1})(5)$

پاسخ ←

الف) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{8}g(x) - 3 = \frac{1}{8}x^3 - 3$

حال x را برحسب y بدست می‌آوریم:

$y = \frac{1}{8}x^3 - 3 \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} y+3 = \frac{1}{8}x^3 \xrightarrow{\times 8} 8(y+3) = x^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم}} x = \sqrt[3]{8(y+3)}$

$\xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} \boxed{y = \sqrt[3]{8(x+3)}} : (f\circ g)^{-1}(x)$

$(f\circ g)^{-1}(x) = \sqrt[3]{8(x+3)} \xrightarrow{x=5} (f\circ g)^{-1}(5) = \sqrt[3]{64} = 4$

ب) $g(x) = x^3$

$y = x^3 \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} \sqrt[3]{y} = x \longrightarrow x = \sqrt[3]{y} \xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} \boxed{y = \sqrt[3]{x}} : g^{-1}(x)$

$f(x) = \frac{1}{8}x - 3$

$y = \frac{1}{8}x - 3 \xrightarrow{\text{محاسبه x برحسب y}} y+3 = \frac{1}{8}x \xrightarrow{\times 8} x = 8(y+3) \xrightarrow{\text{جای x و y عوض}} \boxed{y = 8(x+3)} : f^{-1}(x)$

$(g^{-1}\circ f^{-1})(5) = g^{-1}(f^{-1}(5)) = g^{-1}(64) = \sqrt[3]{64} = 4$

تست کنکور ۹۸ خارج: اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^3 + x$ باشند مقدار $g^{-1}\circ f^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) ۲ ۳) ۲٫۵ ۴) ۳ ✓

تست (کنکور ۹۹ ریاضی)

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{9x+4}{1-x}$ باشند مقدار $(g^{-1}\circ f^{-1})(20)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ✓ ۲) $\frac{3}{5}$ ٤) $\frac{2}{3}$ ۵) $\frac{3}{4}$

$f^{-1}(20) = ?$

$x + \sqrt{x} = 20 \longrightarrow \sqrt{x} = 20 - x \Longrightarrow x^2 - 41x + 400 = 0 \Rightarrow (x-25)(x-16) = 0$ ، $\boxed{x = 16}$ ، $x = 25$ ✗

$g^{-1}(16)$?

$\frac{9x+4}{1-x} = 16 \Longrightarrow 16 - 16x = 9x + 4 \longrightarrow x = \frac{2}{5}$

روش دوم، قرینه: $(g^{-1}\circ f^{-1})(20) = a$

$20 \xrightarrow{f^{-1}} b \xrightarrow{g^{-1}} a$

$a \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} 20$

$f(b) = 20 \longrightarrow b + \sqrt{b} = 20 \longrightarrow b = 16$

$g(a) = 16 \longrightarrow \frac{9a+4}{1-a} = 16 \longrightarrow 9a + 4 = 16 - 16a \longrightarrow a = \boxed{\frac{2}{5}}$

(توجه: با توجه به مطالب بیان شده تا اینجا تمرینات صفحه ۲۹ کتاب درسی حل و بررسی شوند)