* تابع:

- اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد؛ هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور عرض‌ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
- اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشد هنگامی این مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مختص اول مساوی نباشند.
- یک تابع زمانی یک به یک است که به هر عضو مجموعه‌ی دوم بیش از یک عضو از مجموعه‌ی اول نظیر نشود.
- یک تابع در صورتی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد.
- یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محورها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

* توابع خاص و حل نامعادله:

- تابع همانی: دامنه و برد تابع برابرند. $f(x)=x$
- تعیین علامت:

① $f(x)=ax+b$, $x=-\frac{b}{a}$

x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	مخالف علامت a		موافق علامت a

② $f(x)=ax^2+bx+c$

$\Delta=b^2-4ac$

if: $\Delta>0 \longrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

x		x_1		x_2	
$f(x)$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق علامت a

if: $\Delta=0 \longrightarrow x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ریشه‌ی مضاعف

x		$x_1=x_2$	
$f(x)$	موافق علامت a		موافق علامت a

if: $\Delta<0 \longrightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد

x	
$f(x)$	موافق علامت a

* اگر x_1، x_2 ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم ax^2+bx+c باشند:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

* حاصل جمع هر عدد مثبت با معکوس خودش حداقل 2 است

if: $a>0 \xrightarrow{\text{then}} a+\frac{1}{a}\geq 2$

* اگر $a,b>0 \xrightarrow{\text{then}} (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$

* برای اینکه به ازای هر عدد حقیقی x، عبارت ax^2+bx+c همواره مثبت باشد، باید: $\Delta<0$, $a>0$

* برای اینکه به ازای هر عدد حقیقی x، عبارت ax^2+bx+c همواره منفی باشد، باید: $\Delta<0$, $a<0$

* اتحادها :

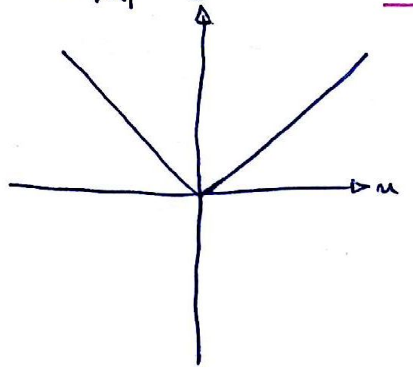
1. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
2. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
3. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
4. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

* ساده‌گیری چندجمله‌ای‌ها :

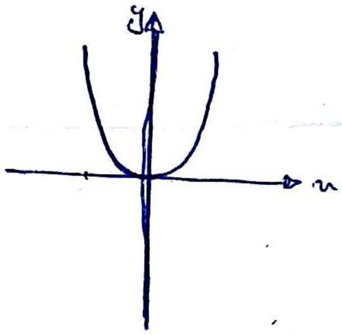
1. $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
2. $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$
3. $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$
4. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
5. $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

* نمودارهای مهم :

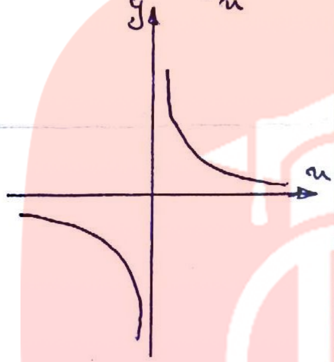
$f(x)=|x|$



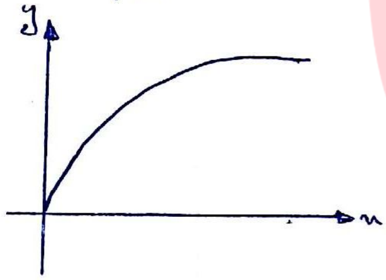
$f(x)=x^2$



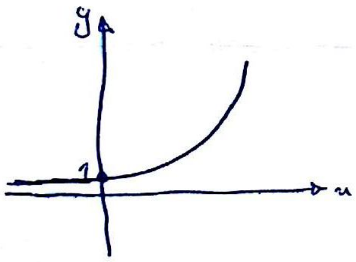
$f(x)=\frac{1}{x}$



$f(x)=\sqrt{x}$



$f(x)=2^x$



* ماتریس:

- ضرب دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که تعداد ستون های اولی با سطرهای دومی برابر باشند.

- وارون ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\text{دترمینال}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- نکته:

$$(AB)^{-1} \neq A^{-1}.B^{-1}$$
$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1}+B^{-1}$$
$$I^{-1}=I$$
$$(A^{-1})^{-1}=A \qquad A^{-1}.A=I$$

* نکته:

$$\text{if: } A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{then}} A^n=\begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

* نکته:

$$*\,|A|=\frac{1}{|A^{-1}|} \qquad *\,|A^n|=|A|^n$$
$$*\,|A^{-1}|=\frac{1}{|A|} \qquad *\,|kA|=k^2|A|$$

* حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی با استفاده از ماتریس معکوس:

$$\text{if: } \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس ضرایب}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

* نکته: دستگاه فاقد جواب است

$$\text{if: } \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \xrightarrow{\text{then}} \text{دستگاه فاقد جواب است}$$

* نکته:

$$\text{if, } A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{then}} A^{n}=\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

* ترکیبیات:

- اصل ضرب: هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و به ازای هر کدام از آن ها جزء دوم به n طریق مختلف قابل انجام باشد آنگاه آن عمل $m \times n$ حالت مختلف دارد.

- جایگشت:

* تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.
* تعداد جایگشت های k تایی از n شیء متمایز:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!} \quad , k \leq n$$

- ترکیب: تعداد ترکیب های k تایی از n شیء متمایز:

$$\binom{n}{k} \text{ یا } C(n,k)=\frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad k \leq n$$

$$*\ 0!=1$$

$$*\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$$

ریاضی 2 :

* دنباله‌ی حسابی :

$$a_n = a+(n-1)d \qquad \begin{cases} a & \text{جمله‌ی اول} \\ d & \text{قدر نسبت} \end{cases}$$

if : $d>0$ $\xrightarrow{then}$ جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی افزایش می‌یابند

if : $d<0$ $\xrightarrow{then}$ جمله‌های دنباله به اندازه‌ی ثابتی کاهش می‌یابند

- در دنباله‌ی حسابی برای هر جمله با هر فاصله‌ای :

$$d = \frac{a_n - a_{n-1}}{n-(n-1)}$$

مثلا : $\begin{cases} a_5 = 17 \\ a_{12} = 52 \end{cases} \longrightarrow d = \frac{52-17}{12-5} = 5$

- در دنباله‌ی حسابی ← اگر x ، y ، z به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند :

$$y = \frac{1}{2}(x+z)$$

- اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی دنباله‌ی حسابی است.

- اگر زاویه‌های مثلثی را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم و تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند $\xleftarrow{then}$ یکی از زاویه‌های این مثلث $60°$ است.

* دنباله‌ی هندسی : $a_n = aq^{n-1}$

- اگر x,y,z جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند :

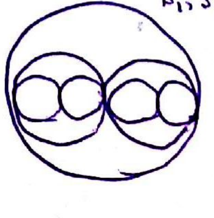
$$y^2 = xz$$

- اگر دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب a $(a\neq 0)$ ، b باشند، جمله‌ی بعد از b عبارت است از :

$$a,b \longrightarrow b = aq \ ; \ c = bq = aq^2 \longrightarrow c = \frac{b^2}{a}$$

$$q = \frac{a}{b}$$

- اگر مساحت یک دایره برابر S_1 و داخل آن دو دایره به شکل زیر رسم کنیم و مجموع مساحت آنها را S_2 بنامیم، با تکرار این عملیات دنباله‌ی $S_1, S_2, \dots, S_n$ ساخته می‌شود. (دنباله‌ی هندسی)



$$a_n = \pi R^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- اگر جملات دنباله‌ای را از یک عدد کم کنیم و جملات به سمت صفر نزدیک شوند، می‌گوییم ← جملات دنباله به آن عدد نزدیک می‌شوند.

- در دنباله‌ی حسابی ← درصورتی که قدر نسبت دنباله صفر باشد یعنی دنباله، دنباله‌ی ثابت است.

- اگر قدر نسبت یک دنباله‌ی هندسی برابر 1 باشد ← جملات این دنباله به a نزدیک می‌شوند.

$$a_n = aq^{n-1} \xrightarrow{q=1} a_n = a$$

- توان اساسی با توان اعداد گویا و حقیقی :

گویا

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ 2. $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$ 3. $a^{r+s} = a^r a^s$

4. $(a^r)^s = a^{rs}$ 5. $(ab)^r = a^r b^r$ 6. $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

7. $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

حقیقی

1. $\sqrt{a^b} = (\sqrt{a})^b$ 2. $\left(\frac{a}{c}\right)^b = \frac{a^b}{c^b}$

3. $\frac{a^b}{a^d} = a^{b-d}$ 4. $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

ریاضیات - حد و پیوستگی

Subject : Date :

* مفهوم حد: $\lim_{x\to a} f(x) = l$

* مبهم:

انواع صفر: (۱) صفر نسبی ـ صفر حدی ـ بسیار نزدیک به صفر ولی دقیقاً با صفر برابر نیست ← 0^- 0^+ ← 0

(۲) صفر مطلق ← دقیقاً خود صفر.

* صور مبهم: (۱) $\frac{\text{حدی } 0}{\text{حدی } 0}$ ← جزء ابهام دارد ادامه متفاوتی

جا به جا ← باید رفع ابهام کنیم.

if: $\frac{\text{مطلق } 0}{\text{حدی } 0} = \text{مطلق } 0$

$\frac{\text{هر چیزی}}{\text{مطلق } 0} =$ تعریف نشده

(۲) $\frac{\infty}{\infty}$ ← ادامه متفاوتی که دارد

جا به جا ← باید رفع ابهام کنیم.

(۳) $0_{\text{حدی}} \times \infty$

(۴) $\infty - \infty$

(۵) $1_{\text{حدی}}^{\infty}$

* رفع ابهام:

رفع ابهام حالت $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$:

روش (۱) ← عامل صفر شونده را حذف می‌کنیم. (تشریحی)

روش (۲) ← قاعده HOP

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ (مبهم) → رفع ابهام ← $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(می‌توانیم چند بار از کسر مشتق بگیریم (مشروط بر اینکه توابع مشتق پذیر باشند))

$\to \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

روش (۳) ← تانژانت هم ارزی:

$\sin x \simeq x \quad (x \to 0)$

روش (۴) ← تغییر متغیر

تشریح روش‌ها:

(۱) روش عامل صفر شونده: ← $x \to a$

$\boxed{x-a} \to 0$ عامل صفر شونده

نکته: $\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \frac{n}{m}}$

$\boxed{\sqrt[n]{u} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}}$

نکته مهم: هرگاه صورت و مخرج کسر یا صورت چند جمله‌ای $\sqrt[n]{}$ باشد و با حالت $\frac{0_{\text{حدی}}}{0_{\text{حدی}}}$ مواجه شدیم برای رفع ابهام استفاده از روش HOP ممنوع است، زیرا نتیجه‌ای حاصل نخواهد شد. و به جای آن به این شکل حل می‌کنیم:

$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^3-8}} = \frac{0}{0}$ مبهم

$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-8}}} = \frac{\frac{4}{0^+}}{\frac{12}{0^+}} = \frac{\infty}{\infty}$ مبهم

نکته: هم ارزی تابع در اطراف ریشه‌اش:

$\boxed{f(x) \simeq f'(a)(x-a), \quad x\to a, \quad a \text{ ریشه } f(x)}$

جواب: $\lim \frac{\sqrt{4(x-2)}}{\sqrt{12(x-2)}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \frac{1}{\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{3}$ ($x\to 2^+$)

Subject : Date : / /

* تکنیک هم ارزی:

هم ارزی در حالت $\frac{0}{0}$

① if: $u \to 0$ $\quad (1 \pm u)^n \cong 1 \pm nu$ هم ارزی برنولی

نکته: برای اینکه عبارتهای کسری را از هم ارزی برنولی حل کنیم کسر مخرج کسر را درصورت کسر ظاهر می‌کنیم.

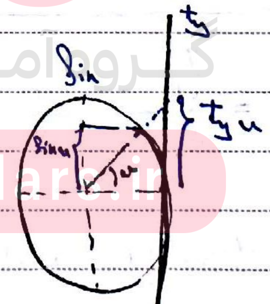
② if: $u \to 0$ $\quad \sin u \cong tg\,u \cong \mathrm{ArcSin}\,u \cong \mathrm{Arctg}\,u \cong u$

③ if: $u \to 0$
$\sin^n u \cong tg^n u \cong \mathrm{ArcSin}^n u \cong \mathrm{Arctg}^n u \cong u^n$

④ ~~if: $u \to 1$ $\quad \mathrm{ArcCos}\,u \cong \sqrt{1-u^2}$~~ هم نیست

⑤ if: $u \to 0$
$$\begin{cases} 1 - \cos u \cong \frac{u^2}{2} \\ 1 - \cos^n u \cong \frac{nu^2}{2} \end{cases}$$

امکان جابجایی داریم
$$\begin{cases} \cos u = 1 - \frac{u^2}{2} \\ \cos^n u = 1 - \frac{nu^2}{2} \end{cases}$$

⑥


$\sin u < u < tg\,u$

$\sin u < u < tg\,u$

if $u \to 0$
$$\begin{cases} u - \sin u \cong \frac{u^3}{6} \longrightarrow \sin u - u = -\frac{u^3}{6} \\ tg\,u - u \cong \frac{u^3}{3} \longrightarrow u - tg\,u = -\frac{u^3}{3} \\ tg\,u - \sin u \cong \frac{u^3}{2} \longrightarrow \sin u - tg\,u = -\frac{u^3}{2} \end{cases}$$

کوچک - بزرگ   بزرگ - کوچک

* نکته بسیار مهم: در استفاده از هم ارزی، هرگاه عبارت جمع و تفریق حذف شوند، حق استفاده از هم ارزی را نداریم، زیرا صفر نسبی (یا حدی) را به صفر مطلق تبدیل کرده‌ایم.

مثال ← $\underset{x \to 0}{x - \sin x} \cong$ ~~$x - x =$ صفر~~

$\underset{x \to 0}{x - \sin x} \cong \frac{x^3}{6}$ $\quad \boxed{\sin x < x}$

⑦ if $x \to 0$
چند جمله‌ای $\cong$ قسمتی که دارای کمترین توان است

$\underset{x \to 0}{ax^n + bx^{n-1} + \dots + \boxed{c}} \cong \boxed{c}$

⑧ if: $f, g \to 1$

$$f - g \cong \frac{f^n - g^n}{n}$$

تعمیم:
if: f و g رادیکالی با فرجه n باشند $\xrightarrow{\text{then}}$ $n =$ فرجه هم رادیکال
if: بالای هر دو $\sqrt{\ }$ باشد $\xrightarrow{\text{then}}$ $n =$ حاصل ضرب فرجه‌های دو رادیکال

* حد در بینهایت:

if: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$\xrightarrow{\text{then}}$ تابع در $x=a$ ← در نقطه‌ای بی‌کران دارد.
تابع در $x=a$ ← حد ندارد.

* نکته: if: r عدد گویای مثبت و c عدد حقیقی $\xrightarrow{\text{then}}$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^r} = 0$

* نکات مهم: ←

① $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

② $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{زوج } n \\ -\infty, & \text{فرد } n \end{cases}$

③ $\lim\limits_{x\to +\infty} ax^n = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$

④ $\lim\limits_{x\to -\infty} ax^n = \begin{cases} a<0, & \text{فرد } n \to +\infty \\ a<0, & \text{زوج } n \to -\infty \\ a>0, & \text{فرد } n \to -\infty \\ a>0, & \text{زوج } n \to +\infty \end{cases}$

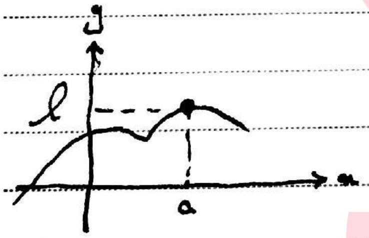
⑤ : if: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = l_2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{then}}$ $\begin{cases} ① \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2 \\ ② \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)g(x) = l_1 . l_2 \\ ③ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2} , l_2 \neq 0 \end{cases}$

این قضیه برای $x\to -\infty$ هم صدق می‌کند.

* رفع ابهام $\dfrac{\infty}{\infty}$:

① توابع رادیکالی ← ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگترین توانی از x که $\boxed{\text{در مخرج}}$ وجود دارد تقسیم می‌کنیم.
سپس با استفاده از $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{c}{x^n}$ حد را می‌یابیم.

② توابع گویا و کسری ← مثل بالا عمل می‌کنیم.



* پیوستگی در نقطه: ← تابع f که در بازه‌ی I تعریف شده است را در نقطه‌ی a از دامنه‌ی آن پیوسته گوییم هرگاه:

$\begin{cases} ① \text{ تابع در } a \text{ حد داشته باشد} \\ ② \text{ حد تابع در } a \text{ با مقدار تابع در } a \text{ برابر باشد.} \end{cases}$

هر دو شرط برای پیوستگی مهم است.

* نکته: ① توابع چند جمله‌ای ← در هر نقطه‌ای پیوسته‌اند (یعنی روی R پیوسته‌اند)

② توابع کسری و گویا ← در هر نقطه‌ی دامنه‌ی خود پیوسته‌اند. (در نقاطی که مخرج آنها صفر شود پیوسته نیستند)

③ توابع رادیکالی ← $y = \sqrt[n]{f(x)}$ ← $\begin{cases} n \text{ فرد} \leftarrow \text{ در هر نقطه‌ای که } f \text{ پیوسته باشد، پیوسته‌اند.} \\ n \text{ زوج} \leftarrow \text{ در هر نقطه‌ای که } f \text{ پیوسته و نامنفی باشد، پیوسته‌اند.} \end{cases}$

④ توابع مثلثاتی ← $\begin{cases} f(x) = \sin x \leftarrow \text{ در } R \text{ پیوسته} \\ f(x) = \cos x \leftarrow \text{ در } R \text{ پیوسته} \\ f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \leftarrow \text{ در تمام نقاط جز نقاطی که } \cos x = 0 \text{ پیوسته} \\ f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} \leftarrow \text{ در تمام نقاط جز نقاطی که } \sin x = 0 \text{ پیوسته} \end{cases}$

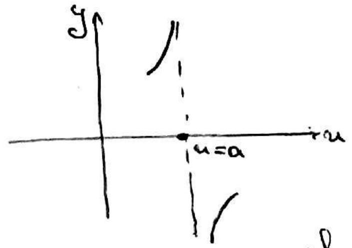
۱

مجانب: قائم ← انواع مجانب

خط مجانب قائم: if: $x \to a$ آنگاه $y \to \pm\infty$ then $x = a$

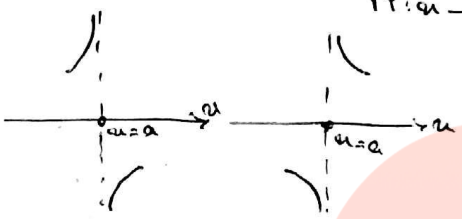
$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

انواع مجانب قائم:
- مجانب قائم ساده (انفصال ساده)
- مجانب قائم مضاعف (انفصال مضاعف)
- مجانب قائم یک طرفه (انفصال یک طرفه)



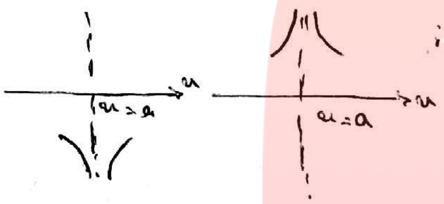
مجانب قائم ساده:

if: $x \to a$ آنگاه x: از یک طرف نمودار به $+\infty$ و از طرف دیگر به $-\infty$ میل می‌کند.



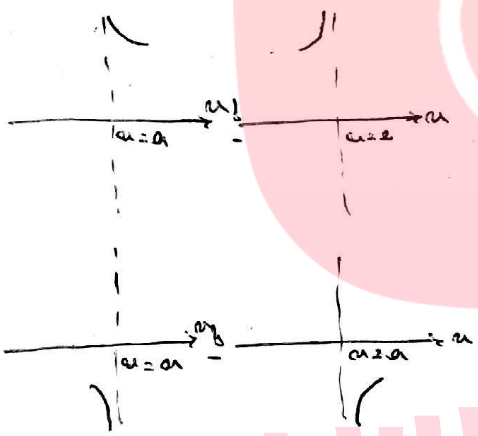
مجانب قائم مضاعف:

if: $x \to a$ آنگاه نمودار از هر دو طرف یا به $+\infty$ یا به $-\infty$ میل می‌کند.



مجانب قائم یک طرفه:

نمودار از یک طرف تعریف شده و از یک طرف تعریف نشده است.



* نکته: برای تعیین مجانب یا مجانب‌ها تابع داریم:

① اگر $x = a$ خط مجانب قائم تابع باشد، یا از هر دو طرف یا حداقل از یک طرف دامنه‌ی تابع به a چسبیده است.

② در توابع کسری ریشه‌های مخرج که نقش مجانب قائم را ایفا می‌کنند، شرایط:

۱. $x = a$ (ریشه‌ی مخرج) زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج یا آنتی لگاریتم را منفی نکند.

۲. $x = a$ (ریشه‌ی مخرج) کمان ArcSin , ArcCos را بیشتر از 1 یا کمتر از -1 نکند (یعنی X).

۳. $x = a$ (ریشه‌ی مخرج) صفر مطلق نباشد ← این اتفاق تحت شرایطی می‌افتد در مخرج که یک عامل در صورت $[x]$ داشته باشیم.

۴. $x = a$ (ریشه‌ی مخرج)، ریشه‌ی صورت نباشد یا اگر هم بود ایجاد مجانب قائم کند.

روش‌ها:
- روش ①: $\lim_{x \to a} f(x)$ (است تابع کسری) $= \infty$ ← $x = a$ مجانب قائم هست ✓ ؛ $=$ عدد ← $x = a$ مجانب قائم نیست ✗
- روش ②: $x = a$ مجانب قائم هست ✓ ← درجه‌ی ریشه‌ی در صورت > درجه‌ی ریشه‌ی در مخرج if:

(۳) در توابع کتانژانتی ← هم ریشه‌ی مخرج و هم ریشه‌ی صورت آنگاه کتانژانت می‌تواند نقش مجانب قائم را ایفا کند. توضیح می‌دهم!

حداقل درجه‌ی یک سمت ریشه، آنگاه کتانژانت مثبت باشد.

(۴) در مورد توابع $\tan x$ و $\cot x$ داریم:

$\tan x \to$ به ازای $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ دارای مجانب قائم است.

$\cot x \to$ به ازای $x=k\pi$ دارای مجانب قائم است.

*نکته: روش تعیین درجه‌ی ریشه (با مثال)

if: $x=1$ در مورد ریشه‌ی x^3-1 که $1-1=0$

یک بار x^3-1 را صفر کرد (و مشتق آن) مشتق می‌گیریم: $3x^2 \xrightarrow{x=1} 3\neq 0$

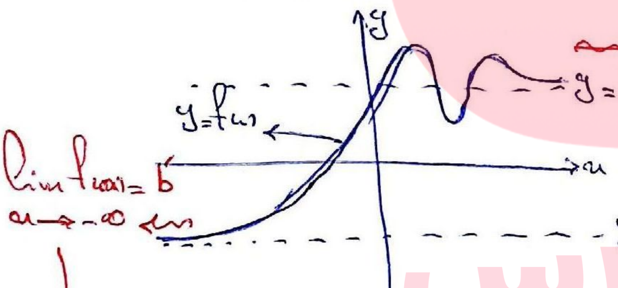
پس ریشه درجه‌ی یک است.

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: $\cot x, \tan x$ هر جا باشند، به تنهایی ایجاد مجانب قائم می‌کنند.
← هم در صورت، هم در مخرج

انواع مجانب: مجانب افقی:

if: $x\to\pm\infty$ آنگاه $y\to b$ آنگاه خط مجانب افقی تابع $y=b$ است.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = b$$



$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ → $y=b$ → مجانب افقی سمت راست منحنی خواهد بود.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b'$ → $y=b'$ → مجانب افقی سمت چپ منحنی خواهد بود.

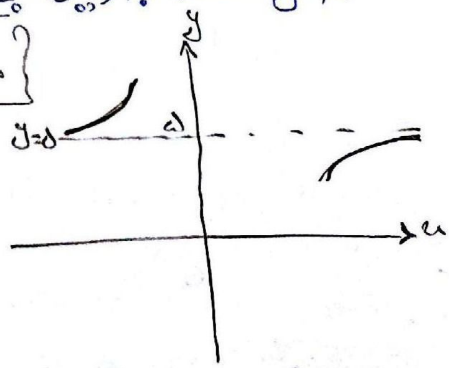
* رفتارشناسی منحنی تابع در اطراف مجانب افقی:

مراحل ← بازنویسی تابع

مثال: $y=\frac{5x^2-4}{x^2+3} \longrightarrow \lim_{x\to\infty} y = 5$ $\boxed{\text{مجانب افقی } y=5}$

→ بازنویسی: $\frac{5(x^2+3)-19}{x^2+3} = 5-\frac{19}{x^2+3}$

→ ادامه:
- $x\to+\infty$ آنگاه $5-\frac{19}{+\infty}=5-0^+=5^-$
- $x\to-\infty$ آنگاه $5-\frac{19}{-\infty}=5-0^-=5^+$



* در توابع ضمنی [$f(x,y)=0$]

- مجانب قائم : برای پیدا کردن مجانب قائم چون جملات عبارت را بر حسب y مرتب می‌کنیم و ضریب بزرگترین عامل را صفر در نظر می‌گیریم.
- مجانب افقی : برای پیدا کردن مجانب افقی چون جملات عبارت را بر حسب x مرتب می‌کنیم و ضریب بزرگترین عامل را صفر در نظر می‌گیریم.

* نکته : در توابع به فرم $(ax+b)(cy+d)=$ عدد ثابت غیر صفر داریم :

- ریشه‌ی پرانتز اول : $x=-\frac{b}{a}$ ← مجانب قائم
- ریشه‌ی پرانتز دوم : $y=-\frac{d}{c}$ ← مجانب افقی

انواع مجانب — مجانب مایل :

if : $x\to\infty$ then $y\sim ax+b$ then $y=ax+b$ خط مجانب مایل

* نکته : توابع کسری فقط در صورتی دارای مجانب مایل می‌باشند که درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج $\boxed{\text{فقط یک واحد بیشتر}}$ باشند.

$$\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^{n-1}+b'x^{n-2}+\dots} \sim \frac{a}{a'}x-\frac{ab'-ba'}{a'^2}$$

$x\to\infty$

فقط منها نه علاوه

* نکته : $(x+a)\sqrt[k]{\frac{x+b}{x+c}}\sim x+a+\frac{b-c}{k}$

$x\to\infty$

* نکته : اگر θ زاویه‌ی بین دو خط به معادلات $y_1=m_1x+n_1$ و $y_2=m_2x+n_2$ باشد، داریم :

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

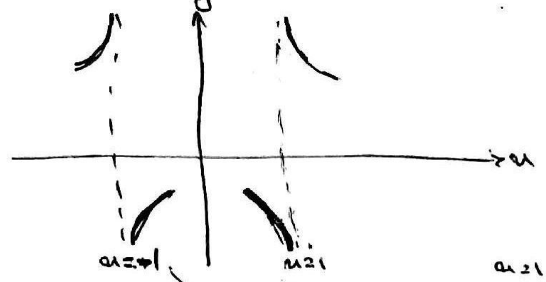
۱

مجانب قائم

تمرین و تست

* $y=\frac{2x+3}{x^2-1}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ مخرج $=0$ $\to x^2-1=0 \to (x-1)(x+1)=0$ ⟨ $x=1$ ✓ ، $x=-1$ ✓ — هیچ کدام صورت را صفر نمی‌کنند.

→ دارای دو خط مجانب قائم است.



→ انفصال ساده

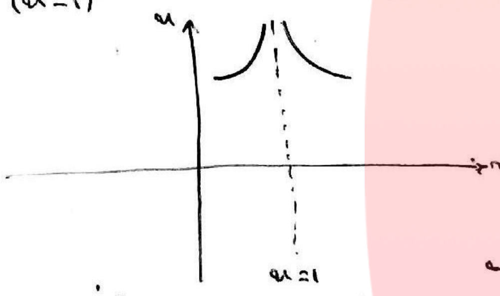
* حال نمودار تابع در اطراف مجانب‌های قائم:

در اطراف $x=1$: $\begin{cases} x\to1^+ \Rightarrow \frac{5}{0^+}=+\infty \\ x\to1^- \Rightarrow \frac{5}{0^-}=-\infty \end{cases}$

$x=-1$ در اطراف: $\begin{cases} x\to-1^+ \Rightarrow \frac{1}{0^-}=-\infty \\ x\to-1^- \Rightarrow \frac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$ ۳

* $y=\frac{2x}{(x-1)^2}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ مخرج $=0$ $\to (x-1)^2=0 \to x=1$ ✓ صورت را صفر نکرد

→ این تابع یک خط مجانب قائم دارد.



→ انفصال مضاعف

* رفتار تابع در اطراف خط $x=1$:

در اطراف $x=1$: $\begin{cases} x\to1^+ \Rightarrow \frac{2}{(0^+)^2}=\frac{2}{0^+}=+\infty \\ x\to1^- \Rightarrow \frac{2}{(0^-)^2}=\frac{2}{0^+}=+\infty \end{cases}$

* $y=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ مخرج $=0$ $\to x^2-1=0 \to (x-1)(x+1)=0$ ⟨ $x=1 \to$ صورت $=0$ ، $x=-1 \to$ صورت $\neq0$ — * ابهام پیش می‌آید.

* روش ۱: $\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{0}{0} \xrightarrow{HoP} \lim_{x\to1}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\neq\infty$ مجانب قائم نیست

روش ۲: درجه ریشه در صورت ⟨ درجه ریشه در مخرج: درجه ریشه در صورت $=1$ ، درجه ریشه در مخرج $=1$ ✗ مجانب قائم نیست

* $y=x-\sin x$ $\xrightarrow{\text{می‌دانیم}}$ $x=0$ ریشه y است → $0-0=0$

$y'=1-\cos x\big|_{x=0}=1-1=0$

$y''=\sin x\big|_{x=0}=0$

$y'''=\cos x\big|_{x=0}=1\neq0$

$x=0 \to$ ریشه مرتبه سوم y است.

* نکته: $\begin{cases} x-\sin x \sim \frac{x^3}{6} \\ 1-\cos x=\frac{x^2}{2} \end{cases}$ ($x\to0$) $\longrightarrow y=x-\sin x$

$x\to0 \to y\sim\frac{x^3}{6}=\frac{(x-0)^3}{6}$ → توان $=3$ $\xrightarrow{\text{then}}$ $x=0$ ریشه مرتبه سوم y است.

$*y = 1-\cos x$ $\xrightarrow{\text{راست}}$ $x=0$

$y \sim \frac{x^2}{2}$ ⟵ $x=0$ ریشه‌ی مرتبه‌ی ۲ و y است.

$*y = \frac{x}{[x]}$ ⟵ فاقد مجانب قائم

* اگر در مخرج کسر $[x]$ داشته باشیم، این عامل ایجاد مجانب قائم نمی‌کند.

$*y = \frac{x^2+5}{x(3x-1)(3x-2)(3x-6)[x]}$

* اگر در مخرج کسر در کنار عامل $[x]$ عوامل دیگری داشته باشیم، ریشه‌های آن عوامل در صورتی مجانب قائم خواهند بود که x ها در $0<x<1$ نکنند. تمام ریشه‌ها صورت را صفر نمی‌کنند.

ریشه‌های مخرج:

$x=0 \to [x]=0$ ✓

$x=\frac{1}{3} \to [x]=0 \to 0<\frac{1}{3}<1$ ✗

$x=\frac{2}{3} \to [x]=0 \to 0<\frac{2}{3}<1$ ✗

$x=\frac{6}{3}=2 \to [x]=2$ ✓

دارای ۲ مجانب قائم $x=0$ و $x=2$ است.

$*y = \frac{x-4}{(2x-1)(2x-4)(3x-9)(4x-16)[x/3]}$ ✗ ایجاد مجانب قائم نمی‌کند

$x=\frac{1}{2} \to [\frac{1}{6}]=0 \to 0<\frac{1}{6}<1$ ✗

$x=2 \to [\frac{2}{3}]=0 \to 0<\frac{2}{3}<1$

$x=3 \to [\frac{3}{3}]=1$ ✓

$x=4 \to$ صورت را صفر می‌کند ✗ ⟵ درجه‌ی صورت = درجه‌ی مخرج

دارای ۱ مجانب قائم است ⟵ $x=3$

$*y = \frac{[x/2]}{x(x-1)(x-2)(x-3)[x-3]}$

$x=0 \to$ صورت $=0$ ✗

$x=1 \to$ صورت $=0$ ✗ ⟵ اگر ریشه‌ی مخرج، ریشه‌ی صورت

$x=2 \to$ صورت $=1$، $[x-3]=-1$ ✓

$x=3 \to$ صورت $=1$، $[x-3]=0$ ✓

دارای ۲ مجانب قائم است: $x=2$ ، $x=3$

$*y = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3x}$

$x^2-3x=0 \to x(x-3)=0$: $x=3$ ✓ ، $x=0$ ✗

$x=3$ ⟵ صورت را صفر نکند؛ زیر رادیکال را منفی نکند. رادیکال فرجه‌ی زوج

$x=0$ ⟵ صورت را صفر نکند؛ زیر رادیکال را منفی کند ✗

یک مجانب قائم دارد ⟵ $x=3$

$*y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+5x-6}$ دارای ۱ مجانب قائم است ⟵ $x=-6$

مخرج $=0$

$x^2+5x-6=0 \to (x+6)(x-1)=0$: $x=-6$ ، $x=+1$

$x=-6 \to$ صورت: $36-18+2=20\neq 0$ ✓

$x=+1 \to$ صورت ...

باید بررسی کنیم ⟵ $x=+1$: صورت: $(x-1)(x-2)$ ؛ مخرج: $(x-1)(x+6)$

$(x-1)$ در صورت و مخرج هم‌درجه است؛ در $x=+1$ ... ۱ است. پس مجانب قائم نیست.

$*y = \frac{4x-\sqrt{x}}{2x-\sqrt{3x+7}}$

ریشه‌ی مخرج:

$2x-\sqrt{3x+7}=0 \to 2x=\sqrt{3x+7}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x^2=3x+7 \to 4x^2-3x-7=0$

$a+c=b$: $x=-1$ ، $x=-\frac{c}{a}=\frac{7}{4}$

$x=-1 \to$ صورت $-4-\sqrt{-1}$ ⟵ زیر رادیکال فرجه‌ی زوج را منفی کرده ⟵ ق ق ق

$x=\frac{7}{4} \to$ صورت: $7-\sqrt{\frac{7}{4}}\neq 0$

دارای یک مجانب قائم است ⟵ $x=\frac{7}{4}$

مجانب قائم

تمرین و تست

$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{1-4x^2}$

① $x-1>0$ ② $x+1>0$ ③ $1-4x^2 \ge 0$

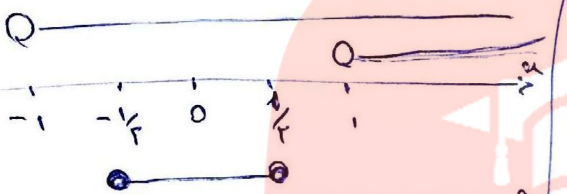
در این مواقع، اول شک می کنیم ← شاید دامنه‌ی تابع اجازه‌ی ادامه‌ی کار را به ما ندهد.

① $x-1>0 \to x>1$

② $x+1>0 \to x>-1$

③ $1-4x^2 \ge 0 \to 4x^2 \le 1 \to x^2 \le \frac{1}{4}$

$\to -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$



← دامنه‌ی تابع تهی می باشد و این تابع هیچ ورودی نمی تواند داشته باشد و این تابع فاقد مجانب قائم خواهد بود.

$y = \frac{\sqrt{x}}{x}$ → $x \ge 0$

مخرج $=0 \to x=0 \to$ صورت $\to \sqrt{0}=0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{0}{0}$

$\xrightarrow{HOP} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ✓

چون بی نهایت شد $\xrightarrow{then}$ $x=0$ مجانب قائم است.

$y = \frac{\sqrt{3x-1}}{|x+1|-3}$

مخرج $=0 \to |x+1|=3$
- $x+1=-3 \to x=-4$ ✗ ← زیر رادیکال فرجه‌ی زوج را منفی کرد.
- $x+1=3 \to \boxed{x=2}$ ✓

← این تابع دارای یک خط مجانب قائم است ← $\boxed{x=2}$

$y = \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2-4} + \frac{1}{x-5}$

$x=0$ ← زیر رادیکال فرجه‌ی زوج منفی شد. ✗ غقق

$x^2-4=0$
- $x=2$ ✓
- $x=-2$ ✗ غقق زیر رادیکال را منفی کرد.

$\to x=5$ ✓

$x=2$ ، $x=5$ } تابع دارای دو مجانب قائم است.

$* y = \frac{\sin x}{x}$

مخرج $=0 \to x=0 \to$ ریشه‌ی صورت هم است.

حل می کنیم $\to \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ✗

$\boxed{\sin x \sim \tan x \sim x \quad (x \to 0)}$

$x=0$ مجانب قائم نیست.

$* y = \frac{\tan x}{x^2}$

مخرج $=0 \to x^2=0 \to x=0$

صورت $\to \tan 0 = 0$

درجه‌ی صفر مخرج > درجه‌ی صفر صورت

$2 > 1$

$\xrightarrow{then}$ $x=0$ خط مجانب قائم است.

$* y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ $\neq$ $* y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

مخرج $=0 \to x=-3$

تعیین علامت می کنیم

صورت $\to x-1=0 \to x=1$

x		-3		1	
زیر رادیکال	+		−		+

از سمت چپ تعریف می شود.

این تابع دارای یک مجانب قائم $\boxed{x=-3}$ می باشد.

مخرج $=0 \to x+3=0 \to x=-3$ ← زیر رادیکال فرجه‌ی زوج را منفی کرد.

غیر قابل قبول است.

این تابع فاقد مجانب قائم می باشد.

$* y = \log_5\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

ریشه‌های صورت و مخرج را پیدا کنیم:
- $x-3=0 \to x=3$ ✓
- $x+2=0 \to x=-2$ ✓

مسئله وقتی به این مرحله رسیدیم،
← آنچه کار کردیم را تعیین علامت می کنیم:

x		-2		3	
آنچه کار کردیم	+		−		+

از یک سمت آنچه کار کردیم را مثبت کرده

$\boxed{x=3}$ ، $\boxed{x=-2}$ } دارای دو مجانب قائم است.

$*\; y = \dfrac{2x+5}{\sin^2 3x - \sin 3x}$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ چند مجانب قائم داریم؟

مخرج $= 0 \rightarrow \sin^2 3x - \sin 3x = 0$

$\sin 3x(\sin 3x - 1) = 0 \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \sin 3x = 1 \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array}}$

$\sin 3x = 0 \rightarrow 3x = k\pi \rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}$

$x = \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\}$ ← بازه را هم دخالت می‌دهیم.

$\sin 3x = 1 \rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}$

$x = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

تابع دارای ۶ خط مجانب قائم است.

$*\; y = \dfrac{2+\tan x}{\sin 5x}$ چند مجانب قائم در بازه‌ی $(0,\pi)$؟

مخرج $= 0 \rightarrow \sin 5x = 0 \rightarrow 5x = k\pi$

$x = \dfrac{k\pi}{5} \rightarrow x = \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \pi\}$

* نکته: $\tan$, $\cot$ هر جا باشند (صورت، مخرج، ...) ایجاد مجانب قائم می‌کنند.

$\tan x = \infty \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x = \{\frac{\pi}{2}\}$

تابع دارای ۷ خط مجانب قائم است.

$*\; y = \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

ریشه‌های صورت و مخرج آنتی لگاریتم:

$\sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ رادیکال $\rightarrow \boxed{x \geq 0}$

$x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

برای $x = 0$ ← باید حدهای 0^+ را بررسی کنیم زیرا حدهای 0^- جزو دامنه نیستند

$\rightarrow x \rightarrow 0^+ \quad \dfrac{0^+}{0^+ - 5} < 0$

حدهای 0^- هم که اصلاً بررسی نمی‌کنیم

پس $x = 0$ مجانب قائم نمی‌باشد.

x		0		5	
آنتی لگاریتم		0	$-$	∞	$+$

← $x = 5$

جزو دامنه نیست

یک طرف مثبت شد ← این تابع دارای یک خط مجانب قائم است ← $x = 5$

$*\; y = \log \dfrac{x^4(x^2-9)}{x^2-25}$

ریشه‌های صورت و مخرج:

$x^4(x^2-9) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{ریشه‌ی مضاعف} \\ x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

$x^2 - 25 = 0 \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

تعیین علامت ←

x		-5		-3		$\overset{*}{0}$		3		5	
آنتی لگاریتم	$+$	∞	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	∞	$+$

تمام ریشه‌ها حداقل از یک طرف آنتی لگاریتم را مثبت کردند.

← معادله دارای ۵ خط مجانب قائم است.

تمرین و تست — مجانب قائم

* $y = \tan 3x + \cot 2x$ در بازه $(0, \pi)$ چند مجانب قائم؟

$$*\begin{cases} \tan u = \infty \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cot u = \infty \rightarrow u = k\pi \end{cases}$$

$3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

$x = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

مشترک بین این دو جواب یکی حساب می‌شود

$2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$

$x = \left\{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$

* تابع دارای ۵ مجانب قائم است.

---

* $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ در $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ چند خط مجانب قائم؟

مخرج $= 0$

$\rightarrow 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$

$x = \{0\} \rightarrow \sin(0) = 0 \rightarrow$ صورت را صفر کرد

→ باید مورد بررسی قرار گیرد.

درجه ریشه در صورت $\rightarrow \sin x \sim x = 0$ ($x \to 0$) $\xrightarrow{\text{مرتبه ریشه}}$ (1)

درجه ریشه در مخرج؟ $\rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow$ (2)

$x \to 0$ صفر مخرج؟ (2) > (1) $\xrightarrow{\text{پس}} x = 0$ ق ق

→ این تابع در این بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ دارای یک خط مجانب قائم می‌باشد.

---

* $y = \dfrac{x \sin x}{x - \sin x}$ چند خط مجانب قائم در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$؟

مخرج $= 0 \rightarrow x - \sin x = 0 \rightarrow x = \sin x \rightarrow x = 0$

→ تنها ریشه ما در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ است.

$x \sin x \big|_{x=0} = 0 \rightarrow$ باید بررسی کنیم

$x \sin x \sim x^2 = 0$ ($x \to 0$) $\xrightarrow{\text{مرتبه ریشه}}$ (2)

$x - \sin x \sim \frac{x^3}{6} = 0$ ($x \to 0$) → (3)

(3) > (2) مخرج → دارای یک خط مجانب قائم است.

→ در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

---

* $y = \dfrac{2x - 4}{x^2 + mx + 9} \longrightarrow$ فقط یک خط مجانب قائم دارد. $m = ?$

→ یعنی مخرج؟ (چون درجه دوم است) پس دارای جواب ریشه مضاعف است.

جواب: مخرج؟ $\rightarrow \Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(9) = 0 \rightarrow \boxed{m = \pm 6}$

---

* $y = \dfrac{2x - 4}{x^2 + mx - 9} \longrightarrow$ فقط یک مجانب قائم دارد. $m = ?$

مخرج؟ $\Delta = 0 \rightarrow m^2 - 4(-9) = m^2 + 36 \neq 0 \rightarrow > 0$

→ دارای ۲ ریشه متمایز است.

→ پس ریشه صورت هم $2x - 4 = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$

→ باید ریشه مخرج هم باشد.

$\xrightarrow{\text{پس}} 4 + 2m - 9 = 0 \rightarrow 2m = 5$

جواب $\boxed{m = \frac{5}{2}}$

مجانب افقی

* $y = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$

حل: $\lim\limits_{x \to \infty} y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 3}{x - 1} = 2$

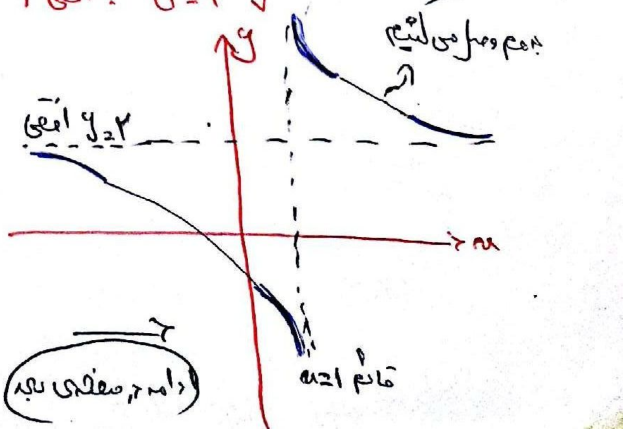
$y = 2 \rightarrow$ تابع دارای یک خط مجانب افقی است.

8 رسم نمودار

(1) ابتدا مجانب‌ها ی تابع را بدست می‌آوریم — رسم نمودار تابع

→ قائم: مخرج؟ $= 0 \rightarrow x = 1$ ✓
$\begin{cases} x \to 1^+ \rightarrow \frac{5}{0^+} = +\infty \\ x \to 1^- \rightarrow \frac{5}{0^-} = -\infty \end{cases}$

افقی: $y = 2$ ✓



ادامه در صفحه بعد

* نکته: برای بررسی رفتار تابع حول مجانب افقی ← ① مخرج را در صورت ایجاد می‌کنیم

$$y = \frac{2x+3}{x-1} = \frac{2(x-1)+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1}$$

② یک بار $x \to +\infty$ و یک بار $x \to -\infty$

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to 2 + \frac{5}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y \to 2 + \frac{5}{-\infty} = 2 + 0^- = 2^-$$

شکل در شود، مقدمه‌ی قبل ←

* $y = \frac{2x^2+5x-4}{x^2+8}$

$\lim_{x\to\infty} y = 2 \to y = 2$ مجانب افقی

* $y = \frac{\sqrt{x^2+3x+1}+9x}{x-2}$

نکته: $\sqrt[2n]{u^{2n}} = |u|$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x+1}+9x}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{|x|+9x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{|x|+9x}{x} \begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\frac{x+9x}{x} = \boxed{10} \\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+9x}{x} = \boxed{8} \end{cases}$$

* $y = \frac{2x+4}{|3x|+[x]}$

نکته: if: $x \to \infty \Rightarrow [x] = x$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{|3x|+x}$$

$$\to \begin{cases} +\infty: \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x+x} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}} \\ -\infty: \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-3x+x} = \frac{2}{-2} = \boxed{-1} \end{cases}$$

* $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \log_5 \frac{x-3}{x+2} = \lim_{x\to\infty}\log_5 1$$

صفر

$$\boxed{y = 0}$$

* $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \frac{\text{عدد بین } -1 \text{ و } +1}{\infty} = 0$$

$$\boxed{y = 0}$$

* $y = \sqrt{4x^2+8x-1} - 2x$

نکته: $\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots}$, $x \to \infty$

- n زوج ← بنا: $\sqrt[n]{a}\left|x + \frac{b}{na}\right|$
- n فرد ← نیازی به قدر مطلق نداریم: $\sqrt[n]{a}\left(x + \frac{b}{na}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+8x-1} - 2x$$

n زوج: $\sqrt{4}\left|x + \frac{8}{8}\right| = 2|x+1|$

$+\infty$: $\lim_{x\to+\infty} 2x+2-2x = 2 \to \boxed{y=2}$ ← خط مجانب افقی است

$-\infty$: $\lim_{x\to-\infty} -2x-2-2x = \boxed{-4x-2}$ ← مجانب مایل

Scanned by CamScanner

مجانب افقی — تمرین و تست

$*\ y=\sqrt[3]{x^3+12x^2-1}-\sqrt{x^2-2x}$

$\sqrt[3]{1}\left(x+\frac{12}{3}\right)=x+4$

$\sqrt{1}\left|x+\frac{-2}{2}\right|=|x-1|$

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(x+4-|x-1|\right)$

$+\infty:\ x+4-x+1=5 \longrightarrow$ مجانب افقی

$-\infty:\ x+4+x-1=2x+3 \longrightarrow$ مجانب مایل

$*\ y=\sqrt{9x^2+5x}\ \tan\frac{15}{6x+2}$

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty} 3\left|x+\frac{5}{18}\right|\times\tan\frac{15}{6x+2}$

چون tan و lim به صفر میل کند؟ tan و lim تبدیل شدند

$+\infty:\ \lim_{x\to+\infty}\left(3x+\frac{5}{6}\right)\times\frac{15}{6x+2}=3x\times\frac{15}{6x}=\frac{15}{2}$

$-\infty:\ \lim_{x\to-\infty}\left(-3x-\frac{5}{6}\right)\times\frac{15}{6x+2}=-3x\times\frac{15}{6x}=-\frac{15}{2}$

$y=\frac{15}{2}$ از سمت راست سمت — $y=-\frac{15}{2}$ از سمت چپ سمت — دو مجانب افقی

$*\ y=\sqrt{4x^2-x-2}-\sqrt{4x^2+2x+1}$

$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(2\left|x+\frac{-1}{8}\right|-2\left|x+\frac{2}{8}\right|\right)$

$\left|2x-\frac{1}{4}\right|-\left|2x+\frac{1}{2}\right|$

$+\infty:\ \lim_{x\to+\infty} 2x-\frac{1}{4}-2x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$

$-\infty:\ \lim_{x\to-\infty} -2x+\frac{1}{4}+2x+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$y=-\frac{3}{4}$ از سمت راست — $y=\frac{3}{4}$ از سمت چپ — دارای دو مجانب افقی

$*\ y=\frac{6x+\sqrt{x-5}}{\sqrt{3-x}+x^3}$

این تابع فاقد مجانب افقی است. زیرا دامنه‌ی تابع اجازه نمی‌دهد $x\to\pm\infty$ میل کند.

$*\ \text{if: } y=\frac{(a-1)x^3+2x^2-1}{bx^2-x-1}$ دارای یک مجانب افقی به صورت $y=3$ باشد $a+b=?$

① $(a-1)x^3=0$ باید $\xrightarrow{\text{then}} a-1=0 \to \boxed{a=1}$

$y=\frac{2x^2-1}{bx^2-x-1}\to\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{bx^2}=3$

$\frac{2}{b}=3\longrightarrow \boxed{b=\frac{2}{3}}$

$a+b=1+\frac{2}{3}=\boxed{\frac{5}{3}}$ جواب

$*\ \text{if: } y=\frac{3}{2}\longrightarrow$ مجانب افقی تابع $f(x)$ باشد معادله‌ی مجانب قائم تابع چیست؟

$f(x)=\frac{Ax^3+1}{(A-1)x^3+16}$

① مجانب افقی: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{A}{A-1}=\frac{3}{2}$

$2A=3A-3\to\boxed{A=3}$

$f(x)=\frac{3x^3+1}{2x^3+16}$

② مجانب قائم: مخرج $=0\to 2x^3+16=0$

$x^3=-8\to\boxed{x=-2}$

$*\ \text{if: } y=\frac{3}{2}\longrightarrow$ مجانب افقی تابع $f(x)$ باشد، $a=?\to\boxed{4}$ ، $b=?\to\boxed{-10}$

$f(x)=2x-1+\sqrt{ax^2+bx}$

باید حاصل $\lim_{x\to\infty} f(x)$ عدد باشد فقط

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2x-1+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|\right)$

در اینجا if $\leftarrow x\to+\infty \leftarrow$ مطلق x

$x\to-\infty \leftarrow -x$ مطلق $\leftarrow$ بین این a,b را ... دارای دو مجانب افقی

$\to 2x-1+\sqrt{a}\,x-\frac{b\sqrt{a}}{2a}=\frac{3}{2}$

$\to 2x-\sqrt{a}\,x=0\to\boxed{a=4}$

$\to -1-\frac{b\times 2}{8}=\frac{3}{2}\to b=-10$

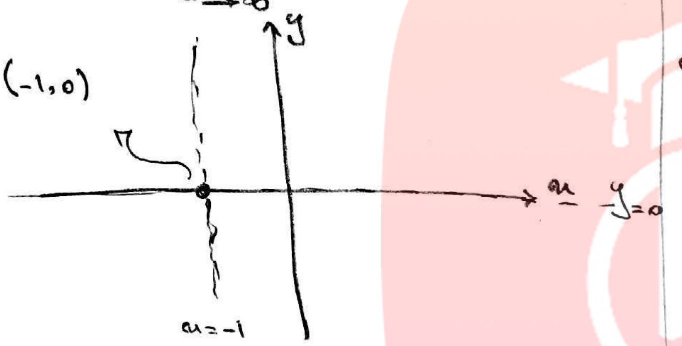
* if $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+11}{x^2-3x-4} \\ g(x) = \dfrac{3}{x-4} \end{cases}$ نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع $f-g$ کدام است؟

$(x-4)(x+1) \longrightarrow f-g$

$$f-g = \frac{(x+11) - \cancel{3}(x+1)}{(x-4)(x+1)} = \frac{-2x+8}{(x-4)(x+1)}$$

ریشه مخرج مجانب قائم ← مخرج $=0$ $\begin{cases} x=4 \ ✗ \ \text{صورت را صفر می‌کند} \\ x=-1 \ ✓ \ \text{مجانب قائم} \end{cases}$

مجانب افقی $\longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x+8}{x^2-3x-4} = 0$



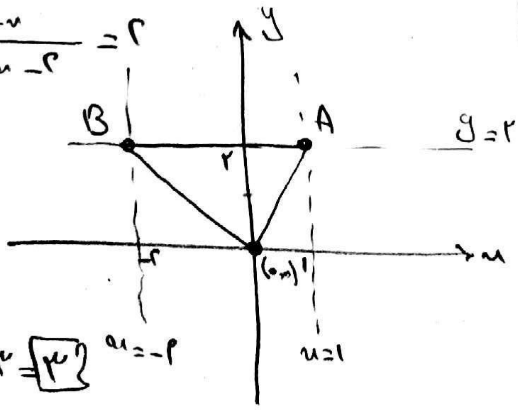
* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+2} \\ g(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \end{cases}$ اگر A ، B محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی تابع $(g-f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

$$g-f = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+x}{x+2} = \frac{x^2(x+2) - (x^2+x)(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

قائم ، مخرج $=0$ $\begin{cases} x=1 \ ✓ \\ x=-2 \ ✓ \end{cases}$

$$\frac{\cancel{x^3}+2x^2-\cancel{x^3}+x}{x^2+x-2} = \frac{2x^2+x}{x^2+x-2}$$

افقی $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x}{x^2+x-2} = 2$



$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = \boxed{3}$

* $x^2y^2 - 4x^2 + xy - 2x + 1 = 0$ مجانب افقی؟

چون صحبت ... عبارت برحسب x

ملاک تستی

تابع ضمنی $f(x,y)=0$

$x^2(y^2-4) + x(y-2) + 1 = 0$

ضریب بزرگترین عامل $\longrightarrow y^2-4=0 \longrightarrow y^2=4 \longrightarrow y=\pm 2$ دو مجانب افقی داریم

* $x^2y^2 + y^2 + x^2y - 3xy^2 = 0$ مجانب قائم؟

چون صحبت ... عبارت برحسب y

$y^2(1-3x) + x^2y + x^2 = 0$

ضریب بزرگترین عامل $\longrightarrow 1-3x=0 \longrightarrow x = 1/3$ ← مجانب قائم

* فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد مجانب‌های $(2x-2)(y-1)=3$ در تابع تا خط $3x+4y+23=0$ کدام است؟

$2x-2=0 \longrightarrow x=1$ ← مجا. قائم

$y-1=0 \longrightarrow y=1$ ← مجانب افقی

نقطه‌ی تلاقی $\longrightarrow (1,1)$

فاصله‌ی نقطه از خط $\longrightarrow d = \dfrac{|3(1)+4(1)+23|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{30}{5} = 6$

مجانب مایل

تمرین و تست

* $y = \dfrac{2x^4+3x^2+5}{x^2+9x-1}$

دو واحد بیشتر است $\longrightarrow 4>2$

این تابع مجا. مایل ندارد.

* $y = \dfrac{2x^3+x^2+6x-1}{x^2+5x+1}$ مجانب مایل؟

3 ، 2 $\longrightarrow$ می‌تواند مجا. مایل داشته باشد

$$\sim \frac{2}{1}x - \frac{10-1}{1^2} = 2x-9$$

مجانب مایل $\longrightarrow y=2x-9$

مجانب مایل — تمرین تست

* $y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2 + 7}$ مجانب مایل = ؟

$a=4 \quad b=-2$
$a'=2 \quad b'=0$

$\sim 2x - \frac{4(0) - 2(-2)}{4} = 2x - 1$

* $y = \frac{2x^3 - 7x - 1}{x^2 + 5x + 4}$ مجانب مایل = ؟

$a=2 \quad b=0$
$a'=1 \quad b'=5$

$\sim \frac{2}{1}x - \frac{10 - 0(1)}{1^2} = 2x - 10$

* $y = \frac{x^{3} - ax^2 + x - 1}{x^{2} - 2x}$ اگر عرض از مبدأ مجانب مایل این تابع برابر -2 باشد $a=?$

$x \to \infty$

$a=1 \quad b=-a$
$a'=1 \quad b'=-2$

$y \sim \frac{1}{1}x - \frac{-2(1) - (1)(-a)}{1^2} = x - (-2 + a)$

$y \sim x + 2 - a$ ، $y \sim ax + b$ ← عرض از مبدأ

عرض از مبدأ $= 2 - a = -2 \to -a = -4 \to \boxed{a=4}$

* $y = 3x + [2x] + \frac{2x^{3} + 6x^2 - 9x + 1}{x^{2} - 3x + 10} + \frac{\boxed{|2x|}}{x + 6}$ مجانب مایل = ؟

$\to 2x - \frac{-6 - 6}{1} = 2x + 12$

$\lim y \Longrightarrow$ هم از تابع وقتی

$x \to \infty \qquad x \to \infty$

if: $x \to \infty \quad x \to [x] \sim x$

$y \sim 3x + 2x + (2x + 12) + \frac{|2x|}{x}$

$+\infty: \ y = 3x + 2x + 2x + 12 + 2 = 7x + 14$

$-\infty: \ y = 3x + 2x + 2x + 12 - 2 = 7x + 10$

$y = 7x + 14$ ، $y = 7x + 10$ دو خط مجانب مایل داریم

* $y = 2x + 5 + \frac{3x^2 + \cancel{5x}}{x^2 + \cancel{4}}$ مجا. مایل = ؟

$x \to \infty$

$y \sim 2x + 5 + 3 = 2x + 8$ مجا. مایل

$\boxed{y = 2x + 8}$

* $y = 2x + \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 9x - 1}$ مجانب مایل = ؟

$x \to \infty$ چون فرجه فرد است قدرمطلق نیاز ندارم

$y \sim 2x + \sqrt[3]{1}\left(x + \frac{-27}{3}\right) = 2x + x - 9 = 3x - 9$

مجانب مایل ← $\boxed{y = 3x - 9}$

* $y = 5x - 3 + \sqrt{x^2 - 4x - 1}$ مجانب مایل = ؟

$x \to \infty$

$y \sim 5x - 3 + \sqrt{1}\left|x + \frac{-4}{2(1)}\right| = 5x - 3 + |x - 2|$

$+\infty: \ y \sim 5x - 3 + x - 2 = 6x - 5$

$-\infty: \ y \sim 5x - 3 - (x - 2) = 4x - 1$

$y = 6x - 5$ ، $y = 4x - 1$ دو مجانب مایل داریم

* $y = x\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \sim x + \frac{2 - (-1)}{2} = x + \frac{3}{2}$

$x \to \infty$

* $y = (x+5)\sqrt[3]{\frac{x+10}{x+2}} \sim x + 5 + \frac{10 - 2}{3} = x + \frac{23}{3}$

$x \to \infty$

* $y=(x-2)\sqrt{\frac{x+a}{x-1}}$ مجانب مایل این تابع $y=x+2$ است . $a=?$

$x\to\infty$ جستجوی مجانب مایل

$$y\sim(x-2)+\frac{a-(-1)}{2}=x-2+\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$$

$$-2+\frac{1}{2}+\frac{a}{2}=2$$

$$\frac{a}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{8-1}{2}=\frac{7}{2}\to\boxed{a=7}$$

---

* $y=2x\sqrt{\frac{x-1}{9x-1}}$ شیب مجانب $=?$ عرض از مبدأ مجانب $=?$

برای این ضریب x برابر ۱ باشد.

$$9x-1=9\left(x-\frac{1}{9}\right)$$

$$y=\frac{2x}{3}\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}}\sim\frac{2}{3}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x-\frac{1}{9}}}\right)$$

$x\to\infty$

$$y\sim\frac{2}{3}\left(x+\frac{-\frac{8}{9}}{2}\right)=\frac{2}{3}\left(x-\frac{4}{9}\right)$$

$$y=\underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{شیب مجانب}}x-\underbrace{\frac{8}{27}}_{\text{عرض از مبدأ}}$$ مجانب مایل

---

* مجانب‌های مایل منحنی‌های $y=\frac{x^2+3}{5-2x}$, $y=\frac{x^2}{2+3x}$ باهم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

$$y=\frac{x^2+3}{-2x+5}\sim\underbrace{-\frac{1}{2}}_{m_1}x-\ldots$$

$x\to\infty$

$$y=\frac{x^2-1}{3x+2}\sim\underbrace{\frac{1}{3}}_{m_2}x-\ldots$$

$x\to\infty$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}\right|=\left|\frac{-\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}\right|$$

$$\tan\theta=1\to\boxed{\theta=45^\circ}$$

---

* $y=\sqrt{\frac{x^3+x^2}{x-2}}$ مجانب مایل وقتی $x\to-\infty$ چه $=?$

سؤال ۲: (I) اگر محل تلاقی مجانب‌ها (a,b) باشد، $a+b$ کدام است؟
(II) فاصله‌ی محل تلاقی مجانب‌ها از مبدأ مختصات چقدر است؟

$$\sqrt{\frac{x^2(x+1)}{x-2}}=|x|\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\underset{x\to-\infty}{=}-x\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

$x\to-\infty$ مجانب $-\left(x+\frac{1-(-2)}{2}\right)=-\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$$y=-x-\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{یا}}y+x+\frac{3}{2}=0$$

$$2y+2x+3=0$$

$\to y=-x-\frac{3}{2}$

(I) محل تلاقی مجانب‌ها (a,b) $\to a+b=?$

$$y=|x|\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$$

مایل:
- $x\to+\infty$ مجانب $y=x+\frac{3}{2}$
- $x\to-\infty$ مجانب $y=-x-\frac{3}{2}$

$\to x+\frac{3}{2}=-x-\frac{3}{2}$

$2x=-\frac{6}{2}\to x=-\frac{3}{2}\to$ طول نقطه‌ی تقاطع

$\to y=0$ عرض نقطه‌ی تقاطع

$$(a,b)=\left(-\frac{3}{2},0\right)\to a+b=-\frac{3}{2}$$

(II)

$\to$ فاصله $=\left|-\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}$

تمرین وسست

* $y=\frac{6x^2+10x+2}{2x+2}$ اسم مجانب مایل و منحنی در اطرافش؟

برای مجانب شناسی ← بازنویسی تابع

$$\begin{array}{l|l} 6x^2+10x+2 & 2x+2 \\ -6x^2-6x & \hline 3x+2 \\ \hline 4x+2 & \\ -4x-4 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

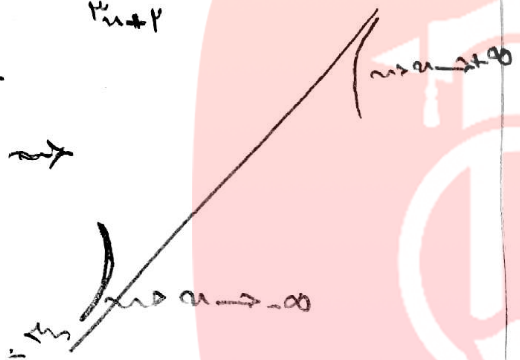
$3x+2$ → مجانب مایل

-2 ← غیر صفر

$$y=3x+2-\frac{2}{2x+2}$$

$+\infty$: $y=(3x+2)^-$

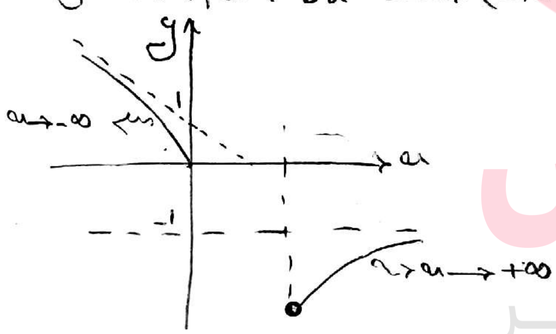
$-\infty$: $y=(3x+2)^+$



$y=3x+2$
شیب مجانب مایل مثبت

---

* $y=ax+\sqrt{x^2+bx} \longrightarrow (a,b)=?$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

هم ارز تابع وقتی $x\to\infty$ ← $f(x) \sim ax+\left|x+\frac{b}{2}\right|$, $x \to \infty$

$+\infty$: $ax+x+\frac{b}{2}=x(a+1)+\frac{b}{2}=-1$

$\hookrightarrow a+1=0 \to a=-1$

$\frac{b}{2}=-1 \to b=-2$

$-\infty$

$$\boxed{(a,b)=(-1,-2)}$$

* هندسه‌ی مختصاتی و منحنی‌های درجه‌ی دوم:

تشخیص نوع مقطع مخروطی: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$

- دایره if $A=B\neq 0$
- سهمی if $B=0$ یا $A=0$
- بیضی if $A\neq B,\ A\cdot B>0$
- هذلولی if $A\cdot B<0$

* نقطه:

(۱) **مختصات وسط پاره‌خط:** اگر M وسط دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ باشد $\xrightarrow{\text{then}}$ $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

(۲) **فاصله‌ی دو نقطه از هم:** if: $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ $\xrightarrow{\text{then}}$ $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(۳) **برای در استقامت بودن سه نقطه:** if: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ بر روی یک خط راست باشند

$\xrightarrow{\text{then}} m_{AB}=m_{AC} \longrightarrow \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$

* خط:

- معادله‌ی بسته: $y=mx+b$
- معادله‌ی گسترده: $Ax+By+C=0$

مقایسه‌ی دو خط با هم:

معادله‌ی گسترده		معادله‌ی بسته	
$ax+by+C=0$, $a'x+b'y+C'=0$		$y=mx+h$, $y=m'x+h'$	
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{C}{C'}$	موازی	$m=m'$, $h\neq h'$	موازی
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{C}{C'}$	منطبق	$m=m'$, $h=h'$	منطبق
$aa'+bb'=0$	متعامد	$m\times m'=-1$	متعامد

* فاصله‌ی نقطه از خط و دو خط موازی از هم:

نقطه از خط: $ax+by+C=0$, $A(x_A,y_A)$

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

دو خط موازی از هم: $ax+by+C=0$, $ax+by+C'$

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

* نکته:

- سه خط متمایز زمانی متقاربند که مختصات ۲تای آنها در معادله‌ی سومی صدق کنند.
- برای یافتن نقطه‌ی ثابت یک دسته خط، کافی است دو خط از دسته خط‌ها داده شده را یافته و محل برخورد آنها را تعیین کنیم.

* دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

- $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ ← یک جواب دارد (خطوط متقاطعند)
- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ ← جواب ندارد (موازی اند)
- $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ ← بیشمار جواب دارد (منطبق اند)

* دستگاه چند معادله چند مجهول: یک دستگاه شامل m معادله‌ی خطی و n مجهول را، یک دستگاه m معادله‌ی n مجهولی می‌نامیم.

اگر دستگاه جواب نداشته باشد، آن را ناسازگار، و اگر جواب داشته باشد، آن را سازگار می‌نامیم.

در این دستگاه اگر ثابت‌های معادلات همگی صفر باشند، آن را دستگاه همگن می‌نامیم.

* نکته:
- هرگاه تعداد معادلات از مجهولات بیشتر باشد ← دستگاه زمانی جواب دارد که جواب به دست آمده از تعدادی معادله، در بقیه‌ی معادلات صدق کند.
- در دستگاه‌هایی به شکل کلی $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \\ a_1x+b_1y+c_1z=k \end{cases}$ با فرض $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$ ، x, y, z را بر حسب t یافته، در معادله‌ی دوم قرار داده و سپس مجهول مورد نظر را می‌یابیم.

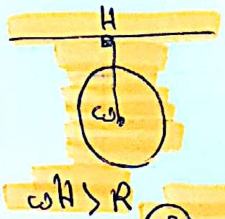
* دایره:
- معادله‌ی استاندارد: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ ← مرکز $\omega(\alpha,\beta)$
- معادله‌ی گسترده: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ← مرکز $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$ ، $R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$

* وضعیت دایره‌ی $x^2+y^2+ax+by+c=0$:

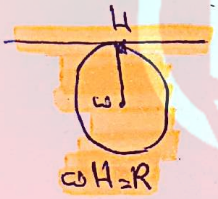
- با نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$:
  - $f(x_0,y_0)>0$ ← خارج منحنی
  - $f(x_0,y_0)=0$ ← روی منحنی
  - $f(x_0,y_0)<0$ ← داخل منحنی

- با خط:

نقطه‌ای مشترکی ندارند

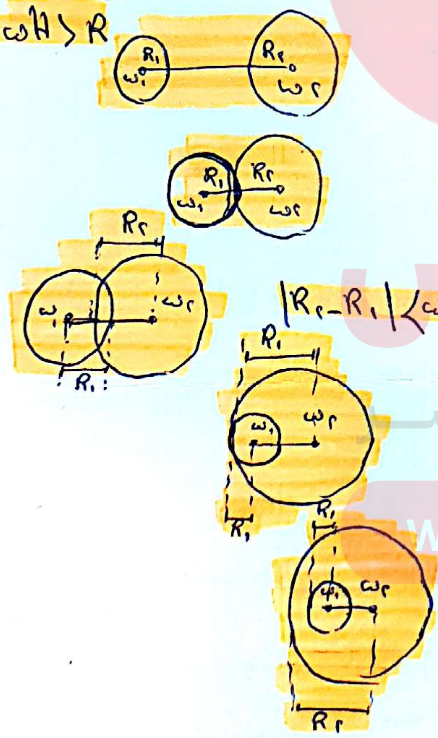


مماس‌اند



متقاطع‌اند

- دو دایره با هم:
  - متخارج: $\omega_1\omega_2 > R_1+R_2$
  - مماس خارج: $\omega_1\omega_2 = R_1+R_2$
  - متقاطع: $|R_2-R_1| < \omega_1\omega_2 < R_1+R_2$
  - مماس داخل: $\omega_1\omega_2 = |R_2-R_1|$
  - متداخل: $\omega_1\omega_2 < R_2-R_1$

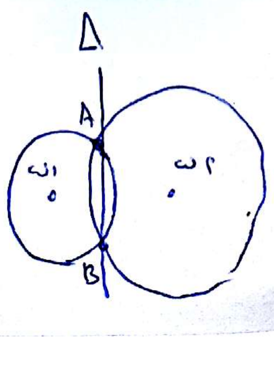


* وتر مشترک دو دایره‌ی متقاطع:

$$\begin{cases} C_1: x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 \\ C_2: x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

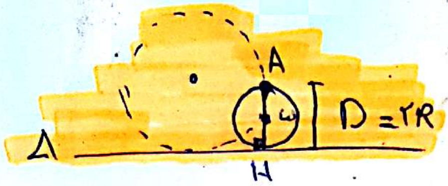
برای به دست آوردن معادله‌ی وتر مشترک ← دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

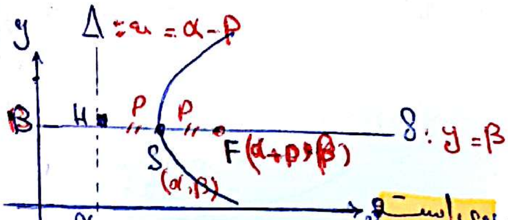
$\Delta: C_1-C_2 \rightarrow (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)$



* سهمی ها

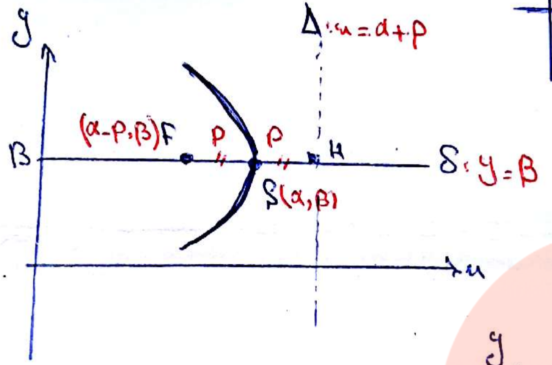
سهمی
- افقی
  - دهانه راست: $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$
  - دهانه چپ: $(y-\beta)^2=-4p(x-\alpha)$
- قائم
  - دهانه بالا: $(x-\alpha)^2=4p(y-\beta)$
  - دهانه پایین: $(x-\alpha)^2=-4p(y-\beta)$





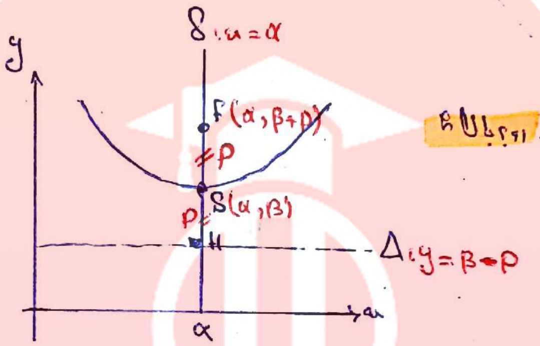
دهانه راست

$$(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$$



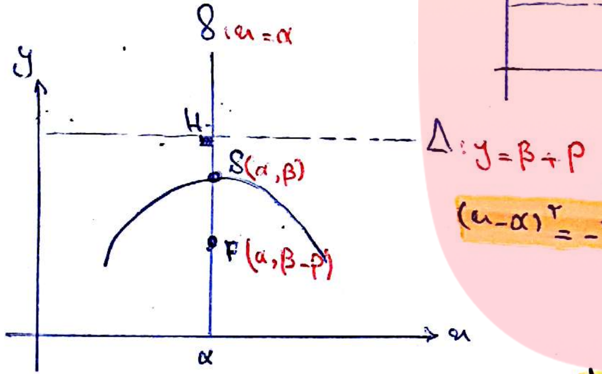
دهانه چپ

$$(y-\beta)^2=-4p(x-\alpha)$$



دهانه بالا

$$(x-\alpha)^2=4p(y-\beta)$$

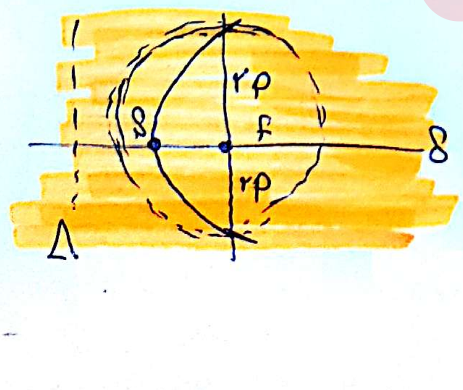


دهانه پایین

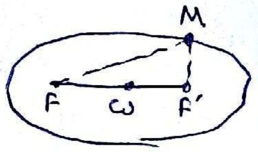
$$(x-\alpha)^2=-4p(y-\beta)$$

معادله گسترده سهمی
- افقی: $Ay^2+By+Cx+D=0$
  $y_S=-\frac{B}{2A}$ | $p=\left|\frac{C}{4A}\right|$
- قائم: $Ax^2+Bx+Cy+D=0$
  $x_S=-\frac{B}{2A}$ | $p=\left|\frac{C}{4A}\right|$

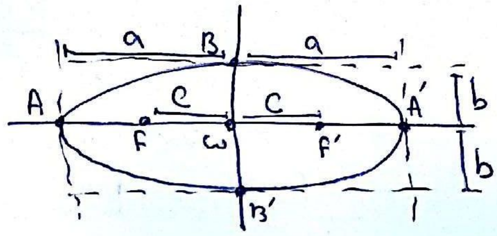
* وتر کانونی در سهمی: در هر سهمی به معادله $(y-\beta)^2=4p(x-\alpha)$ یا $(x-\alpha)^2=4p(y-\beta)$ طول وتری از سهمی که از کانون بر محور تقارن آن عمود باشد (وتر کانونی) برابر $4p$ است.



* بیضی:



$MF + MF' = 2a$



$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$

بیضی: افقی / قائم

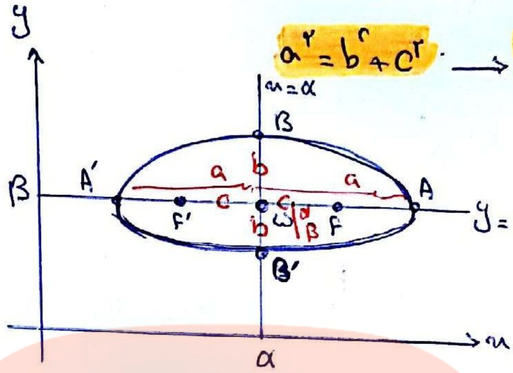
بیضی افقی:

$\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$

$A \begin{vmatrix} \alpha + a \\ \beta \end{vmatrix}$ $\quad A' \begin{vmatrix} \alpha - a \\ \beta \end{vmatrix}$

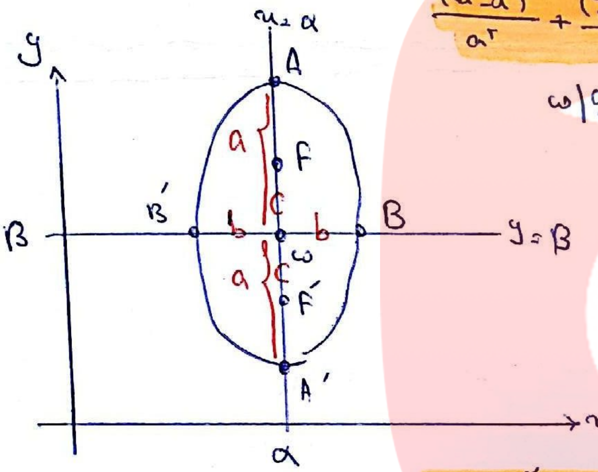
$F \begin{vmatrix} \alpha + c \\ \beta \end{vmatrix}$ $\quad F' \begin{vmatrix} \alpha - c \\ \beta \end{vmatrix}$

$B \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + b \end{vmatrix}$ $\quad B' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - b \end{vmatrix}$



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

بیضی قائم:



$\omega \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$

$A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + a \end{vmatrix}$ $\quad A' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - a \end{vmatrix}$

$F \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta + c \end{vmatrix}$ $\quad F' \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta - c \end{vmatrix}$

$B \begin{vmatrix} \alpha + b \\ \beta \end{vmatrix}$ $\quad B' \begin{vmatrix} \alpha - b \\ \beta \end{vmatrix}$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

معادله‌ی گسترده‌ی بیضی:

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $\quad \omega\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B}\right)$

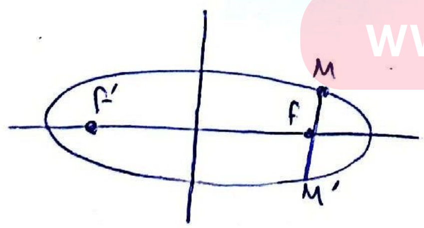
اگر $|A| < |B|$ ← بیضی افقی

اگر $|A| > |B|$ ← بیضی قائم

خروج از مرکز بیضی:

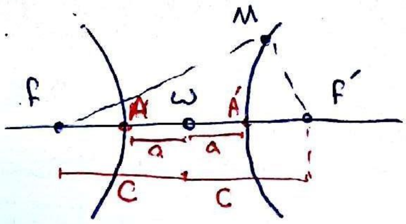
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{\min\{|A|, |B|\}}{\max\{|A|, |B|\}}}$$

* نکته: در هر بیضی طول وتری که از کانون بر محور کانونی (قطر بزرگ) عمود شود ← $MM' = \frac{2b^2}{a}$



Scanned by CamScanner

* هذلولی :

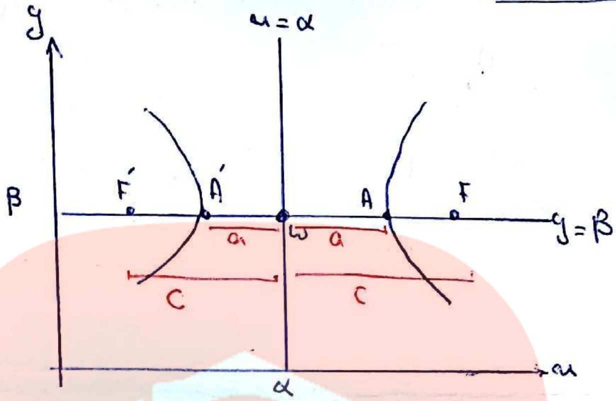


$$|MF - MF'| = 2a$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

در هذلولی افقی یا قائم : فاصله‌ی هر کانون از هر مجانب برابر b است.

هذلولی :
- افقی :
- قائم :

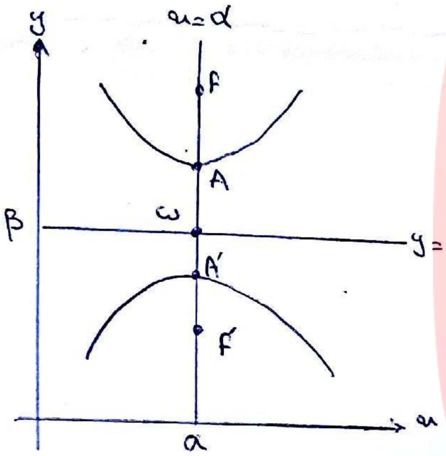


$\omega \Big| {\alpha \atop \beta}$

$A \Big| {\alpha + a \atop \beta}$ $\quad A' \Big| {\alpha - a \atop \beta}$

$F \Big| {\alpha + c \atop \beta}$ $\quad F' \Big| {\alpha - c \atop \beta}$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



$\omega \Big| {\alpha \atop \beta}$

$A \Big| {\alpha \atop \beta + a}$ $\quad A' \Big| {\alpha \atop \beta - a}$

$F \Big| {\alpha \atop \beta + c}$ $\quad F' \Big| {\alpha \atop \beta - c}$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

معادله‌ی گسترده‌ی هذلولی : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$$\omega\left(-\frac{C}{2A}, -\frac{D}{2B}\right)$$

مجانب‌های هذلولی :

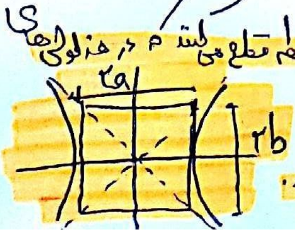
هذلولی افقی : $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{منفی} \leftarrow \text{راست}]{\text{حذف می‌شود}} \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = \frac{(y-\beta)^2}{b^2}$

هذلولی قائم : $\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1 \xrightarrow[\text{منفی} \leftarrow \text{راست}]{\text{حذف می‌شود}} \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = \frac{(x-\alpha)^2}{b^2}$

خروج از مرکز هذلولی :

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

*نکته :
- اگر زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی θ باشد ← $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$
- اگر خطوط مماس بر یک هذلولی را از رأس‌های آن رسم کنیم، این دو خط، مجانب‌های هذلولی را در چهار نقطه قطع می‌کنند که در هذلولی‌های افقی و قائم، این چهار نقطه رأس‌های یک مستطیل به ابعاد 2a و 2b هستند. طول قطر این مستطیل همواره 2c است. در ضمن مجانب‌های هذلولی بر امتداد قطرهای این مستطیل منطبق‌اند.



* هذلولی متساوی الساقین (متساوی القطرین): هر هذلولی که در آن $b=a$ باشد.

ویژگی ها:

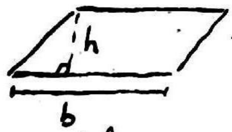
- $c^2 = a^2 + b^2 \longrightarrow c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$
- در معادله‌ی گسترده ← ضریب‌های x^2 و y^2 قرینه‌اند.
- $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}$
- شیب مجانب‌ها ± 1 ← برهم عمودند (مجانب‌ها)

* نکته: هر معادله به فرم $xy = k$ با شرط $k \neq 0$ یک هذلولی متساوی الساقین مایل را مشخص می‌کند زیرا تمام معادله‌های هر تابع هموگرافیک با انتقال مبدأ مختصات به نقطه‌ی برخورد مجانب‌هایش به این فرم تبدیل می‌شود، می‌توان گفت هم تابع هموگرافیک به معادله‌ی $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ نیز یک هذلولی متساوی الساقین مایل را مشخص می‌کند.

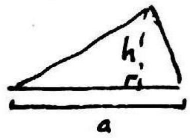
- تعداد قطرهای یک n ضلعی:

$$N = \frac{n(n-3)}{2}$$

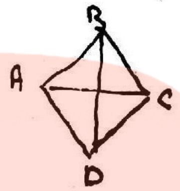
- مساحت‌ها:



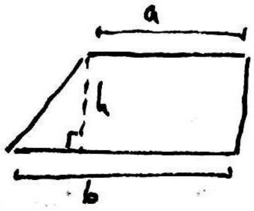
$S = bh$



$S = \frac{1}{2} ah$

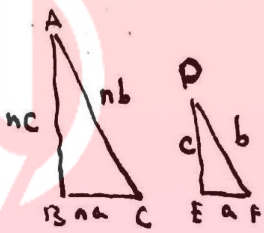


$S = \frac{1}{2}(AC \times BD)$



$S = \frac{1}{2}(a+b)h$

- در مثلث‌های متشابه اگر طول اضلاع مثلث بزرگتر n برابر طول اضلاع مثلث کوچکتر باشد:



$\xrightarrow{then} \frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DEF}}} = n^2$

- مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع:

$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

- مساحت شش‌ضلعی منتظم:

$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

- میانگین هندسی دو مقدار:

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \longrightarrow b$

$\boxed{b^2 = ac}$

- ویژگی‌های تناسب:

if: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\xrightarrow{then} \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\xrightarrow{then} \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

$\xrightarrow{then} \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \ , \ \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

if: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \xrightarrow{then} \frac{a}{b} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$

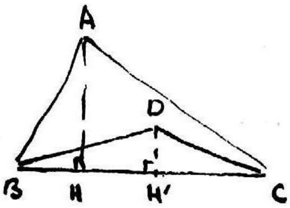
- حالت‌های تشابه دو مثلث:

(۱) تساوی دو زاویه
(۲) تناسب دو ضلع و تساوی زاویه‌ی بین
(۳) تناسب سه ضلع

- پاره‌خط‌های متناسب در دو مثلث متشابه:
نسبت میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌های متناظر برابر با نسبت تشابه است.

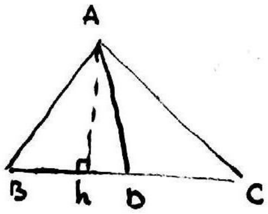
نکات مهم تستی:

(۱) اگر دو مثلث دارای قاعده‌ی برابر باشند:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{DBC}}} = \frac{H}{H'}$$

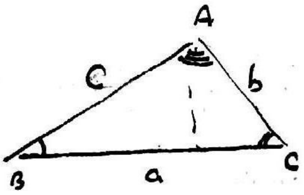
(۲) اگر دو مثلث دارای ارتفاع برابر باشند:



$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ABD}}} = \frac{BC}{BD}$$

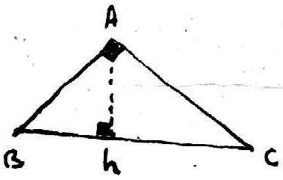
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{ABC}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}} = \frac{BC}{DC} \ , \ \frac{S_{\overset{\Delta}{ABD}}}{S_{\overset{\Delta}{ADC}}} = \frac{BD}{DC}$$

(۳) مساحت مثلث:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin\hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin\hat{C}$$

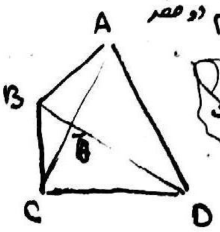
(۴) در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصلضرب وتر در ارتفاع وارد بر آن برابر است با حاصلضرب دو ضلع زاویه‌ی قائمه:



$$\begin{cases} S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} h \times BC \\ S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times AC \times AB \end{cases}$$

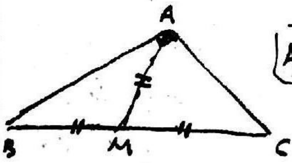
$\xrightarrow{then} \boxed{h \times BC = AC \times AB}$

(۵) مساحت چهارضلعی محدب در حالت کلی برابر است با نصف حاصلضرب دو قطر آن در سینوس زاویه‌ی حاده‌ی بین آن دو قطر:



$$\boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin\theta}$$

۶) خط میانه: در هر مثلث قائم الزاویه، طول میانه‌ی وارد بر وتر، نصف طول وتر است.



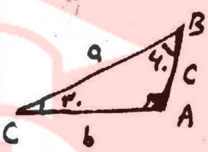
$\boxed{AM=\frac{1}{2}BC}$ → $\boxed{AM=BM=MC}$

۷) مثلث قائم الزاویه:

① با زاویه‌ی حاده‌ی ۴۵ درجه →

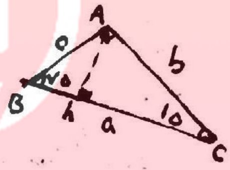
$$\begin{cases} b=c=\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ a=\sqrt{2}c=\sqrt{2}b \end{cases}$$

② با زاویه‌ی حاده‌ی ۳۰ درجه →



$$\begin{cases} c=\frac{1}{2}a \ ,\ b=\frac{\sqrt{3}}{2}a \\ b=\sqrt{3}c \end{cases}$$

③ با زاویه‌ی حاده‌ی ۱۵ درجه →

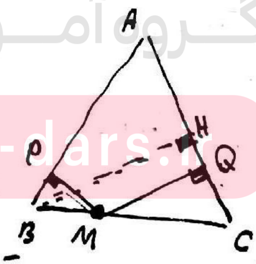


$h=\frac{1}{4}a$

۸) خواص ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه:

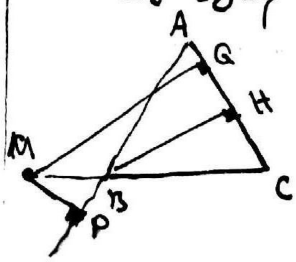
$$\begin{cases} AH^2=BC\times CH \\ AB^2=BH\times BC \\ AC^2=CH\times BC \end{cases}$$

۹) مجموع فاصله‌ی هر نقطه روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن برابر با ارتفاع وارد بر ساق آن است.



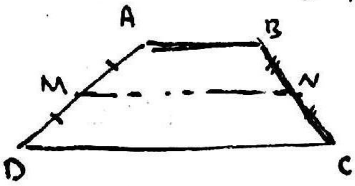
$MP+MQ=BH$

۱۰) قدر مطلق تفاضل فاصله‌ی هر نقطه روی امتداد قاعده‌ی یک مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن برابر با ارتفاع وارد بر ساق آن است.



$|MQ-MP|=BH$

۱۱) در هر ذوزنقه، پاره خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند با قاعده‌ها موازی بود و طول آن برابر میانگین طول قاعده‌ها است.

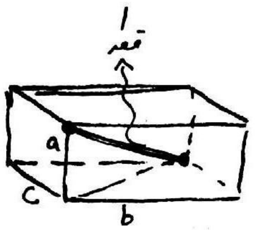


$AM=MD$, $BN=NC$

$$\begin{cases} MN\parallel AB \\ MN\parallel DC \end{cases} \longrightarrow \boxed{MN=\frac{AB+DC}{2}}$$

شکل‌های فضایی:

* طول قطر مکعب مستطیل:



قطر مکعب مستطیل $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

* طول قطر مکعب: $a\sqrt{3}$

نکته: اگر طول یال مکعب n برابر شود، طول قطر آن نیز n برابر می‌شود.

* حجم‌ها:

مکعب مستطیل: $V=S_{\text{قاعده}}\times h$

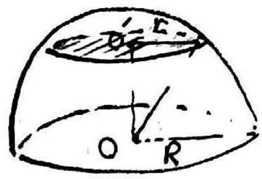
مکعب: $V=a^3$

حجم هرم؛ مساحت قاعده S و ارتفاع h → $V=\frac{1}{3}S\times h$

حجم مخروط؛ شعاع r و ارتفاع h → $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

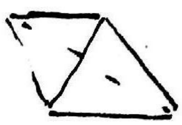
کره: $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, $S=4\pi r^2$

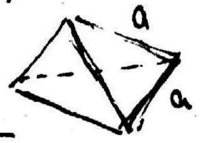
$r=\sqrt{R^2-h^2}$



h , $S=\pi(R^2-h^2)$

حجم هرمی که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی الاضلاع است.





$S_{\text{قاعده}}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$

$$V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\right)$$

آمار و مدل سازی

* سرشماری ← اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم سرشماری کرده‌ایم

* نمونه ← زیر مجموعه‌ای از جامعه‌ی آماری

* اندازه‌ی جامعه ← تعداد اعضای جامعه

* اندازه‌ی نمونه ← تعداد اعضای نمونه

* داده $\xrightarrow{\text{نمونه}}$ نتایج حاصل از اندازه‌گیری یا بررسی نمونه

- راه‌های جمع‌آوری داده:
  ۱. استفاده از داده‌های از پیش تهیه شده
  ۲. پرسش
  ۳. مشاهده و ثبت وقایع
  ۴. انجام آزمایش

* متغیرها
  - کمی ← قابل اندازه‌گیری
  - کیفی ← غیر قابل اندازه‌گیری

* متغیر کمی
  ۱) کمی پیوسته: قابل اندازه‌گیری اند ← حجم، طول، وزن ....
  ۲) کمی گسسته: قابل شمارش اند ← تعداد دانش‌آموزان کلاس

* متغیر کیفی
  ۱) ترتیبی: نوعی ترتیب در آن‌ها وجود دارد ← مراحل تحصیل، مراحل رشد انسان
  ۲) اسمی: ترتیب در آن‌ها مطرح نیست ← گروه خونی افراد، کیفیت آلودگی هوا

* آمارگیری به دو روش انجام می‌شود
  - نمونه‌گیری ← بخشی از جامعه
  - سرشماری ← تمام افراد جامعه

* فراوانی مطلق ← به تعداد دفعاتی که یک داده‌ی آماری تکرار می‌شود، فراوانی مطلق گوییم، و با f_i نمایش می‌دهیم.

* فراوانی نسبی ← نسبت فراوانی مطلق هر دسته به کل داده‌ها را فراوانی نسبی آن دسته می‌نامیم. (F_i)

$$F_i = \frac{f_i}{n} \quad , n = \sum f_i$$

$\frac{f_i}{n} \times 100$ ← درصد فراوانی نسبی

- نکته‌ی مهم: ← در یک جدول توزیع فراوانی، مجموع فراوانی‌های نسبی همواره ۱ است. و جمع درصد فراوانی‌های نسبی ۱۰۰ است.

* فراوانی تجمعی ← برابر است با فراوانی آن دسته علاوه‌ی مجموع فراوانی‌های دسته‌های قبل از آن. (F_{c_i})

* دسته‌بندی داده‌ها ←

۱) دامنه‌ی تغییرات (فاصله‌ی کمترین و بیشترین داده) $R = b - a$

۲) تعداد و فاصله‌ی طبقات: ←

$C = \frac{R}{k}$ طول طبقات

$k = \frac{R}{C}$ تعداد طبقات

۳) مرکز دسته (نماینده‌ی دسته): ←

X_i : مرکز دسته‌ی iام (مقدار مشترک) $= \frac{\text{کران بالای دسته‌ی iام} + \text{کران پایین دسته‌ی iام}}{2}$

مرکز دسته‌ی iام $\Rightarrow X_i = X_1 + (i-1)C$

* نمودارهای آماری: ←

۱) نمودار میله‌ای ←
  - محور طول‌ها ← نماینده‌ی طبقه (مرکز دسته) یا خود داده
  - محور عرض‌ها ← فراوانی مطلق هر طبقه یا داده

برای متغیرهای گسسته مناسب تر است.
برای متغیرهای پیوسته ← با استفاده از مراکز دسته‌ها

۲) نمودار مستطیلی ←
  - محور طول‌ها ← حدود طبقات
  - محور عرض‌ها ← فراوانی مطلق هر طبقه

← برای متغیرهای پیوسته مناسب

۳) نمودار چندبر فراوانی ← (در توزیع فراوانی داده‌های پیوسته مناسب است)
  - محور طول‌ها ← مراکز دسته‌ها یا خود داده‌ها
  - محور عرض‌ها ← فراوانی مطلق نظیر آن‌ها

- نقاط به دست آمده را به هم وصل می‌کنیم
دو دسته‌ی مجازی با فراوانی $f_i = 0$ به ابتدا و انتهای مراکز اضافه می‌کنیم تا سطح چندبر فراوانی به دست آید.

نکته ← سطح زیر نمودار چندبر فراوانی با مجموع مساحت مستطیل‌های نمودار مستطیلی برابر است.

۴) نمودار فراوانی تجمعی ←
  - محور طول‌ها ← کران بالای دسته‌ها
  - محور عرض‌ها ← فراوانی تجمعی هر دسته

و نقاط به دست آمده را به هم وصل می‌کنیم.

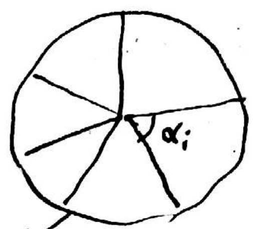
نکته: ۱) نمودار فراوانی تجمعی ← همواره صعودی است.
۲) اگر قسمتی از نمودار فراوانی تجمعی به صورت خطی موازی محور xها باشد یعنی ← فراوانی مطلق آن طبقه صفر است.

۵) نمودار دایره‌ای ← دایره را به قسمت متناسب تقسیم می‌کنیم

k ← تعداد دسته‌ها

$\alpha_i = \frac{f_i}{n} \times 360^\circ$

$\frac{f_i}{n}$ فراوانی نسبی



۶) نمودار ساقه و برگ ←
- ساقه ← ارقام مشترک
- برگ ← ارقام غیر مشترک

- اگر داده‌های آماری عددی باشند $\xrightarrow{then}$ آنها را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.
- در برگ ← داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب می‌شوند.
- در قسمت برگ ← مجموع تعداد اعداد برابر کل داده‌هاست.

* شاخص‌های آماری ←
  ۱. شاخص‌های مرکزی
  ۲. شاخص‌های پراکندگی

- شاخص‌های مرکزی ←

۱) مُد ← داده‌ای که فراوانی آن از همه‌ی داده‌ها بیشتر باشد.
(ممکن است یک جامعه چند مدی باشد یا اصلاً مد نداشته باشد.)

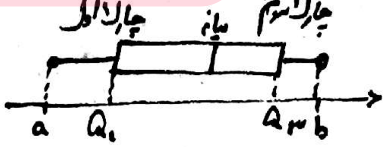
۲) میانه ←
- تعداد داده‌ها زوج ← میانگین دو عنصر وسط
- تعداد داده‌ها فرد ← عنصر وسط

(داده‌ها به ترتیب صعودی باید مرتب شوند)

* نکته‌ی مهم ←
۱) اگر به داده‌های آماری k واحد بیافزائیم، مد یا میانه به اندازه‌ی k واحد افزایش می‌یابند.
۲) اگر داده‌های آماری را k برابر کنیم، میانه یا مد k برابر می‌شوند.

۳) چارک‌ها ←
- میانه‌ی نیمه‌ی اول ← چارک اول (Q_1)
- میانه‌ی نیمه‌ی دوم ← چارک سوم (Q_3)
- چارک دوم (Q_2) ← همان میانه است.

۴) نمودار جعبه‌ای ←



۵) میانگین : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

* نکته ← با استفاده از جدول توزیع فراوانی داریم:

مرکز دسته	x_1	x_2	...	x_n
فراوانی	f_1	f_2	...	f_n

$\longrightarrow \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$, $\sum f_i = n$

* نکته مهم:

۱) اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند ← میانگین برابر یکی از آنهاست.

۲) اگر همه‌ی داده‌ها را در a ضرب کنیم، میانگین a برابر می‌شود و اگر به هر یک از داده‌ها عدد b را اضافه کنیم ← میانگین b واحد اضافه می‌شود.

- شاخص‌های پراکندگی ←

۱) دامنه‌ی تغییرات ← اختلاف بزرگترین و کوچکترین داده است

$R = b - a$

* نکته‌ی مهم:
۱) اگر به همه‌ی داده‌های آماری یک عدد بیافزائیم $\xrightarrow{then}$ R ثابت می‌ماند.
۲) اگر همه‌ی داده‌های آماری را در k ضرب کنیم $\xrightarrow{then}$ $R \to |k| R$
۳) if $R = 0$ $\xrightarrow{then}$ همه‌ی داده‌ها با هم برابرند.
و میانگین، میانه و مد بر هم منطبق‌اند

۲) انحراف از میانگین ← اختلاف هر داده از میانگین $x_i - \bar{x}$

نکته ← در حالت کلی مجموع انحراف از میانگین‌ها صفر است

$\sum f_i (x_i - \bar{x}) = 0$

$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$

۳) واریانس ←

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad or \quad \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

* نکته: با استفاده از جدول توزیع فراوانی داریم:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} \quad or \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$$

۴) انحراف معیار:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad or \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}}$$

نکته: ۱) اگر همه‌ی داده‌های آماری با هم برابر باشند ← $\sigma^2 = 0$, $\sigma = 0$

۲) اگر به همه‌ی داده‌ها عددی را بیافزائیم ← σ^2 , σ

۳) اگر همه‌ی داده‌ها را در $a \neq 0$ ضرب کنیم ← $\sigma \to |a| \sigma$, $\sigma^2 \to a^2 \sigma^2$

۴) اگر داده‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند ← قدر نسبت d

$$\sigma^2 = \frac{d^2 (n^2 - 1)}{12}$$

۵) ضریب تغییرات ← نسبت انحراف معیار به میانگین

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

نکته: ۱) هر چه ضریب تغییرات به صفر نزدیک‌تر باشد ← داده استانداردتر است.

۲) اگر ضریب تغییرات داده‌ها صفر باشد ← داده‌ها با هم برابرند.

(کاربرد مشتق)

موضوع : .... تاریخ : ....

$f(x)=\sqrt[n]{x^m}$ (عبارت درجه ۱) نقاط عطف ← ① ریشه‌ی عبارت رادیکالی

$\frac{n-m}{n+m}\times$ ریشه‌ی عبارت درون رادیکال

مثال ← $\sqrt[5]{x^3}(x-1)$

$\hookrightarrow \begin{cases} x^3=0 \Rightarrow x=0 \\ x=\frac{5-3}{5+3}(-1)=-\frac{1}{4} \end{cases}$

(سوال : در بازه‌ای تقعر تابع مورد نظر رو به پایین است. طول این بازه کدام است.)

$$f(x)=\sqrt[n]{x^m}\,(ax+b)$$

طول نقطه‌ی عطف مایل ← $x=\frac{n-m}{n+m}\times\left(\frac{b}{a}\right)$

* نکته: معادله‌ی درجه‌ی چهارم $ax^4+bx^2+c=0$ زمانی دارای چهار ریشه‌ی حقیقی متمایز است که بعد از تبدیل آن به معادله‌ی درجه‌ی دو، Δ و S و P در معادله‌ی جدید هر سه مثبت باشند.

* نکته: اجتماع ۲ تابع ممکن است یک تابع نباشد.

ریاضیات ـ توابع و معادلات

- معادله‌ی درجه‌ی دوم: $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \longrightarrow$ ریشه‌ها $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

مجموع ریشه‌ها $\longrightarrow S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ تفاضل ریشه‌ها $\longrightarrow |x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

حاصلضرب ریشه‌ها $\longrightarrow P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

واسطه‌ی هندسی بین ریشه‌ها $\longrightarrow k^2 = x_1 \cdot x_2 = P$

واسطه‌ی عددی بین ریشه‌ها $\longrightarrow k = \dfrac{x_1+x_2}{2} = \dfrac{S}{2}$

$\boxed{* \ x^2 - Sx + P = 0}$

if: β , α ریشه‌های معادله باشند $\xrightarrow{\text{then}} \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P \\ \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS \\ (\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta})^2 = S \pm 2\sqrt{P} \end{cases}$

* نکته:

① $\Delta > 0 \longrightarrow$ دو ریشه‌ی حقیقی و متمایز $\longrightarrow$
- $\dfrac{c}{a} > 0$ ریشه‌ها هم علامت $\longrightarrow$ $-\dfrac{b}{a} > 0$ ریشه‌ها مثبت ؛ $-\dfrac{b}{a} < 0$ ریشه‌ها منفی
- $\dfrac{c}{a} < 0$ ریشه‌ها مختلف العلامه $\longleftarrow$ شرط لازم و کافی

② $\Delta = 0 \longrightarrow$ ریشه‌ی مضاعف $\longrightarrow x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$ در این حالت معادله به یک مربع کامل تبدیل می‌شود.

③ $\Delta < 0 \longrightarrow$ ریشه‌ی حقیقی ندارد

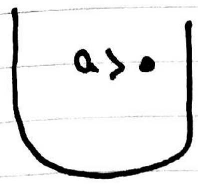
* نکته:
① if: $a+b+c=0$ (مجموع ضرایب صفر باشد) $\xrightarrow{\text{then}} x_1 = 1 \ , \ x_2 = \dfrac{c}{a}$

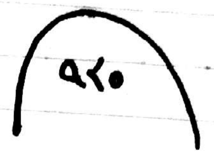
② if: $a+c=b \xrightarrow{\text{than}} x_1 = -1 \ , \ x_2 = -\dfrac{c}{a}$

* نکته: معادله‌ی درجه‌ی چهارم $ax^4 + bx^2 + c = 0$ زمانی دارای ۴ ریشه‌ی حقیقی متمایز است که بعد از تبدیل کردن به معادله‌ی درجه‌ی ۲ ، Δ ، S و P در معادله‌ی جدید همه مثبت باشند.

تابع درجه‌ی دوم ← $y=ax^2+bx+c\ ,\ a\neq 0$

① if: $a>0$ → min دارد ، ② if: $a<0$ → Max دارد





Min یا Max ← در نقطه‌ای $x=\frac{-b}{2a}$ بدست می‌آید.

مقدار آن ← $f(\frac{-b}{2a})$

* نکته کاملا مهم ← ① اگر تابع به شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ ← مختصات Min یا Max

→ $S\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$

② اگر تابع به شکل $f(x)=a(x-h)^2+k$ ← مختصات Min یا Max

→ $S(h,k)$

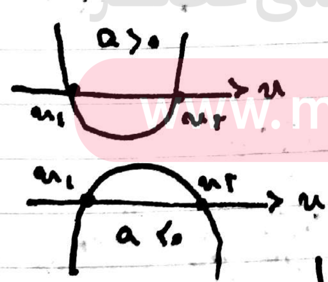
③ اگر تابع به شکل $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ ← مختصات Min یا Max

→ $S=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$

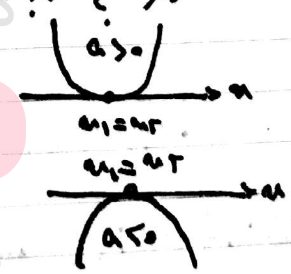
* محور تقارن ← محور تقارن تابع، خط $x=\frac{-b}{2a}$ است که از نقطه‌ی Min یا Max عبور می‌کند

* نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$

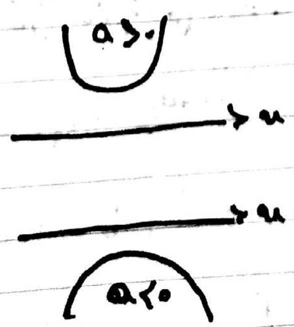
if: $\Delta>0$ →



if: $\Delta=0$ →



if: $\Delta<0$



* نکته: اگر $ac<0$ $\xrightarrow{then}$ نمودار از هر چهار ناحیه عبور می کند.

if: $a\in\mathbb{R}$ $\xrightarrow{then}$ $|a|=\begin{cases} a & ; a\geq 0 \\ -a & ; a<0 \end{cases}$ ← تابع قدر مطلق

* خواص قدر مطلق ←

① $|u|\geq 0$

② $|u|=|-u|$

③ $\sqrt{u^2}=|u| \longrightarrow \sqrt[2n]{u^{2n}}=|u| \; , n\in N$

④ $|u|\leq a \xrightarrow{a>0} -a\leq u\leq a$

⑤ $|u|\geq a \xrightarrow{a>0} u\geq a \; , u\leq -a$

⑥ if: $a,b\in\mathbb{R}$, $ab\geq 0$ $\xrightarrow{then}$ $|a+b|\leq|a|+|b|$ نامساوی مثلثی

معادلات شامل قدر مطلق ←

① نوع اول ←

$$\begin{cases} ① \; |u|=a \xrightarrow{a>0} u=a \; , u=-a \\ ② \; |u|=|v| \longrightarrow u=v \; , u=-v \\ ③ \; |u|=v \xrightarrow{v\geq 0} u=v \; , u=-v \end{cases}$$

② نوع دوم ←

برای حل یک معادله ی قدر مطلق ، باید عبارت را به ازای ریشه ی یا ریشه های داخل قدر مطلق تعیین علامت کنیم. جواب ها تنها قابل قبول اند که در بازه ی انتخابی صدق کنند.

مثال: معادله ی $x-2+|x-3|=1$ را حل کنید.

حل ← ریشه ی داخل قدر مطلق ← $x=3$

$$\begin{cases} \text{if: } x\geq 3 \longrightarrow x-2+(x-3)=1 \longrightarrow x=3 \quad \text{قابل قبول} \\ \text{if: } x<3 \longrightarrow x-2-(x-3)=1 \longrightarrow 1=1 \quad \text{همواره برقرار است} \end{cases}$$

$\xrightarrow{then}$ $x<3 \cup \{3\} \longrightarrow (-\infty,3]$

نامعادلات قدرمطلقی

(۱) نوع اول

① $|u| \le a \xrightarrow{a>0} -a \le u \le a$

② $|u| \ge a \xrightarrow{a>0} u \ge a$ یا $u \le -a$

③ $\boxed{|u| \le |v| \longrightarrow u^2 \le v^2}$ مهم

(۲) نوع دوم ← مثال: نامعادله‌ی $2x + |x-1| < 1$ را حل کنید.

حل ← ریشه‌ی قدرمطلق $x = 1$

اشتراک ندارند

if: $x \ge 1 \to 2x + (x-1) < 1 \to x < \frac{2}{3}$

if: $x < 1 \to 2x - (x-1) < 1 \to x < 0 \xrightarrow{\text{then}} (-\infty, 0)$ بازه‌ی مورد نظر

اشتراک دارند

تابع جزء صحیح

if: $n \le x < n+1 \xrightarrow{\text{then}} [x] = n$

* خواص و ویژگی‌ها

① if: $x \in Z \xrightarrow{\text{then}} [x] = x \,,\, [-x] = -x$

② if: $x \notin Z \xrightarrow{\text{then}} [-x] = -[x] - 1$

③ if: $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in Z \\ -1 & ; x \notin Z \end{cases}$

④ if: $k \in Z \xrightarrow{\text{then}} [x+k] = [x] + k$

⑤ $[x] \ge a \xrightarrow{a \in Z} x \ge a+1$

⑥ $[x] \le a \xrightarrow{a \in Z} x < a+1$

⑦ if: $[x] > x \xrightarrow{\text{then}} x \in \emptyset$

⑧ $[x] \le x < [x] + 1$

⑨ $\boxed{0 \le x - [x] < 1}$ مهم

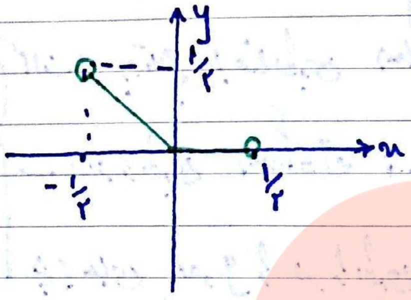
نمودار توابع شامل جزء صحیح ←

○ مثال ← نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x[2x]$ را در بازه‌ی $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ رسم کنید.

حل → $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \to -1 < 2x < 1 \xrightarrow{\text{۲ بازه در نظر می‌گیریم}} \begin{cases} -1 < 2x < 0 \to y = x(-1) = -x \\ 0 \le 2x < 1 \to y = x(0) = 0 \end{cases}$

$-\frac{1}{2} < x < 0$

$0 \le x < \frac{1}{2}$

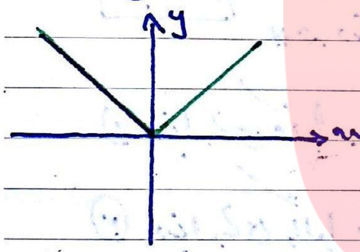


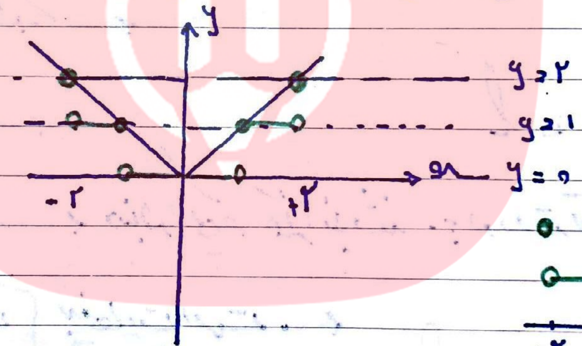
رسم نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = [f(x)]$ ←

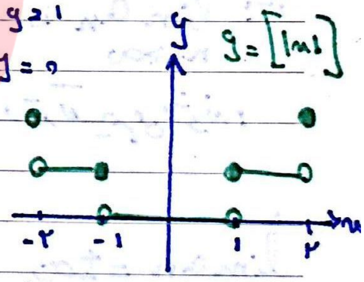
مثال ← نمودار تابع $y = [|x|]$ را در بازه‌ی $-2 \le x \le 2$ رسم کنید.

حل → $y = |x|$

$-2 \le x \le 2 \xrightarrow{then} 0 \le |x| \le 2 \to \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \\ y = 2 \end{cases}$







تابع یک به یک ←

تابع f را یک به یک گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:

$f(x_1) = f(x_2) \leftrightarrow x_1 = x_2$

* تابع $f(x) = |x|$ یک به یک نیست $\xrightarrow{\text{زیرا}} |x_1| = |x_2| \to x_1 = \pm x_2$

تابع وارون ←

هرگاه f یک به یک باشد ← $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$

$\to y = f(x) \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

همچنین $D_{f^{-1}} = R_f$ ، $R_{f^{-1}} = D_f$

نتیجه ← if: $f(a) = b \xrightarrow{then} f^{-1}(b) = a$

* نکته ← تابع f معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر یک به یک باشد.

* نکته ← اگر تابعی در دامنه‌ی خود صعودی یا نزولی اکید باشد، آنگاه یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر خواهد بود.

* یافتن ضابطه‌ی تابع معکوس ←

الف) برد تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$ را پیدا می‌کنیم. ← که همان دامنه‌ی تابع f^{-1} است.

ب) از رابطه‌ی $y=f(x)$، x را برحسب y می‌یابیم.

ج) جای x و y را در رابطه‌ی به‌دست آمده عوض می‌کنیم. در نتیجه $y=f^{-1}(x)$ خواهد بود.

* نمودار تابع معکوس ← قرینه‌ی تابع یک‌به‌یک f نسبت به خط $y=x$ را رسم می‌کنیم.

$\boxed{\text{دنباله‌ها}}$ ←

* حد دنباله‌ها ←

① دنباله‌های همگرا: ← if: $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

② دنباله‌های واگرا: ← دنباله‌هایی که همگرا نباشند. به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف) حدشان بی‌نهایت است ←

$\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$

* نکته‌ی مهم ← حد هر چندجمله‌ای وقتی $n\to+\infty$، با حد بزرگترین جمله‌ی آن چندجمله‌ای، در بی‌نهایت برابر است.

ب) واگرای نوسانی ← دنباله‌های نوسانی که در بی‌نهایت دارای حد نباشند، واگرا هستند. ← مثل: $\{(-1)^n\}$ نوسانی و واگرا

* مقایسه‌ی همگرایی و واگرایی دنباله‌ها ←

1) گویا و کسری ←

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n^k+a_2n^{k-1}+\dots}{b_1n^p+b_2n^{p-1}+\dots}=\begin{cases}\infty & ;k>p\\ \frac{a_1}{b_1} & ;k=p\\ 0 & ;k<p\end{cases}$$

2) دنباله‌ی نمایی (C^n) ← c عدد ثابت ←

الف) $if: |C|<1 \xrightarrow{then}$ همگرا به صفر

ب) $if: C=1 \xrightarrow{then}$ همگرا به 1

پ) $if: |C|>1 \xrightarrow{then}$ واگرا است

ت) $if: C=-1 \xrightarrow{then}$ واگرا است.

3) دنباله‌ی $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ← همگرا به عدد نپر یا e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{an+b}\right)^{cn+d}=e^{\frac{ck}{a}}$$

* دنباله‌های یکنوا ← دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد، یکنوا است.

دنباله‌ی صعودی → $a_{n+1}\geq a_n$

دنباله‌ی نزولی → $a_{n+1}\leq a_n$

* روش‌های تشخیص یکنوایی دنباله‌ها ←

1) مقایسه‌ی a_n و a_{n+1} ← $a_{n+1}-a_n$ را حساب می‌کنیم. اگر به ازای هر عدد طبیعی ←
- ≥ 0 باشد ← صعودی
- ≤ 0 باشد ← نزولی

یا اگر $a_n>0$:
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ ← صعودی
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1$ ← نزولی

2) استفاده از مشتق تابع حقیقی ← اگر به ازای $x\geq 1$ ، $f(x)$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر باشد $\xrightarrow{then}$
- $f'(x)\geq 0$ ← صعودی
- $f'(x)\leq 0$ ← نزولی

* دنباله‌های کراندار ← اگر یک دنباله همگرا باشد، آنگاه کراندار است و دارای کران بالا و پایین است.

* بررسی کرانداری دنباله‌ها ←

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} l \rightarrow \text{دنباله همگرا} \rightarrow \text{کران‌دار} \rightarrow \text{دارای کران بالا و پایین است} \rightarrow \left\{\frac{n}{2n^2+1}\right\} \\ +\infty \text{ یا } -\infty \text{ یا } \pm\infty \rightarrow \text{واگرای بی‌نهایتی} \rightarrow \text{بیکران} \begin{cases} =+\infty \rightarrow \text{از پایین کراندار} & \sqrt{n} \\ =-\infty \rightarrow \text{از بالا کراندار} & -\sqrt{n} \\ =\pm\infty \rightarrow \text{از هر دو طرف بیکران} & (-1)^n\sqrt{n} \end{cases} \\ \text{واگرای غیر بی‌نهایتی} \rightarrow \text{کراندار} \rightarrow \text{از بالا و پایین کران‌دار} \quad \sin(n\pi),\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{cases}$$

مثال: $S_n = \dfrac{1+2+3+\dots+n}{n^2} = \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \dfrac{n^2+n}{2n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$

با افزایش n، $\frac{1}{2n}$ کاهش می‌یابد. لذا کل کسر کاهش می‌یابد. ← پس S_n نزولی است.

* مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی ← $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} = \boxed{\frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)d\right)}$$

← وقتی a_1 و d داده شده باشد از این رابطه استفاده می‌کنیم.

وقتی جمله‌ی عمومی a_n داده شده باشد از این رابطه استفاده می‌کنیم.

* رابطه‌ی S_n و S_{n-1} با a_n ←

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \end{cases} \longrightarrow \boxed{a_n = S_n - S_{n-1}}$$

* اگر a_m، a_n دو جمله‌ی متمایز از یک دنباله‌ی حسابی باشند ←

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

* مجموع جملات دنباله‌ی هندسی ← $a_n = aq^{n-1}$

$$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} \ , q \neq 1 \longrightarrow \boxed{S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}} \ , q \neq 1$$

* رابطه‌ی S_{2n} ، S_n : ← $\boxed{\dfrac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n}$

* در مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی ← اگر $|q|<1$ $\xleftarrow{\text{then}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

مجموع همه‌ی جملات ← $\boxed{S = \dfrac{a}{1-q}}$

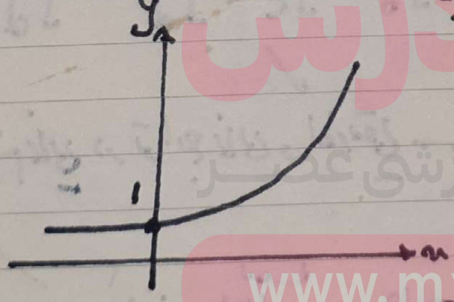
* نکته ← در دنباله‌ی حسابی ← تعداد جملات $= \dfrac{\text{جمله‌ی اول} - \text{جمله‌ی آخر}}{\text{قدر نسبت}} + 1$

- توابع نمایی و لگاریتمی ← $f(x) = a^x \quad , a>0 , a \neq 1 , x \in \mathbb{R}$

* نمودار توابع نمایی ← نمودار تابع $y = a^x$

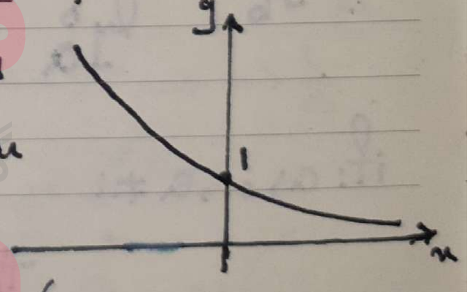
if: $a>1$

$f(x) = a^x$



if: $0<a<1$

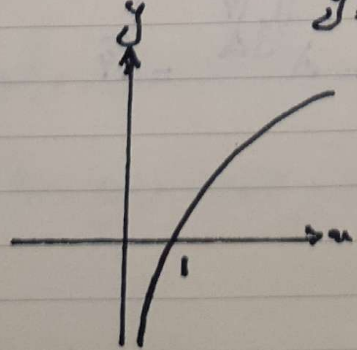
$f(x) = a^x$



* نمودار توابع لگاریتمی ← $y = \log_a x$

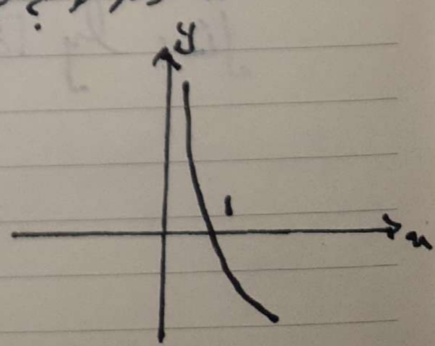
if: $a>1$

$y = \log_a x$



if: $0<a<1$

$y = \log_a x$



* قوانین ضرب، تقسیم و توان در توابع نمایی و لگاریتمی ←

① $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ قانون ضرب

② $\log_a \left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$ قانون تقسیم

③ $\log_a A^n = n\log_a A$ قانون توان

تعمیم ④ $\log_{a^m} A^n = \frac{n}{m}\log_a A$

* قوانین تغییر مبنا در توابع لگاریتمی ←

⑤ if: $a,b>0$, $c \neq 1$, $b \neq 1$

$\xrightarrow{\text{then}} \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

* $\boxed{\log 5 = 1 - \log 2}$

⑥ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

⑦ $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a$

* قوانین نمایی در توابع نمایی و لگاریتمی ←

if: $a>0$, $a \neq 1$

$\xrightarrow{\text{then}}$ ⑧ $a^{\log_a n} = n$ در آن $n>0$ است

مثال: $\sqrt{5}^{\log_5 4} = 5^{\frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\log_5 \sqrt{4}} = \sqrt{4}$

* معادلات نمایی ← $a^{f(x)}=b$ یا $a^{f(x)}=b^{g(x)}$

۱) اگر بتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم ←

مثال: $27^{2x}=9^{5x-1} \to (3^3)^{2x}=(3^2)^{5x-1} \to 3^{6x}=3^{10x-2}$

$\to 6x=10x-2 \to \boxed{x=\frac{1}{2}}$

۲) اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم ← برای حل معادله‌ای $a^{f(x)}=b$، اگر نتوانیم پایه‌ها را برابر کنیم، از دو طرف معادله، در پایه‌ی a لگاریتم می‌گیریم.

مثال: $5^x=4 \to \log_5 5^x=\log_5 4 \to x\log_5 5=\log_5 4 \to \boxed{x=\log_5 4}$

* نامعادلات نمایی ← برای حل نامعادلات نمایی، ابتدا سعی می‌کنیم پایه‌ها را برابر کنیم، اگر پایه بزرگتر از ۱ بود، در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض نمی‌شود. اگر پایه بین صفر و ۱ بود، در برداشتن پایه‌ها جهت نامساوی عوض می‌شود.

مثال: $32^{-3x}<\frac{1}{8} \to$

① $2^{-15x}<2^{-3} \to -15x<-3 \to x>\frac{1}{5}$

② $(\frac{1}{2})^{15x}<(\frac{1}{2})^{3} \to 15x>3 \to x>\frac{1}{5}$

* معادلات لگاریتمی ← هدف ← یافتن مقدار یا مقادیری برای x که در معادله صدق کند.

نکات: ۱) دامنه‌ی متغیر معادله را می‌یابیم.

۲) اگر از تعریف و خواص و ویژگی‌های لگاریتم استفاده می‌کنیم، ممکن است جواب خارجی ظاهر شود. باید بدانیم جواب را با توجه به دامنه‌ی تعریف معادله، از مجموعه‌ی جواب‌ها کسر کنیم.

* در حل معادلات لگاریتمی به حالت های زیر بر می خوریم: ←

① معادلاتی به شکل کلی $\log_a^{f(x)} = b$: ← به تساوی $f(x) = a^b$ می رسیم.

اینجا معادله را با توجه به شرایط $f(x)>0$ و $a>0$ و $a\neq 1$ حل می کنیم.

مثال: $\log_2^{x^2-3} = 3 \longrightarrow$ ① $x^2-3>0 \longrightarrow \begin{cases} x>\sqrt{3} \\ x<-\sqrt{3} \end{cases}$

② $x^2-3 = 2^2 \longrightarrow x^2 = 7 \longrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{7} \checkmark & \text{قابل قبول} \\ x=-\sqrt{7} \checkmark & \text{قابل قبول} \end{cases}$

② معادلاتی به شکل کلی $\log_a^{f(x)} = \log_a^{g(x)}$ ← به تساوی $f(x)=g(x)$ می رسیم.

ریشه‌های معادله را یافته و شرایط $f(x)>0$, $g(x)>0$, $a>0$, $a\neq 1$ را بررسی می کنیم.

مثال: $\log^{x^2-3} = \log^{2x} \longrightarrow$ ① $x^2-3=2x \longrightarrow x^2-2x-3=0 \longrightarrow \begin{cases} x=3 \checkmark \\ x=-1 \times \end{cases}$

② $x^2-3>0 \longrightarrow x^2>3 \longrightarrow \begin{cases} x>\sqrt{3} \\ x<-\sqrt{3} \end{cases}$

③ $2x>0 \longrightarrow x>0$

* تابع رشد و زوال ← تابع با ضابطه‌ی $P(t)=P(0)e^{kt}$ را تابع رشد با نسبت افزایشی k برای $(k>0)$ و تابع نمایی زوال با نسبت کاهش k برای $(k<0)$ می نامیم.

در این تابع $P(0)$ مقدار اولیه در $t=0$ است.

① if: $k>0 \xrightarrow{\text{then}}$ اکیداً صعودی

② if: $k<0 \xrightarrow{\text{then}}$ اکیداً نزولی

$k \longrightarrow$ نرخ

$$\boxed{\log_e^a = \ln a}$$

$$\boxed{\ln e = 1}$$

سوال مهم: $\longrightarrow$ if: $\begin{cases} 4^x + 2^x = 72 \\ \log(x+1) + \log(2y + x^2) = 2 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{then}} y = ?$

$$4^x + 2^x = (2^x)^2 + 2^x = 72 \longrightarrow 2^x = t > 0$$

$$\xrightarrow{\text{then}} t^2 + t - 72 = 0 \longrightarrow (t+9)(t-8) = 0 \longrightarrow \begin{cases} t = -9 \ \times \\ \boxed{t = 8} \ \checkmark \end{cases}$$

$$\longrightarrow 2^x = 2^3 \longrightarrow x = 3$$

$$\log 4 + \log(2y+9) = 2 \longrightarrow \log 4(2y+9) = \log 10^2 \longrightarrow 4(2y+9) = 100$$

$$2y + 9 = 25 \longrightarrow \boxed{y = 8}$$

* سوال مهم: در یک نوع کشت، تعداد باکتری ها پس از گذشت t دقیقه برابر $f(t)$ است که $f(t) = 2000\, e^{0.012t}$، پس از چه مدت تعداد باکتری ها ۱۰۰۰۰ می شود؟ $(\ln 5 = 1.68)$

$$\longrightarrow f(t) = 10000 = 2000\, e^{0.012t} \longrightarrow e^{0.012t} = 5$$

then $\longrightarrow$ از طرفین معادله بر مبنای e لگاریتم می گیریم $\longrightarrow \ln 5 = 0.012t = 1.68$

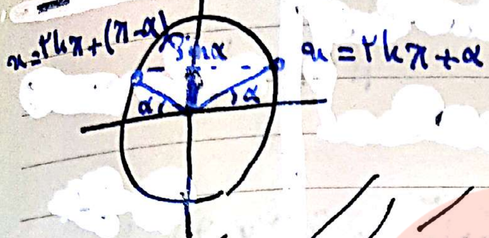
$$t = \frac{1.68}{0.012} = 140\ \text{min}$$

- معادلات مثلثاتی ←

① معادلات ساده‌ی مثلثاتی ←

$\sin x = a = \sin\alpha$ ← برای حل این معادله باید xهایی را پیدا کنیم که سینوسشان برابر $\sin\alpha$ باشد.

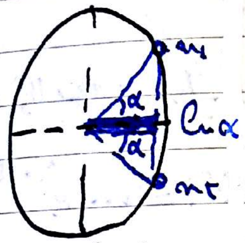
$-1 \le a \le 1$



$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

$\cos x = a = \cos\alpha$ ← برای حل این معادله باید xهایی را پیدا کنیم که کسینوسشان برابر $\cos\alpha$ باشد.

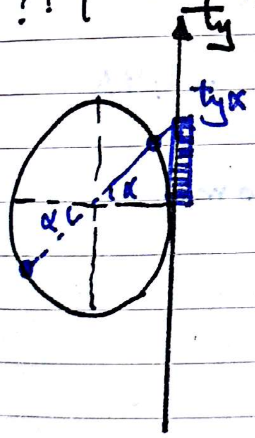
$-1 \le a \le 1$



$$\begin{cases} x_1 = 2k\pi + \alpha \\ x_2 = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

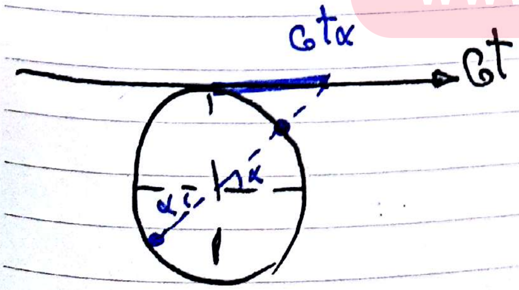
$$\boxed{x = 2k\pi \pm \alpha}$$

$\tan x = a = \tan\alpha$ ← برای حل این معادله باید xهایی را پیدا کنیم که تانژانتشان برابر $\tan\alpha$ باشد.



$$x = k\pi + \alpha$$

$\cot x = a = \cot\alpha$ ← برای حل این معادله باید xهایی را پیدا کنیم که کتانژانتشان برابر $\cot\alpha$ باشد.



$$x = k\pi + \alpha$$

۲) تبدیل معادلات مثلثاتی به دو نسبت مثلثاتی هم نام ← در معادلاتی به شکل کلی $\sin\alpha = \cos\beta$

یا $\tan\alpha = \cot\beta$ با استفاده از فرمول های تبدیل $\frac{\pi}{2} - \alpha$ دو طرف را به دو نسبت مثلثاتی هم نام تبدیل می کنیم.

مثال: $\cos 3x = \sin x$

حل $\longrightarrow \cos 3x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\longrightarrow 3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

* حالت های خاص ← $k \in \mathbb{Z}$

(1) $\sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

$\sin x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

(3) $\tan x = 0 \longrightarrow x = k\pi$

(4) $\cot x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

(2) $\cos x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$

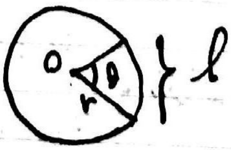
$\cos x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \longrightarrow x = 2k\pi + \pi$

* نکته ← (1) $R = \frac{\pi}{180} D$

(2) if: $\theta \xrightarrow{\text{در دایره ای به شعاع}} r \longrightarrow$ کمانی به طول l را ببیند

then $\longrightarrow$

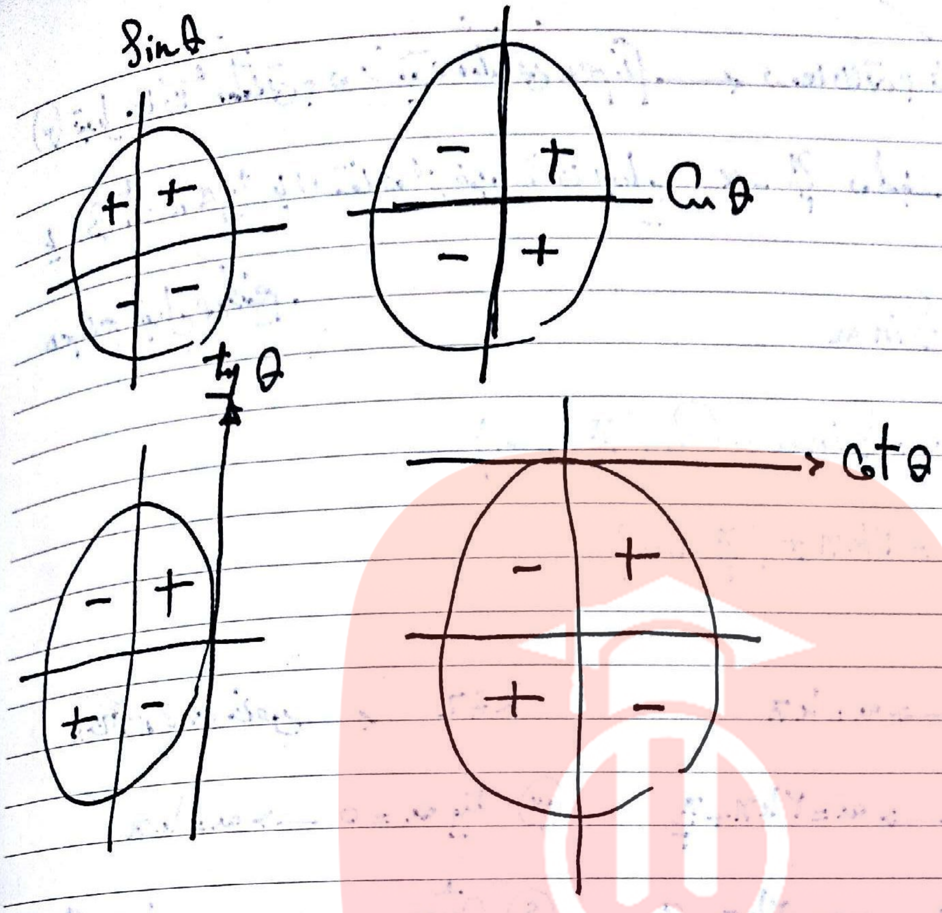


$\theta = \frac{l}{r}$ بحسب رادیان

* نکته: ←

$$\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \cot^2\theta$$

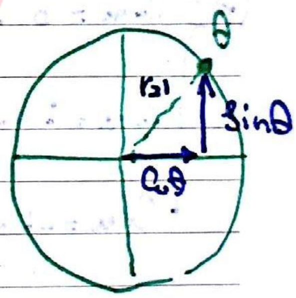
$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$$



* نکته ← روابط بین نسبت های مثلثاتی θ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \longrightarrow \begin{cases} \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \\ \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array}\right\} \longrightarrow \tan\theta \times \cot\theta = 1 \longrightarrow \begin{cases} \tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \\ \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ \sin^6 + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta \end{cases}$$

$\cot a - \tan a = 2\cot 2a$

* نکته ←

منفی انداز
$$\begin{cases} \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \\ \cot(-\theta) = -\cot\theta \end{cases}$$

منفی خور $\cos(-\theta) = \cos\theta$

* نسبت‌های مثلثاتی $(k\pi \pm \theta)$: ←

۱) اگر ضریب π عددی زوج باشد، آنرا از کمان‌های $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sin(\cancel{2k\pi} \pm \theta) = \sin(\pm\theta) \\ \cos(\cancel{2k\pi} \pm \theta) = \cos(\pm\theta) \end{cases}$$

۲) اگر ضریب π فرد باشد، آنرا از کمان‌های $\sin$ و $\cos$ حذف می‌کنیم، اما نسبت مثلثاتی را قرینه می‌کنیم.

$$\begin{cases} \sin(\cancel{(2k+1)\pi} \pm \theta) = -\sin(\pm\theta) \\ \cos(\cancel{(2k+1)\pi} \pm \theta) = -\cos(\pm\theta) \end{cases}$$

۳) ضریب π چه زوج و چه فرد باشد، آنرا از کمان‌های tg و cot حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} tg(\cancel{k\pi} \pm \theta) = tg(\pm\theta) \\ cot(\cancel{k\pi} \pm \theta) = cot(\pm\theta) \end{cases}$$

* نسبت‌های مثلثاتی $((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta)$

$$\begin{cases} \sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = (?)\cos\theta \\ \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = (?)\sin\theta \\ tg\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = (?)\cot\theta \\ cot\left((2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = ?\,tg\,\theta \end{cases}$$

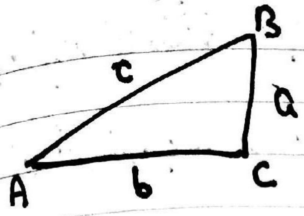
برای تشخیص علامت (?) کافیست علامت نسبت سمت چپ معادله را به دست بیاوریم و به جای (?) قرار دهیم.

* نکته ← هر تابع $y = a\cos bx$, $y = a\sin bx$ داریم:

$$\begin{cases} Y_{max} = |a| \\ Y_{min} = -|a| \\ T = \left|\frac{2\pi}{b}\right| \end{cases} \longrightarrow$$

* $y = \sin ax \xrightarrow{a>0} \begin{cases} x_{max} = \frac{\pi}{2a} \longrightarrow y_{max} \\ x_{min} = \frac{3\pi}{2a} \longrightarrow y_{min} \end{cases}$

* $y = \cos ax \xrightarrow{a>0} \begin{cases} x_{max} = \frac{2\pi}{a} \longrightarrow y_{max} \\ x_{min} = \frac{\pi}{a} \longrightarrow y_{min} \end{cases}$



* قانون Sin , قانون Cos :

قانون Sin → $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

قانون Cos → $\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$

* مقادیر مهم مثلثاتی

	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	

* اتحاد چاق و لاغر

$$\boxed{\begin{cases} a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \end{cases}}$$

* روابط دوست دشمن:

دوست — دشمن

$$\begin{cases} \sin^2\theta=\dfrac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\cot^2\theta} \\ \cos^2\theta=\dfrac{\cot^2\theta}{1+\cot^2\theta}=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta} \end{cases}$$

دوست — دشمن

* نکته ←

$$\begin{cases} \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \end{cases}$$

از جمع روابط بدست می‌آید ←

$$\begin{cases} \sin\alpha \cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\ 2\cos\alpha \sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos\alpha \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \\ -2\sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) \end{cases}$$

* روابط ناطقی ←

$$\begin{cases} \dfrac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{\operatorname{tg}45 + \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}45 \operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}(45+\theta) \\ \dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta} = \dfrac{\operatorname{tg}45 - \operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}45 \operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}(45-\theta) \end{cases}$$

* روابط ناطقای تحقیقی ←

$$\begin{cases} \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \; \dfrac{\times \frac{1}{\cos\theta}}{\times \frac{1}{\cos\theta}} \; \dfrac{1+\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}(45+\theta) \\ \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \dfrac{1-\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\theta} = \operatorname{tg}(45-\theta) \end{cases}$$

* روابط اصلی $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ ، $\tan 2\theta \longleftarrow$

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \\ \tan\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{cases}$$

* روابط فرعی $2\theta \longleftarrow$

1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

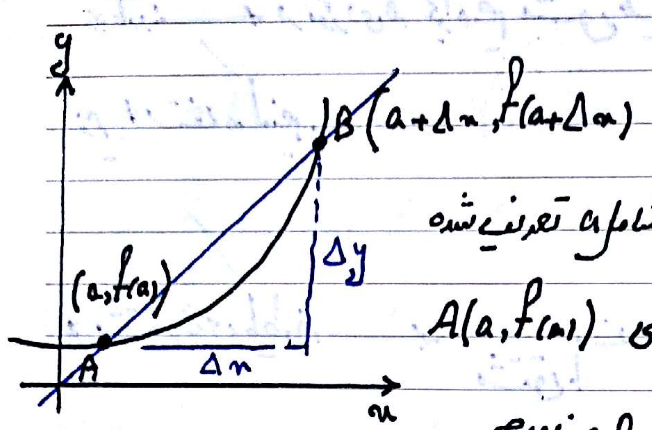
2) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - \sin 2\theta$

3) $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\overbrace{\sin^2 + \cos^2\theta}^{1}}{\underbrace{\frac{1}{2}\times 2\sin\theta\cos\theta}_{\sin 2\theta}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\theta} = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$

4) $\tan\theta - \cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{-\cos 2\theta}{\frac{1}{2}\sin 2\theta} = -2\cot 2\theta$

ریاضیات - مشتق

- تعریف مشتق و مشتق‌پذیری ←



* خط مماس ← هرگاه تابع f بر بازه‌ی باز شامل a تعریف شده باشد و حد زیر برقرار باشد، آنگاه خطی که گذرنده از نقطه‌ی $A(a, f(a))$ با شیب m_A را، خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی A می‌نامیم.

$$\boxed{m_A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}$$

* آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ←

(۱) آهنگ متوسط تغییر $y = f(x)$ روی بازه‌ای از x تا $x + \Delta x$ ← $\boxed{\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$

(۲) آهنگ لحظه‌ای تغییر f در x ← $\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$ به شرطی که حد موجود باشد

یا $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}$ (آهنگ متوسط تغییر)

* نکته ← در تابع f، برای بازه‌ی $[x_1, x_2]$ آهنگ متوسط تغییر به صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

* تعریف مشتق ← اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده است، در اینصورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

اگر حد بالا موجود نباشد ← f در a مشتق‌پذیر نیست.

* نکته ← در مواردی که بخواهیم مشتق یک تابع را در یک نقطه بیابیم بهتر است از فرمول زیر استفاده کنیم.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

* مشتق‌های یکطرفه ←

① $f'_+(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ مشتق راست

② $f'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ مشتق چپ

مثال: مشتق راست تابع $f(x)=x[-x]$ در $x=0$ ←

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x[-x]-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}[-x]=-1$$

* مشتق‌پذیری و پیوستگی ←

* قضیه ← اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است.

* نتیجه ← ① اگر تابع f در نقطه‌ی درونی a مشتق‌پذیر باشد، آنگاه دو شرط زیر برقرار است:

① $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ ← شرط پیوستگی

② $f'_+(a) = f'_-(a)$ ← هر دو موجود.

③ اگر مشتق‌های چپ و راست تابعی در یک نقطه موجود و با هم برابر باشند، تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر است.

④ اگر $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود نباشد ← f در a مشتق‌ناپذیر است.

* نکته ← در حالت کلی تابع با ضابطه‌ی $g=|f(x)|$ به ازای ریشه‌های ساده‌ی معادله‌ی $f(x)=0$ مشتق‌ناپذیر است.

مشتق‌گیری و قضایا

* قواعد

① $y = cf(x) \xrightarrow{\prime} y' = cf'(x)$

② $y = f(x) \pm g(x) \xrightarrow{\prime} y' = f'(x) \pm g'(x)$

③ $y = f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{\prime} y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

④ $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \quad , g(x) \neq 0$

⑤ قاعده زنجیری →

① $(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$

② $y = f(u) \longrightarrow y' = u' f'(u)$

③ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

④ $y'_x = u'_x \times y'_u$

* مشتق‌گیری توابع

① $y = u^n \xrightarrow{\prime} y' = nu'u^{n-1}$

② $y = \sqrt{u} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

③ $y = \sqrt[m]{u^n} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

④ $y = \dfrac{au+b}{cu+d} \xrightarrow{\prime} y' = \dfrac{ad-bc}{(cu+d)^2} \times u'$

⑤ $y = \sin x \xrightarrow{\prime} y' = \cos x \Longrightarrow y = \sin u \xrightarrow{\prime} y' = u' \sin u$

⑥ $y = \cos u \xrightarrow{\prime} y' = -u' \sin u$

⑦ $y = \tan u \xrightarrow{\prime} y' = u'(1 + \tan^2 u)$

⑧ $y = \cot u \xrightarrow{\prime} y' = -u'(1 + \cot^2 u)$

* مشتق توابع قدر مطلقی در یک نقطه ← در محاسبه‌ی مشتق توابع قدر مطلقی در یک نقطه اگر ریشه‌ی داخل قدر مطلق نباشد، کافی است قدر مطلق را در همسایگی آن نقطه تعیین علامت کنیم، سپس از تابع بدون قدر مطلق مشتق گرفته و مقدار قرار دهیم.

* $$\boxed{\text{if: } f(x)=\frac{a}{x} \xrightarrow{\ '\ } f'(x)=\frac{-a}{x^2}}$$

- یافتن خط مماس و قائم با مشتق ←

* معادله‌ی خط مماس ← $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$

* معادله‌ی خط قائم ← $\boxed{y-f(x_0)=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)}$

* یافتن نقطه‌ی تماس با داشتن شیب معلوم ←

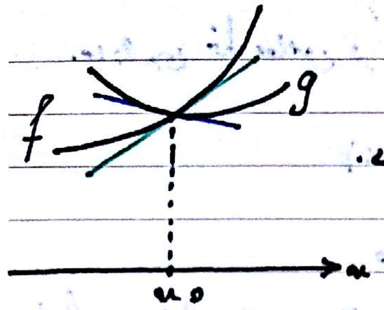
در این حالت از تابع مشتق گرفته و برابر ضریب زاویه‌ی معلوم قرار می‌دهیم و با توجه به شرایط مسئله طول نقطه‌ی (عرض آن) یا رابطه‌ی بین طول و عرض نقطه‌ی تماس به دست می‌آید.

مثال ← طول نقطه‌ای از تابع $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$ را تعیین کنید که خط مماس در آن نقطه موازی محور xها باشد.

حل ← باید شیب خط مماس صفر باشد:

$$y'=x^2-4x+3=0 \rightarrow (x-3)(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

* زاویه‌ی بین دو منحنی یا یک خط و یک منحنی ⟵

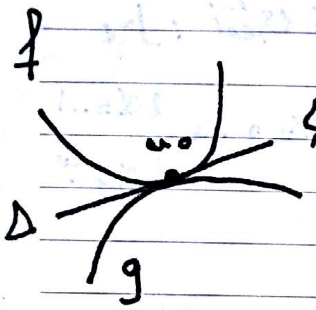


زاویه‌ی دو منحنی، زاویه‌ی بین مماس رسم شده بر دو منحنی است. (در نقطه‌ی تقاطع)

ابتدا دو منحنی را با هم قطع داده، طول نقطه‌ی تقاطع را یافته، سپس شیب خط مماس بر دو منحنی را در این نقطه می‌یابیم و از رابطه‌ی زیر زاویه را پیدا می‌کنیم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

* مماس بودن یک خط بر یک منحنی یا دو منحنی بر هم: ⟵



اگر دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بر هم مماس باشند، آنگاه معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت. اگر نقطه‌ی تماس را x_0 بنامیم آنگاه:

$$\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$$

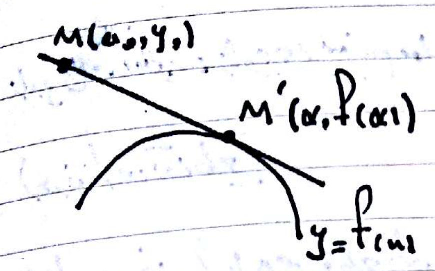
* مماس بودن یک تابع چند جمله‌ای بر محور xها ⟵ در توابع چند جمله‌ای به شکل $f(x)=(x-a)^n g(x)$ ، $g(a)\neq 0$ ، $n\in N$ ، اگر تابع بخواهد بر محور xها مماس شود باید در آن عامل صفر شونده از مرتبه‌ی بیشتر یا مساوی ۲ ظاهر شود.

مثال ⟵ $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ ⟵ محور xها را در نقطه‌ی $x=2$ قطع می‌کند.
در نقطه‌ی $x=1$ با محور xها مماس است.

* خط مماس از نقطه‌ای خارج منحنی ⟵ ۲ روش داریم:

روش ۱ ⟵ برای یافتن خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ از نقطه‌ی $M(x_0,y_0)$ خارج منحنی فرض می‌کنیم نقطه‌ی تماس $M'(\alpha, f(\alpha))$ باشد. با یافتن شیب خط مماس در α ،

معادله‌ی خط مماس در M' را می‌نویسیم، مختصات نقطه‌ی M در این خط صدق می‌کند.



$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$y \to y_0 \qquad x \to x_0$$

از این معادله α بدست می‌آید، سپس نقطه‌ی تماس و معادله‌ی خط مماس پیدا می‌شود.

مثال: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = x^2+1$ از نقطه‌ی $A(1,-2)$ را بیابید.

حل: نقطه‌ی فرضی $M(\alpha, \alpha^2+1) \longrightarrow m = y'(\alpha) = 2\alpha$

معادله‌ی مماس $\longrightarrow y-(\alpha^2+1) = 2\alpha(x-\alpha) \Big|_{\substack{x=1\\y=-2}} \longrightarrow \alpha^2-2\alpha-3=0 \longrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=3\end{cases}$

معادله‌ی خطوط مماس $\longrightarrow \begin{cases} y-2 = -2(x+1) \longrightarrow y=-2x \\ y-10 = 6(x-3) \longrightarrow y=6x-8 \end{cases}$

* روش m: معادله‌ی خطوط گذرنده از نقطه‌ی M با شیب m را می‌نویسیم و آن را با منحنی قطع می‌دهیم. از $\Delta=0$ مقدار m بدست می‌آید و معادله‌ی خط مماس پیدا می‌شود.

مثال: معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=x^2+1$ از نقطه‌ی $A(1,-2)$ را بیابید.

$$\begin{cases} y+2 = m(x-1) \\ y=x^2+1 \end{cases} \longrightarrow x^2+1 = m(x-1)-2 \longrightarrow \Delta=0 \longrightarrow \begin{cases} m=6 \\ m=-2 \end{cases}$$

معادله‌ی خطوط مماس $\longrightarrow \begin{cases} y+2 = 6(x-1) \longrightarrow y=6x-8 \\ y+2 = -2(x-1) \longrightarrow y=-2x \end{cases}$

* مشتق تابع حاصلضرب دو تابع
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)g(a+\Delta x) - f(a)g(a)}{\Delta x}$$

* مشتق ضمنی
$$f(x,y)=0 \longrightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

نکته‌ی مهم: عرض از مبدأ مماس بر منحنی ← در معادله‌ی مماس $x=0$

طول از مبدأ مماس بر منحنی ← در معادله‌ی مماس $y=0$

ریاضیات - کاربردهای مشتق

- اکسترمم‌های نسبی، مطلق و نقطه‌ی بحرانی ←

* ماکزیمم و مینیمم نسبی ←

① if: $c\in I$, $x\in I$, $f(c)\geq f(x)$ $\xrightarrow{then}$ f در نقطه‌ی c دارای ماکزیمم نسبی است.

② if: $c\in I$, $x\in I$, $f(c)\leq f(x)$ $\xrightarrow{then}$ f در نقطه‌ی c دارای مینیمم نسبی است.

* ماکزیمم و مینیمم مطلق ← نقطه‌های ماکزیمم مطلق (مینیمم مطلق) تابع f است هرگاه عرض آن از طول‌های نقاط دامنه‌ی تابع یا بازه‌ی $[a,b]$ بیشتر (کمتر) باشد.

* نقاط بحرانی ← نقطه‌ی درونی $c\in D_f$ را، نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌نامیم هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد.

* نتیجه ← نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی بسته، نقاط بحرانی نیستند.

* طریقه‌ی یافتن نقاط بحرانی ← وقتی ضابطه‌ی تابع داده شده است، برای یافتن نقاط بحرانی، ابتدا دامنه‌ی تابع را یافته، سپس از تابع مشتق گرفته و نقاطی درونی از دامنه که مشتق در آنها صفر است یا وجود ندارد، به دست می‌آوریم.

* نکته‌ها: ① در توابع چندجمله‌ای نقاط بحرانی از حل معادله‌ی $y'=0$ به دست می‌آید.

② در توابع به شکل $y=|f(x)|$ نقاط بحرانی از حل معادله‌ی $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ به دست می‌آید.

* اکسترمم‌های مطلق در توابع پیوسته ←

۲ روش داریم:

① استفاده از مشتق و تعیین نقاط بحرانی ←

مثال: ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3-3x^2+1$ را در بازه‌ی $[-\frac{1}{2}, 2]$ را بیابید.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \to x(x-2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\underbrace{f(0)=1}_{\text{Max مطلق}} \quad \underbrace{f(2)=-3}_{\text{می‌نیمم مطلق}} \quad f(-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{8}$$

② استفاده از محدوده کلی ←

مثال: Max و Min مطلق تابع با ضابطه‌ی $y=\sqrt{\sin x}-\sin x$ را بیابید.

فرض: $\sqrt{\sin x}=t \to -1\le \sin x \le 1 \xrightarrow{\text{then}} 0\le t\le 1$

$y=t-t^2 \to y'=1-2t=0 \to t=\frac{1}{2}$ در بازه‌ی $0\le t\le 1$ قرار دارد.

$$\underbrace{y(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}}_{\text{Max}} \quad \underbrace{y(1)=0 \quad y(0)=0}_{\text{Min}}$$

* تشخیص یکنوایی تابع با استفاده از مشتق ←

قضیه ← فرض کنیم تابع f روی بازه‌ی [a,b] پیوسته و بر روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت:

① if: $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) < 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ تابع f روی بازه‌ی [a,b] اکیداً نزولی (نزولی)

② if: $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) > 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ تابع f روی بازه‌ی [a,b] صعودی اکیداً (صعودی)

③ if: $\forall x \in (a,b)$, $f'(x) = 0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ f ثابت است.

* تعیین یکنوایی ←

مثال: یکنوایی تابع با ضابطه‌ی $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$ را بررسی کنید.

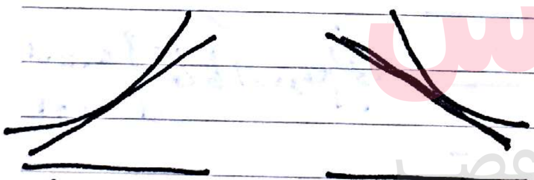
حل ← مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را می‌یابیم ←

$y' = 5x^4 - 5x^2 = 0 \Rightarrow 5x^2(x^2-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

x		-1		0		1	
y'	+	0	−	0	−	0	+

اکیداً صعودی — اکیداً نزولی — اکیداً صعودی

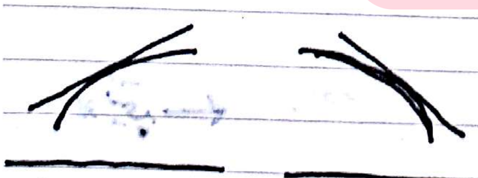
* تقعر منحنی ←



$f'(x) > 0 , f'' > 0$ $f' < 0 , f'' > 0$

الف) $f'' > 0$ ← تقعر رو به بالا ← هر خط مماس بر منحنی در همه‌ی نقاط بازه، زیر منحنی باشد.

ب) $f'' < 0$ ← تقعر رو به پایین ← هر خط مماس بر منحنی در همه‌ی نقاط بازه، بالای منحنی باشد.



$f' > 0 , f'' < 0$ $f' < 0 , f'' < 0$

نکته‌ی مهم ← عبارت درجه‌ی دوم ax^2+bx+c وقتی همواره نامنفی است که $a>0$ ، $\Delta \le 0$ باشد.

همواره $e^{-x} > 0$

* تشخیص نوع‌های نقاط اکسترمم نسبی ←

* آزمون مشتق اول ← اگر c عدد بحرانی تابع f باشد ←

الف) اگر f' در c از منفی به مثبت تغییر علامت دهد ← c ، Min تابع f

ب) اگر f' در c از مثبت به منفی تغییر علامت دهد ← c ، Max تابع f

* طرز یافتن نقاط اکسترمم نسبی با مشتق اول ←

مثال ← از تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-3x^5+5x^3$ نقاط اکسترمم نسبی را بیابید.

حل ← $f'(x)=-15x^4+15x^2=0 \longrightarrow 15x^2(1-x^2)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$ نقاط بحرانی

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$15x^2$	+	+	0 +	+	
$1-x$	+	+	+	0 −	
$1+x$	−	0 +	+	+	
f'	−	+	+	−	
f	↘	↗	↗	↘	

نقاط اکسترمم نسبی $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$

* آزمون مشتق دوم ← اگر c عدد بحرانی تابع f باشد و $f'(c)=0$ باشد ←

الف) اگر $f''(c)>0$ ← c ← نسبی Min

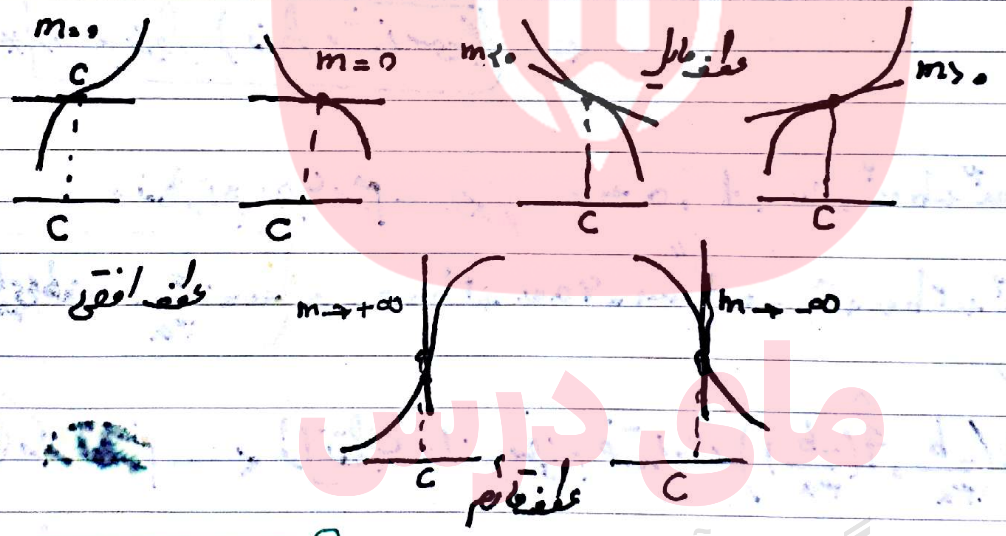
ب) اگر $f''(c)<0$ ← c ← نسبی Max

* نقطه‌ی عطف ←

تعریف ← فرض کنیم f در $x=c$ پیوسته باشد، در این صورت تابع f در c نقطه‌ی عطف دارد هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

① نمودار f در c، خط مماس داشته باشد. (مشتق چپ و راست در c برابر)

② جهت تقعر در c تغییر کند. (علامت f'' در دو طرف c عوض شود.)



باید تابع در این نقطه تعریف شده باشد ← $f''=0$ ⟸ طول نقطه‌ی عطف

* در تابع به صورت $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ نقطه‌ی عطف برابر است با:

$$I\left|\begin{array}{l} x_I=\dfrac{a+b+c}{3} \\ y_I=f(x_I)\end{array}\right.$$

نقطه‌ی عطف، وسط نقاط Max و Min (در صورت وجود) است:

$$y_I=\frac{y_{min}+y_{max}}{2}$$

مثال مهم: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-6x^2+8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x=1$ است: $f'(x)=4x^3-12x+8=4(x^3-3x+2)=0$

$\boxed{x=1}$ است و با تقسیم عبارت x^3-3x+2 بر $x-1$ تقسیم بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x+2 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & \boxed{x^2+x-2} \\ x^2-3x+2 & \\ -x^2+x & \\ -2x+2 & \\ +2x-2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

$\boxed{x^2+x-2} \to (x+2)(x-1)=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \\ x=1 \end{cases}$

		-2		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$

* رسم نمودار (نمودارشناسی) ←

* نمودار تابع درجه‌ی سوم ← $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \;,\; a\neq 0$

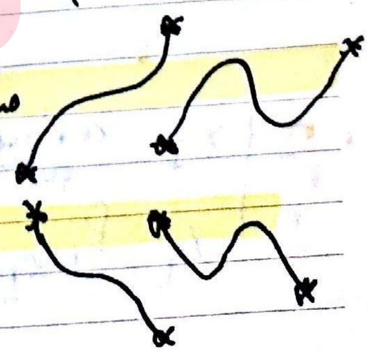
$f'(x)=3ax^2+2bx+c \to f''(x)=6ax+2b=0 \to \boxed{x=\frac{-b}{3a}}$ طول نقطه‌ی عطف

① مرکز تقارن ← نقطه‌ی عطف یعنی: مختصات $I\left(\frac{-b}{3a}, f\left(\frac{-b}{3a}\right)\right)$ مرکز تقارن تابع است.

② شروع و پایان تابع ← از آن‌جایی که $\lim_{x\to\pm\infty} ax^3+bx^2+cx+d=\lim_{x\to\pm\infty} ax^3$ پس:

if: $a>0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ یعنی از ناحیه‌ی سوم شروع و به ناحیه‌ی اول ختم می‌شود.

if: $a<0$ $\xrightarrow{\text{then}}$ 〃 〃 〃 دوم 〃 〃 〃 چهارم ختم می‌شود.



(۳) نمودار تابع ← $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

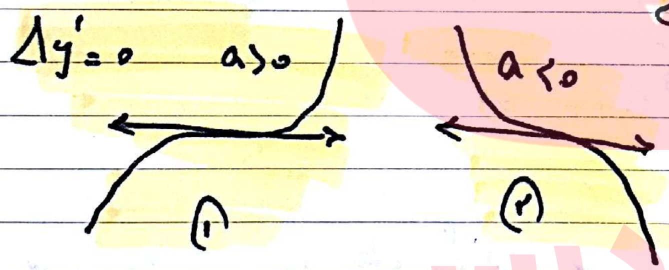
$\Delta y' > 0$ ← ۲ اکسترمم نسبی

$\Delta y' < 0$ یا $\Delta y' = 0$ ← اصلاً اکسترمم ندارد.

then ← نمودار تابع به a (ضریب x^3) و $\Delta y'$ بستگی دارد.

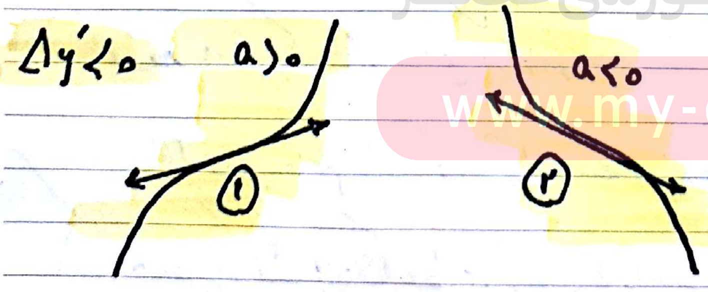
حالت (۱) ← $y' = 0$ ← $\Delta y' > 0$ دو ریشه‌ی متمایز دارد. یک Max و یک Min نسبی دارد.

حالت (۲) ← $y' = 0$ ← $\Delta y' = 0$ ریشه‌ی مضاعف دارد. عطف افقی دارد ← فاقد اکسترمم نسبی



حالت (۳) ← $y' = 0$ ← $\Delta y' < 0$ ریشه ندارد. عطف مایل دارد.

فاقد اکسترمم نسبی



* نمودار توابع چند جمله‌ای با درجات بالاتر از (۳) ←

در توابع چند جمله‌ای با ضابطه‌ی $y=f(x)$ برای یافتن مجهولات یا تشخیص نمودار به خواص زیر توجه می‌کنیم:

(۱) ضریب بزرگترین توان ← منفی از کدام ناحیه شروع و به کدام ناحیه ختم می‌شود.

(۲) نقاط اکسترمم نسبی ← $y'=0$ (ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد).

(۳) نقاط عطف ← $y''=0$ (ریشه‌های ساده یا مکرر مرتبه‌ی فرد).

* مجانب‌ها ←

* مجانب قائم ← تابع f در $x=a$ مجانب قائم دارد هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ (۲) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

(۳) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ (۴) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

* روش یافتن مجانب‌های قائم ← باید نقاطی را بیابیم که تابع در آن نقاط حد نامتناهی داشته باشد. ← معروف‌ترین توابعی که می‌توانند دارای مجانب قائم باشند، توابع کسری و توابع لگاریتمی هستند.

(۱) مجانب قائم توابع کسری ← ریشه‌ها مخرج مانند مجانب قائم هستند به شرط آنکه حداقل در یک بازه‌ی یک طرفه (چپ یا راست) آن نقطه تعریف شده باشد و در آن نقطه حد نامتناهی داشته باشد. در دو حالت زیر باید احتیاط کنیم:

الف) وقتی صورت و مخرج ریشه‌ی مشترک دارند.

ب) وقتی تابع شامل رادیکال با فرجه‌ی زوج است.

۲) مجانب قائم توابع لگاریتمی ← در توابع با معادله‌ی $y=\log_a^{u}$ ریشه‌های $u=0$ و در

توابع با معادله‌ی $y=\frac{u}{v}$ ریشه‌های $u=0$ و $v=0$ ؛ به شرط آنکه حداقل در

یک همسایگی چپ یا راست دامنه قابل تعریف باشند، کاندید مجانب قائم هستند.

* مجانب افقی ←

تعریف: خط $y=l$ را مجانب افقی منحنی تابع $y=f(x)$ گوئیم هرگاه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l$$

نکته: توابعی که دارای دامنه‌ی کراندار باشند مجانب افقی ندارند. (به عنوان مثال

توابع $y=\sqrt{4-x^2}$ یا $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ فاقد مجانب افقی هستند)

* روش یافتن مجانب‌های افقی ← باید شرایط وجود حد را با توجه به

دامنه‌ی تابع در بی‌نهایت بررسی کنیم.

۱) مجانب افقی در توابع گویا ← در صورتی مجانب افقی دارند که درجه‌ی صورت

کوچکتر یا مساوی درجه‌ی مخرج باشد.

۲) مجانب افقی در توابع رادیکالی ← از هم‌ارزی‌ها در رادیکالی برای یافتن مجانب افقی

استفاده می‌کنیم.

* مجانب مایل ← خط $y=mx+h$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ است هرگاه حداقل

یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(mx+h)\big)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(mx+h)\big)=0$$

شرط لازم: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ یا $-\infty$

* روش های یافتن مجانب های مایل ←

① روش تقسیم در تعیین مجانب مایل توابع گویا: در توابع گویا به شکل $y=\frac{f(x)}{g(x)}$، اگر درجه f $\boxed{\text{تنها یک درجه}}$ از g بیشتر باشد، خارج قسمت تقسیم صورت بر مخرج مجانب مایل تابع است.

② روش هم ارزی در توابع رادیکالی ←

① $y=mx+h+\sqrt{ax^2+bx+c}\quad (a>0)$

مجانب ها: $y=mx+h+\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$

② $y=mx+h+\sqrt[3]{ax^3+bx^2+cx+d}$

مجانب: $y=mx+h+\sqrt[3]{a}\left(x+\frac{b}{3a}\right)$

③ روش حد برای یافتن m, h ← فرض کنیم خط $mx+h$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ است، آنگاه برای یافتن m, h با استفاده از $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+h))$ خواهیم داشت:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$ (ضریب زاویه مجانب مایل)

$$h=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$$ (عرض از مبدأ مجانب مایل)

← به شرط آنکه m, h وجود داشته باشند، در غیر اینصورت تابع فاقد مجانب مایل است.

* اسم نمودار تابع هموگرافیک ←

هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (با شرط $c\neq 0$ و $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$) تابع هموگرافیک است.

دامنه‌ی آن $D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$ و تابع در دامنه‌ی خود پیوسته است.

* خواص ←

① مجانب‌ها ← یک مجانب قائم و یک مجانب افقی دارد.

مجانب قائم ← $x=-\frac{d}{c}$ (ریشه‌ی مخرج)

مجانب افقی ← $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\frac{a}{c}$

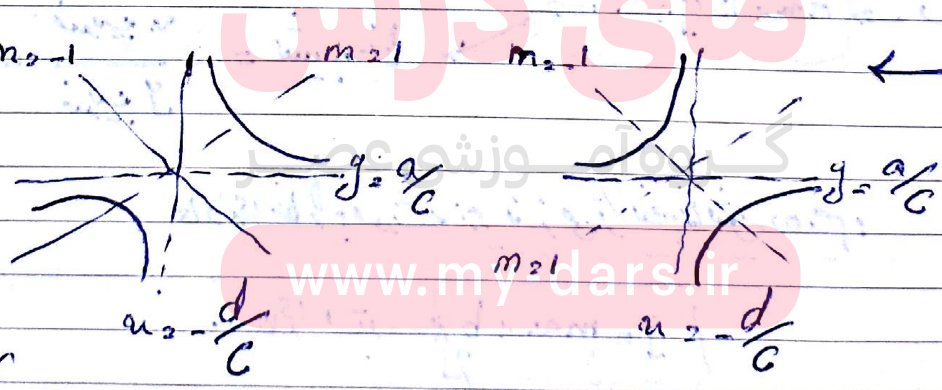
② مرکز تقارن ← محل تلاقی مجانب‌های تابع ← $\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right)=\omega$

③ مشتق تابع ← $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\text{مشتق}} f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2},\ x\neq-\frac{d}{c}$

الف) اگر $ad-bc>0$ then $f'(x)>0$ ← تابع به ازای هر x از بازه‌های $(-\frac{d}{c},+\infty)$ و $(-\infty,-\frac{d}{c})$ صعودی اکید است.

ب) اگر $ad-bc<0$ then $f'(x)<0$ ← تابع به ازای هر x از بازه‌های $(-\frac{d}{c},+\infty)$ و $(-\infty,-\frac{d}{c})$ نزولی اکید است.

④ نمودار تابع ←



⑤ محورهای تقارن ← تابع دارای دو محور تقارن عمود بر هم با شیب‌های ۱ و ۱- است که از مرکز تقارن عبور می‌کنند.

$m=1 \to \omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right) \to y-\frac{a}{c}=1\left(x+\frac{d}{c}\right)$

$m=-1 \to \omega\left(-\frac{d}{c},\frac{a}{c}\right) \to y-\frac{a}{c}=-1\left(x+\frac{d}{c}\right)$

* ادامه در آخر دفتر ←

ریاضیات: هندسه‌ی مختصاتی و منحنی های درجه‌ی دوم

* هندسه‌ی مختصاتی و منحنی های درجه‌ی دوم ←

ناحیه‌ی دوم	ناحیه‌ی اول
$x<0 , y>0$	$x>0 , y>0$
ناحیه‌ی سوم	**ناحیه‌ی چهارم**
$x<0 , y<0$	$x>0 , y<0$

* انتقال نقطه ←

* مختصات وسط پاره‌خط ←

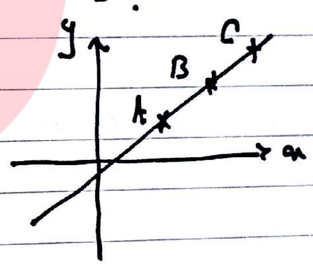
$$\begin{cases} A(x_1 , y_1) \\ B(x_2 , y_2) \end{cases} \rightarrow \boxed{M \begin{cases} x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}}$$

* فاصله‌ی دو نقطه از هم ←

$$\begin{cases} A(x_1 , y_1) \\ B(x_2 , y_2) \end{cases} \rightarrow \boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

* شرط بر یک استقامت بودن ۳ نقطه ←

$$\begin{cases} A(x_1 , y_1) \\ B(x_2 , y_2) \\ C(x_3 , y_3) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{gathered} m_{AB} = m_{AC} \\ \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \end{gathered}}$$



* معادله‌ی خط ←

معادله‌ی کلی خط

در معادله‌ی کلی خط → $\boxed{Ax + By + C = 0}$ → شیب خط $= -\dfrac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\dfrac{A}{B}$

معادله‌ی خط را به صورت زیر نیز می‌توانیم نمایش دهیم:

$\boxed{y = mx + b}$ ← معادله‌ی استاندارد

m: شیب

b: عرض از مبدا

* اوضاع دو خط نسبت به هم ←

مقایسه‌ی دو خط با هم ←

معادله‌ی باز	معادله‌ی استاندارد	
$ax+by+c=0 , a'x+b'y+c'=0$	$y=mx+h \; , \; y=m'x+h'$	
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$m=m' \; , \; h\neq h'$	۱) دو خط موازی
$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	$m=m' \; , \; h=h'$	۲) دو خط منطبق
$aa'+bb'=0$	$m\times m'=-1$	۳) دو خط عمود بر هم

* فاصله‌ی نقطه از خط و دو خط موازی از هم ←

فاصله‌ی نقطه از خط ← برای یافتن فاصله‌ی نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}x_A\\y_A\end{matrix}\right.$ از یک خط، اگر صورت معادله‌ی باز مرتب نباشد ($ax+by+c=0$) آن را مرتب کرده و :

$$\boxed{AH=d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

خیلی مهم اند ←

فاصله‌ی دو خط موازی ←

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+c'=0 \end{cases} \rightarrow \boxed{d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}} \rightarrow$$

فاصله‌ی مبدأ از خط ← $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

* مثال خیلی مهم (سراسری تجربی-۹۰) ← نقطه‌ی $A(7,4)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $3y+4x=8$ و $2y-3x=11$ می‌باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است.

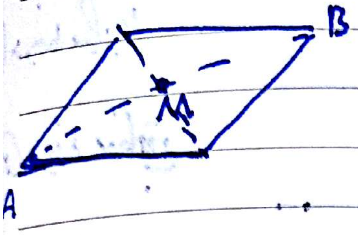
حل ← این نقطه در هیچ کدام از دو معادله صدق نمی‌کند. پس محل تقاطع دو خط نقطه‌ی روبروی A است.

← دو خط با معادله‌های بالا را به صورت روبرو با هم قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 & \times(-3) \\ 3y + 4x = 8 & \times 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{6y} + 9x = -33 \\ \cancel{6y} + 8x = 16 \end{cases}$$

$$17x = -17 \rightarrow x = -1$$

$$2y + 3 = 11 \rightarrow y = 4 \rightarrow B(-1,4)$$



$A(7,6)$

$$M = \left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+6}{2}\right) = (3,5)$$

* سؤال مهم ← به ازای کدام مقدار a، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$ و $2y + ax + 5 = 0$ و $y + 3x = a$ متقارب‌اند؟

حل ← سه خط متمایز زمانی متقارب‌اند که مختصات نقطه برخورد دوتای آنها در معادله سومی صدق کند.

$$\begin{cases} y + 2x = 0 & \times(-2) \\ 2y + ax = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\cancel{2y} - 4x = 0 \\ \cancel{2y} + ax = -5 \end{cases}$$

$$(a-4)x = -5 \rightarrow x = \frac{-5}{a-4}$$

$$y = \frac{10}{a-4}$$

$$y + 3x = a \rightarrow \frac{10}{a-4} - \frac{15}{a-4} = a$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0 \rightarrow \Delta = -4 < 0$$

نشدنی

* دستگاه معادلات خطی ←

* دستگاه دو معادله ی دو مجهولی خطی به شکل زیر است: ←

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

(۱) دستگاه دقیقاً یک جواب دارد ← اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ (دو خط متقاطع اند)

(۲) دستگاه جواب ندارد یا غیر ممکن است ← اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (دو خط موازی اند و غیر منطبق)

(۳) دستگاه دارای جواب های بیشمار است ← اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (دو خط منطبق اند)

* دستگاه چند معادله چند مجهولی ←

مثال ← دستگاه معادله ی

$$\begin{cases} x+y-z=-1 & (1) \\ x-y+z=5 & (2) \\ -x+y+z=9 & (3) \end{cases}$$

را حل کنید.

$$\begin{cases} (1)+(2) \Rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2 \\ (1)+(3) \rightarrow 2y=8 \rightarrow y=4 \\ (2)+(3) \rightarrow 2z=14 \rightarrow z=7 \end{cases}$$

* نکته: هرگاه تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر باشد، دستگاه زمانی جواب دارد که جواب به دست آمده در تمامی معادلات صدق کند.

* نکته: در دستگاه هایی به شکل کلی $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \\ a_1x+b_1y+c_1z=k \end{cases}$ با فرض $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=t$ ، x و y و z را برحسب t یافته و در معادله ی دوم قرار می دهیم و سپس مجهول مورد نظر را می یابیم.

* ادامه‌ی کاربردهای مشتق 8 ←

* رسم نمودار توابع گویا (کسری) 8 ←

خواص 8 ←

① وجود مجانب مایل، افقی یا قائم 8 ←

مجانب قائم ← با بررسی ریشه‌های مخرج

مجانب افقی 8 درجه‌ی صورت ≤ درجه‌ی مخرج } با بررسی حد تابع در $\pm\infty$

مجانب مایل 8 درجه‌ی صورت = درجه‌ی مخرج +1

$$y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} y = \begin{cases} y=0 \ (\text{مجانب افقی}) & n<m \\ y=\frac{a}{a'} \ (\text{مجانب افقی}) & n=m \\ y=\infty \ (\text{مجانب مایل}) & n=m+1 \end{cases}$$

$\frac{a}{a'}>0 \Rightarrow$ شیب مجانب مایل مثبت

$\frac{a}{a'}<0 \Rightarrow$ شیب مجانب مایل منفی

② مماس بودن منحنی بر محور xها 8 ← اگر نمودار تابع گویا در $x=\alpha$ بر محور xها مماس باشد، آنگاه محل تلاقی آن با محور xها ریشه‌ی مضاعف یا مکرر می‌دهد.

حالت ① 8 ← اگر نمودار در $x=\alpha$ اکسترمم نسبی باشد، صورت کسر دارای ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج α است.

حالت ② 8 ← اگر نمودار در $x=\alpha$ عطف افقی باشد، صورت کسر دارای ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد α است.

۳) موجود بودن عرض اکسترمم ← در صورتی که m عرض اکسترمم غیر صفر باشد، آنگاه خط $y=m \neq 0$ بر نمودار تابع گویای $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز نمودار باشد، آنگاه خط

مماس است، بنابراین معادله‌ی تلاقی خط و نمودار، ریشه‌ی مضاعف دارد.

۴) موجود بودن طول نقطه‌ی اکسترمم ← اگر طول نقطه‌ی اکسترمم داده شده باشد،

این طول ریشه‌ی معادله $y'=0$ است.

* نمودار توابع مثلثاتی ←

خواص ←

۱) دوره‌ی تناوب ← اگر تابع f متناوب و با دوره‌ی T باشد، آن‌گاه تابع در

بازه‌ای به طول T، به طور نامحدود تکرار می‌شود.

۲) مجانب‌ها ←

حالت ۱ ← نقطه مجانب قائم می‌توانند داشته باشند. افقی و مایل ندارند.

حالت ۲ ← در توابع کسری شامل عبارات مثلثاتی، مجانب قائم از ریشه‌های

مخرج حاصل می‌شود.

* نکته ← در توابع به صورت $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+k$، نقطه‌ی عطف

$$I\left|\begin{array}{l} x_I=\frac{a+b+c}{3} \\ f(x_I)=y_I \end{array}\right.$$

برابر است با:

* نقطه‌ی عطف وسط نقاط Max و Min (در صورت وجود) است.

$$y_I=\frac{Y_{max}+Y_{Min}}{2}$$

* نکته: ← فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_0,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$