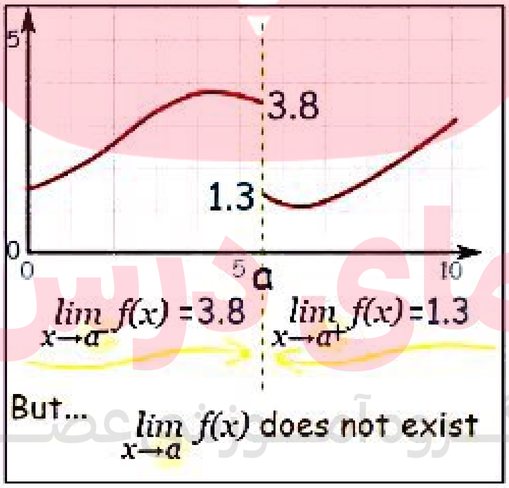
به نام خدا

جزوه تکنیکی- مفهومی

ریاضیات کنکور

ویژه رشته تجربی

مبحث: حد و پیوستگی



مدرس: شیوا اربابی

فارغ التحصیل دانشگاه صنعتی شریف

دانشجوی دندانپزشکی علوم پزشکی مشهد

@mathArbabi

مفهوم بخش پذیری :

- اگر $x=a$ ریشه‌ی عبارت $f(x)$ باشد، پس $f(x)$ حتماً عامل صفر شونده‌ی $(x-a)$ را در خودش دارد ← در این مواقع می‌گوییم عبارت $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} f(x) & p(x) \\ \cline{2-2} - & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array} \longrightarrow f(x)=p(x)Q(x)+R(x) \quad (*)$$

اگر مقدار باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ را بخواهیم بدانیم، کافی است معادله‌ی فوق (*) را به ازای $x=a$ (ریشه‌ی عبارت $p(x)$) حل کنیم ← مقدار $R(x)$ بدست می‌آید.

مثلاً می‌خواهیم بدانیم باقی مانده تقسیم $\underbrace{x^3-2x^2+8x-11}_{f(x)}$ بر $\underbrace{2x-4}_{p(x)}$ چند می‌شود؟

$x=2$ ریشه عبارت $p(x)$ (مقسوم علیه) می‌باشد ← $f(x)=p(x)Q(x)+R(x)$

$$x=2 \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \underbrace{f(2)}_{5}=(\underbrace{2x-4}_{0})Q(x)+R(x) \to \boxed{R(x)=5}$$

مثال (1) اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $4-x^2$ برابر $3x+12$ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم $2f(x+1)-1$ بر $x+3$ کدام است؟

1) -6 2) 6 3) 11 4) -11

حل: $f(x)=p(x)Q(x)+R(x) \to f(x)=(x^2-4)Q(x)+3x+12$

$\to f(2)=0+18=18 \quad , \quad f(-2)=0+6=6$

$2f(x+1)-1=(x+3)Q(x)+R(x) \xrightarrow{x=-3} 2f(-2)-1=0+R(-3)$

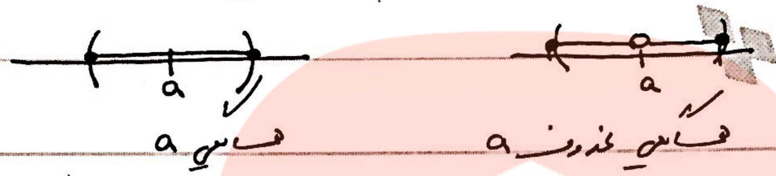
$\to \boxed{R(-3)=11}$

۱) مفهوم همسایگی :

به هر بازه‌ای که شامل عددی خاص مثلاً $x=a$ باشد، یک همسایگی a می‌گوییم

مثلاً بازه‌ی (۲و۵) یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد.

حال اگر در این بازه خود عدد a حذف شده باشد، می‌گوییم یک همسایگی محذوف a داریم.



حال اگر r را عددی مثبت و حقیقی فرض کنیم، بازه‌ی $(a, a+r)$ یک همسایگی راست a

و بازه‌ی $(a-r, a)$ یک همسایگی چپ a می‌باشد.

مثال (۲): کدام گزینه درباره‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-[x]}$ درست است؟

۱) در همسایگی $x=1$ تعریف شده است

۲) در همسایگی راست $x=2$ تعریف می‌شود

۳) در همسایگی محذوف $x=2$ تعریف شده است

۴) در همسایگی چپ $x=-2$ تعریف می‌شود

حل: ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)$ را می‌یابیم $\Leftarrow$ $4-x^2\geq 0 \rightarrow x^2\leq 4 \rightarrow -2\leq x\leq 2$

از طرفی مخرج کسر نباید صفر شود $\Leftarrow$ $x-[x]=0 \rightarrow x\notin \mathbb{Z}$

از اشتراک دو بازه‌ی فوق در می‌یابیم که دامنه‌ی تابع $f(x)$ معادل بازه‌های :

$(-2,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,2)$ می‌باشد

با بررسی گزینه‌ها در می‌یابیم فقط گزینه اول صحیح می‌باشد.

۱) مفهوم حد :

- وقتی می‌گوییم $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ یعنی می‌خواهیم ببینیم اگر x به عدد a نزدیک شود (هم از راست هم از چپ) مقدار f به چه عددی نزدیک می‌شود.

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ یعنی اگر از سمت راست به a نزدیک شویم مقدار f به چه عددی نزدیک می‌شود

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ یعنی اگر از سمت چپ به a نزدیک شویم مقدار f به چه عددی نزدیک می‌شود.

شرط وجود حد در یک نقطه این است که اولاً هم حد راست داشته باشد هم حد چپ

ثانیاً $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ و ثالثاً جواب حد بی‌نهایت ($\pm\infty$) نشود.

یعنی اگر فرضاً از یک سمت حد نداشته باشیم (مثلاً در دامنه موجود نباشد) می‌گوییم در آن نقطه به طور کلی حد وجود ندارد (تمام شد)

مثال (۳) : آیا $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x-2}$ وجود دارد؟

حل : وقتی می‌گوییم x به ۲ میل می‌کند یعنی هم از سمت راست ($x\to 2^+$) هم از سمت چپ ($x\to 2^-$) باید بررسی شود.

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x-2} = \quad \to \text{وجود ندارد} \end{cases}$$

چون $x<2$ در دامنه‌ی تابع موجود نیست

پس به طور کلی می‌گوییم این تابع در $x=2$ حد ندارد.

قدم اول در حد، حذف قدرمطلق و حذف جزء صحیح صورت سؤال می باشد.

توجه کنید هر وقت در صورت سؤال قدرمطلق دیدید، می بایست ابتدا عبارت داخل آن را تعیین علامت کرد و سپس با توجه به اینکه در همسایگی a $(x \to a)$ علامت عبارت داخل قدرمطلق مثبت است یا منفی، قدرمطلق را حذف می کنیم.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

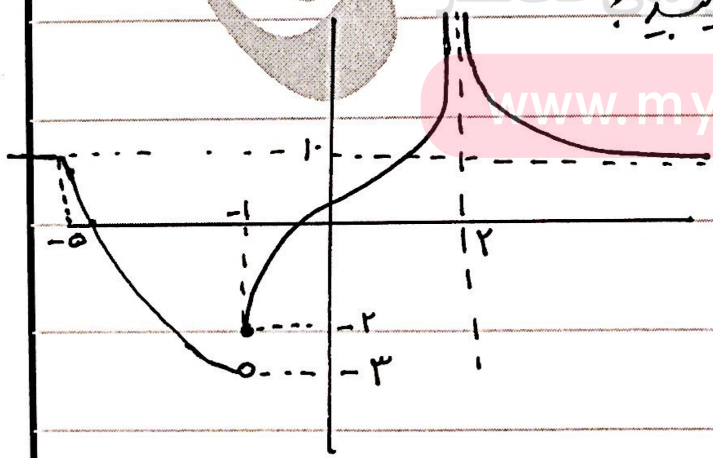
و هر وقت در صورت سؤال جزء صحیح دیدید، با توجه به اینکه x به چه عددی میل می کند، جزء صحیح را حذف کرده و به جای آن عددی می گذاریم.

در واقع قدرمطلق را با تعیین علامت حذف می کنیم و جزء صحیح را با تعیین مقدار!

قدم بعدی در حد، جایگذاری $x = a$ در ضابطه ی $f(x)$ است.

مثلاً $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{5}{1} = \boxed{5}$$

مثال (۴): در نمودار زیر حاصل حدهای زیر را بیابید؟



A) $\lim_{x \to 2} f(x)$　　B) $\lim_{x \to -1} f(x)$

C) $\lim_{x \to -5} f(x)$　　D) $\lim_{x \to \infty} f(x)$

حل :

A) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $\begin{cases} f(2^+) = +\infty \\ f(2^-) = +\infty \end{cases}$ ⟵ حد ندارد

B) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ $\begin{cases} f((-1)^+) = -2 \\ f((-1)^-) = -3 \end{cases}$ ⟵ حد ندارد

C) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$ $\begin{cases} f(-5)^+ = 1 \\ f((-5)^-) = 1 \end{cases}$ ⟵ حد دارد

D) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ $\begin{cases} f(+\infty) = 1 \\ f(-\infty) = 1 \end{cases}$ ⟵ حد دارد

همانطور که ملاحظه کردید حاصل این حدها را فقط با جایگذاری a در ضابطه‌ی $f(x)$ یافتیم.

گفتیم قدم اصلی حد، جایگذاری $x=a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ می‌باشد، حال اگر در حین جایگذاری به عدد صفر رسیدیم، تشخیص نوع صفر مهم است ⟵

انواع صفر:

- صفر حدی: عددی است بسیار نزدیک به صفر ⟵ مثلاً عدد $0/000\ldots1$ یک صفر حدی است یا مثلاً پاسخ حد $\lim\limits_{x \to 2} x-2 = 0$، صفر حدی است. چون x دقیقاً عدد ۲ نیست!!
- صفر مطلق: خود عدد صفر است ⟵ مثلاً پاسخ حد $\lim\limits_{x \to 0^+} [x] = 0$ صفر مطلق است، چون جواب خالص، بدون علامت بودن اعشار می‌باشد.

حالات مختلف جایگذاری $x=a$ در ضابطه‌ی $f(x)$:

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = L \rightarrow$ حد دارد

$\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{عدد}}{\text{مطلق}\ \infty} \rightarrow$ تعریف نشده $\rightarrow$ حد ندارد

$\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \pm\infty \rightarrow$ حد ندارد

$\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{صفر}}{\text{مطلق}\ \infty} =$ تعریف نشده $\rightarrow$ حد ندارد

$\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{مطلق}\ \infty}{\text{صفر}} =$ مطلق صفر $\rightarrow$ حد دارد

$\lim_{x\to a} f(x) =$ مطلق صفر $\times \infty = 0 \rightarrow$ حد دارد

$\lim_{x\to a} f(x) =$ صفر $\times\ \infty =$ مبهم $\rightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}} =$ مبهم $\rightarrow$ باید رفع ابهام شود

۲ حالت یکسان

$\lim_{x\to a} f(x) =$ مطلق $1^{\infty} = 1 \rightarrow$ حد دارد

$\lim_{x\to a} f(x) =$ صفر $1^{\infty} =$ مبهم $\rightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty - \infty =$ مبهم $\rightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{\infty}{\infty} =$ مبهم $\rightarrow$ باید رفع ابهام شود

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty^{\text{صفر}} =$ مبهم $\rightarrow$ باید رفع ابهام شود

حال حالات رفع ابهام را با هم بررسی می‌کنیم ...

۵) مبهم = $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ (غیر مثلثاتی) :

در این حالت ۲ روش ارائه می دهیم ←

روش اول : حذف عامل صفر شونده از صورت و مخرج کسر ← دقت کنید وقتی x به a میل می کند و حاصل حد $\frac{0}{0}$ می شود یعنی هم صورت و هم مخرج، عامل صفر شونده $(x-a)$ را در خود دارد. حال می بایست این عامل را در صورت و مخرج یافته و سپس با هم ساده کنیم تا رفع ابهام صورت گیرد.

مثلاً برای حل حد $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ ابتدا $x=1$ را جایگذاری می کنیم می بینیم $\frac{0}{0}$ $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ می شود ← $(x-1)$ عامل صفر شونده است ←

$$=\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$=\lim_{x\to 1} x^2+x+1=\boxed{3}$$

مثال (۵) : حاصل حد روبرو را بیابید ؟ $\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+5x-9}{x-1}$

حل : ابتدا $x=1$ را در صورت سوال جایگذاری می کنیم می بینیم حاصل $\frac{0}{0}$ $\frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر حدی}}$ می شود. سپس باید عامل صفر شونده $(x-1)$ را از صورت و مخرج با هم ساده کرد.

$$=\frac{4\cancel{(x-1)}(x+9/4)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1} 4x+9=\boxed{13}$$

نکته : هر وقت قادر به تجزیه عبارت صورت سوال نبودید، صورت و مخرج را بر عامل صفر شونده مثلاً $(x-a)$ تقسیم کنید تا خارج قسمت تعیین شود.

روش ۲ : هوپیتال ← (ویژه دانش آموزان دوازدهم + فارغ التحصیلان)

در این روش ابتدا از صورت و مخرج مشتق می‌گیریم و سپس حد آن در $x=a$ را حساب می‌کنیم

(اگر باز هم $\frac{0}{0}$ شد، می‌توان برای چندمین بار از هوپیتال استفاده کرد)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}\rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

مثال (۶) : حاصل حد زیر را بیابید؟

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x-1}=\frac{0}{0}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2}{1}=\boxed{5}$$

نکته : هرگاه عبارت زیر رادیکال صفر شود، نمی‌توان از هوپیتال استفاده کرد. برای آن ۲ راه حل ارائه می‌دهم.

راه حل ۱ ← عبارت زیر رادیکال را مربع کامل کنیم تا رادیکال حذف شود و بتوان از هوپیتال استفاده کرد.

راه حل ۲ ← از ضرب عامل صفر شونده استفاده می‌کنیم.

مثال (۷) حاصل حد زیر را بیابید؟ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$

حل : ابتدا $x=1$ را جایگذاری می‌کنیم، می‌بینیم حاصل $\frac{0}{0}$ صفر/صفر می‌شود

از طرفی چون عبارت زیر رادیکال صفر است پس نمی‌توان از هوپیتال استفاده کرد ← مربع کامل هم نمی‌توان ساخت ← ضرب عامل صفر شونده

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}^{1/2}}=\lim_{x\to 1}(x-1)^{1/2}(x+1)=0\rightarrow \text{حد دارد}$$

مثال (۸) : حد عبارت $\lim \frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x \to 2^-$ کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

حل : برای حل ، ابتدا با ثابت قدرمطلق را حذف کنیم ← تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق

		-1		2	
x^2-x-2	$+$		$-$		$+$

2^-

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-x^2+x+2}{2x-\sqrt{x^2+12}} = \frac{0}{0} \overset{Hop}{=} \lim_{x\to 2} \frac{-2x+1}{2-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+12}}} = \boxed{-3}$$

---

۵) مبهم $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ (مثلثاتی) :

اگر پس از جایگذاری $x=a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ (مثلثاتی) به $\frac{0}{0}$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ رسیدیم می‌بایست با استفاده‌های از فرمول‌های مثلثاتی ، عامل صفر شونده را یافته تا بتوانیم آن را از صورت و مخرج حذف کنیم .

مثال (۹) : حد عبارت $\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$ وقتی $x \to \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

حل : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{0}{0} \to$ مبهم

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} = \frac{\cancel{(1-\sin x)}(1+\sin x)}{\cancel{(1-\sin x)}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 1+\sin x = \boxed{2}$$

مثال (۱۰) : حاصل $\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}$ کدام است ؟

۱) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۴) $\frac{-\sqrt{2}}{4}$

حل : ابتدا به جای $\tan 2x$ قرار می دهیم $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$ ←

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}$$

دقت کنید چون $\cos 2x = 1$ می باشد در ازای ($x=\pi$)

همان متقارنش را در عبارت جایگذاری می کنیم

$$=\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin 2x}\times\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\sin 2x(\sqrt{1-\cos x})}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{|\sin x|}{2\sin x\cos x\sqrt{1-\cos x}}$$

در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد.

$$=\frac{\cancel{\sin x}}{2\cancel{\sin x}\times -1\times\sqrt{2}}=\frac{1}{-2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{-\sqrt{2}}{4}}$$

نکته : در حدهای مثلثاتی هر وقت عبارت $\sqrt{1+\cos x}$ یا $\sqrt{1-\cos x}$ داریم ، می توانیم عبارت را در مزدوج آن ضرب کرد تا به عبارت $\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|$ برسیم.

دقت کنید شرط لازم برای حل حدهای مثلثاتی ، تسلط کافی بر دایره های مثلثاتی می باشد.

حد بی نهایت ← $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}=\pm\infty$:

در این گونه مسائل ، علامت ∞ برای ما اهمیت دارد و برای تعیین علامت ∞ ، می بایست علامت صفر صفر را تعیین کنیم ← تعیین علامت نرخ

انواع ریشه:

- ریشه ساده : علامت تابع قبل و بعد ریشه عوض می‌شود.
- ریشه مضاعف : علامت تابع قبل و بعد ریشه عوض نمی‌شود.

نکته : وقتی x به ریشه ساده‌ی مخرج میل کند (مخرج مشترکی با صورت کسر را صفر نکند) آنگاه برای تعیین علامت ∞ می‌بایست حد را به ۲ شاخه تقسیم کنیم: حد راست، حد چپ

مثلاً در حد مقابل می‌بایست حتماً $x\to 3^+$ و $x\to 3^-$ را جداگانه بررسی کنیم :

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{0}=\infty \quad \begin{cases} x\to 3^+ : \dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ x\to 3^- : \dfrac{1}{0^-}=-\infty \end{cases}$$

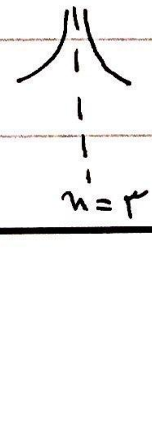
در واقع چون $x=3$ ریشه ساده مخرج است، پس $x-3$ در اطراف $x=3$ تغییر علامت می‌دهد ← علامت ∞ قبل و بعد ریشه تغییر می‌کند ←

		3	
$x-3$	$-$		$+$

نکته : وقتی x به ریشه مضاعف مخرج میل کند (مخرج مشترکی با ریشه صورت نداشته باشد) آنگاه برای تعیین علامت ∞ نیازی به دو شاخه کردن نمی‌باشد ← چون علامت تابع قبل و بعد ریشه عوض نمی‌شود. مثلاً در حد $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$ ، چون $x=3$ ریشه مضاعف مخرج است و در هر دو حالت 3^+ و 3^- علامت مخرج مثبت است، پس در هر دو حالت جواب حد $+\infty$ می‌باشد و نیازی به ۲ شاخه کردن نیست.

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

		3	
$(x-3)^2$	$+$		$+$



نتیجه‌گیری مهم : هر وقت دیدیم $x \to a$ و جواب حد بی‌نهایت شده است ، نتیجه می‌گیریم $x=a$ حتماً ریشه‌ی مخرج است و ریشه‌ی صورت نمی‌باشد ← $\infty = \frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$

و اگر دیدیم $x \to a$ و جواب حد $+\infty$ یا $-\infty$ است ، یعنی $x=a$ قطعاً ریشه‌ی مضاعف مخرج است ← چون اطراف a (a^+ و a^-) مخرج تغییر علامت نداده و علامت ∞ در هر دو طرف (a^+ و a^-) یکسان می‌باشد.

مثال (۱۱) : اگر $\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{2x^2+ax+b}=-\infty$ باشد ، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

حل : با توجه به نکته‌ی فوق ، در می‌یابیم $x=3$ قطعاً ریشه‌ی مضاعف مخرج می‌باشد ← چون اطراف $x=3$ (3^+ و 3^-) ، علامت ∞ یکسان است ← پس مخرج حتماً دو بار ریشه تغییر علامت نداده است.

$\to 2x^2+ax+b = 2(x-3)^2 = 2(x^2-6x+9) = 2x^2\underbrace{-12}_{a}x+\underbrace{18}_{b}$

چون $x=3$ ریشه‌ی مضاعف است $\to a+b=-12+18=\boxed{+6}$

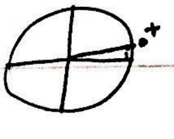
دقت کنید این سوال ، راه‌حل های متفاوت دیگری هم دارد.

مثال (۱۲) : حاصل $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{1-\cos x}$ کدام است؟ ۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) صفر

حل : قدم اول حد ، جایگذاری $x=a$ در ضابطه‌ی $f(x)$ می‌باشد ←

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{1-\cos x} = \frac{1}{0} = \infty$ ← علامت ∞ برای ما مبهم است

برای تعیین علامت ∞ ، می‌بایست علامت صفر را تعیین کنیم ← $\cos 0^+ = 1^- \to 1-\cos x = 1-1^- = 0^+$



$\to \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{1-\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

نکته: دقت کنید $-1 \le \cos x \le 1$ و $-1 \le \sin x \le 1$ می باشد. پس با توجه به این محدوده درمی یابیم عبارت $1-\cos x$ همیشه مثبت یا صفر می باشد.

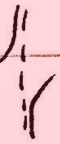
مثال (۱۳): نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}$ در همسایگی $x=-1$ به صورت کدام شکل زیر است؟

حل: دقت کنید هر وقت در سوال نمودار یک تابع را در همسایگی $x=a$ از ما بخواهند، می بایست از تابع در $x=a$ حد بگیریم ($x\to a^+$ و $x\to a^-$)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x-4}=\frac{10}{0}=\infty \begin{cases} x\to(-1)^+ : \frac{10}{0^-}=-\infty \\ x\to(-1)^- : \frac{10}{0^+}=+\infty \end{cases}$$

با توجه به جدول تعیین علامت

x		-1		4	
x^2-3x-4	+		−		+
	$(-1)^-$		$(-1)^+$		

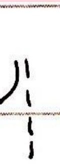
پس نمودار آن به صورت  می باشد ← گزینه چهارم

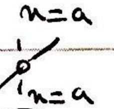
نکته: وقتی x به ریشه مخرج میل می کند، دو حالت پیش می آید: حالت اول ← $\infty=\frac{\text{عدد}}{0\ \text{صفر}}$

مثلاً $x=a$

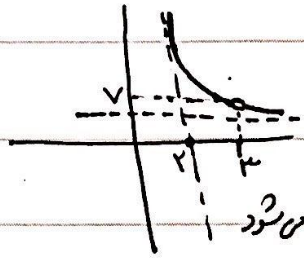
یعنی $x=a$ فقط ریشه مخرج است ←  ← در $x=a$ حد ندارد.

حالت دوم ← $\frac{0}{0}=\frac{0\ \text{صفر}}{0\ \text{صفر}}$ یعنی $x=a$ علاوه بر ریشه مخرج، ریشه صورت هم می باشد و باید رفع ابهام شود ←  ← در $x=a$ حد دارد.

نتیجه می گیریم ← هر وقت در نمودار تابع  دیدیم یعنی $\infty=\frac{\text{عدد}}{0\ \text{صفر}}$ ← $x=a$ فقط ریشه مخرج است

و هر وقت در نمودار تابع نقطه توخالی دیدیم  یعنی $\frac{0\ \text{صفر}}{0\ \text{صفر}}$ ← $x=a$ هم ریشه صورت و هم ریشه مخرج می باشد.

مثال (۱۴) : اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد، حاصل عبارت $ab+cd$ کدام است ؟



۱) -15 ۲) 15 ۳) 30 ۴) -30

حل : با توجه به نمودار ملاحظه می‌کنیم که وقتی $x\to 2$ جواب حد ∞ می‌شود

پس مخرج کسر صفر می‌شود یعنی $x=2$ ریشه مخرج می‌باشد

همچنین $x=3$ نقطه‌ی توخالی نمودار است $\leftarrow$ $x=3$ هم ریشه صورت هم ریشه مخرج می‌باشد

پس معادله‌ی مخرج $x=2$ و $x=3$ ریشه‌های مخرج می‌باشد $\to x^2\underset{\downarrow}{\underset{c}{-5}}x+\underset{\downarrow}{\underset{d}{6}}$ $\left\langle\begin{array}{l}S=2+3=5\\ P=2\times3=6\end{array}\right.$ جمع ضرب

طبق نمودار وقتی $x\to 3$ جواب حد 7 می‌باشد و از طرفی گفتیم وقتی در نمودار نقطه توخالی می‌بینیم حالت $\frac{0}{0}$ می‌باشد و می‌دانیم وقتی بعد از جاگذاری در حد به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم از هوپیتال استفاده می‌کنیم $\leftarrow$ پس جواب حد بعد از هوپیتال برابر 7 می‌باشد

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{4x+a}{2x-5}=\frac{12+a}{1}=12+a=7\to \boxed{a=-5}$$

از طرفی می‌دانیم $x=3$ ریشه صورت کسر هم می‌باشد $\leftarrow$ $2\times3^2+(-5\times3)+b=0$

$$\to 18-15+b=0\to \boxed{b=-3}\to ab+cd=15-30=\boxed{-15}$$

---

۷) حد در بی‌نهایت $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ $\leftarrow$ (مبهم $=\frac{\infty}{\infty}$)

وقتی $x\to\infty$ و جواب حد به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ شود، از هم ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\cdots}\simeq\frac{ax^n}{a'x^m}\begin{cases}\dfrac{a}{a'} & m=n\\[2mm] \dfrac{\infty}{\infty}=0 & m>n\\[2mm] \dfrac{\infty}{\infty}=\infty & n>m\end{cases}$$

مثال (۱۵) : حد عبارت زیر را بیابید ؟

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-\sqrt{9x^2+4x-1}}{3x+1}$$

حل : دقت کنید وقتی x به ∞ میل می‌کند

حتما باید از هم ارزی پرتوان استفاده کرد .

$$\lim_{\underset{\text{هم ارزی پرتوان}}{\underbrace{x\to\infty}}} \frac{2x-\sqrt{9x^2+4x-1}}{3x+1} \approx \lim_{x\to\infty}\frac{2x-|3x|}{3x}$$

$+\infty : \frac{2x-3x}{3x}=\frac{-x}{3x}=\boxed{-\frac{1}{3}}$

$-\infty : \frac{2x+3x}{3x}=\frac{5x}{3x}=\boxed{\frac{5}{3}}$

مثال (۱۶) : اگر $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}$ کدام است ؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) $\frac{1}{3}$

حل : با توجه به اینکه جواب حد اولی برابر $+\infty$ شده و $x\to -3$ ، نتیجه می‌گیریم که اولاً $x=-3$ ریشه مخرج است و ثانیاً چون از هر دو سمت ($(-3)^-$ و $(-3)^+$) به $+\infty$ میل کرده است ، پس $x=-3$ ریشه مضاعف مخرج بوده است

$(x+3)^2=x^2+6x+9$

$\to \ = x^2+2ax+b \to a=3$

$\to b=9$

حال حد دوم را حساب می‌کنیم $\to$ هم ارزی پرتوان چون $x\to+\infty$

$$\to \lim_{\underset{\text{هم ارزی پرتوان}}{\underbrace{x\to\infty}}}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}\approx\frac{ax^3}{bx^3}=\frac{a}{b}=\frac{3}{9}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

اصلاحیه و ادامه صفحه ۱۵ ⟵ ۲

نکته بسیار مهم: گاهی اوقات وقتی x به $\pm\infty$ میل می‌کند و از هم ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم، می بایست حتماً عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرد، سپس از هم ارزی استفاده کرد.

برای مثال برای حل حد عبارت $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-4x+1}$ وقتی از هم ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم جواب حد صفر می‌شود ⟵ اشتباه است!!

باید عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کنیم ⟵

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-4x+1}\times\frac{x+\sqrt{x^2-4x+1}}{x+\sqrt{x^2-4x+1}}=\frac{x^2-(x^2-4x+1)}{x+\sqrt{x^2-4x+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-1}{x+\sqrt{x^2-4x+1}}\xrightarrow{\text{استفاده از هم ارزی پرتوان}}=\frac{4x}{x+|x|}=\frac{4x}{2x}=\boxed{2}$$

نتیجه‌گیری ⟵ وقتی پس از استفاده از هم ارزی پرتوان عبارتهای شامل x با هم خنثی شوند (حذف شوند) می بایست ابتدا عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرد و سپس از هم ارزی پرتوان استفاده کرد.

(توضیح بیشتر در کلاس)

مفهوم پیوستگی :

شرط پیوستگی تابع $f(x)$ در $x=a$ این است که اولاً تابع $f(x)$ در $x=a$ حد داشته باشد

پس می‌بایست $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$ باشد و ثانیاً جواب حد (L) با مقدار تابع

در $x=a$ برابر باشد $\Leftarrow$ $f(a)=L$

پس به طور کلی تابع پیوسته $f(x)$ در $x=a$ $\Leftarrow$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

حال اگر $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = L$ می‌گوییم تابع نقطه پیوستگی از سمت راست دارد

و اگر $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = L$ می‌گوییم تابع نقطه پیوستگی از سمت چپ دارد.

توجه کنید توابع چند ضابطه‌ای در نقاط مرزی ممکن است ناپیوسته باشند. یعنی مثلاً در تابع

$f(x): \begin{cases} f_1(x) & x \geq a \\ f_2(x) & x < a \end{cases}$ می‌بایست حتماً پیوستگی $f(x)$ را در $x=a$ بررسی کنیم.

مثال (۱۷): اگر $f(x) = \begin{cases} [-x] & ; x<-2 \\ |x-\frac{1}{a}| & x \geq -2 \end{cases}$ در $x=-2$ پیوسته باشد، آنگاه مقدار

$f(a)$ کدام است؟ ۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{17}{4}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

حل: شرط پیوستگی را در $x=-2$ برای $f(x)$ اعمال می‌کنیم $\Leftarrow$

$\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = [-(-2)^-] = 2$ نکته $\Leftarrow$ وقتی $x\to a^+$ آنگاه $-x\to(-a)^-$

و وقتی $x\to a^-$ آنگاه $-x\to(-a)^+$

مثلاً در این سؤال چون $x\to(-2)^-$ پس $-x\to 2^+$ پس $\lim_{x\to(-2)^-}[-x]=[2^+]=2$

ادامه حل سؤال ← $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} \left|x-\frac{1}{a}\right| = \left|-2-\frac{1}{a}\right| = f(-2)$

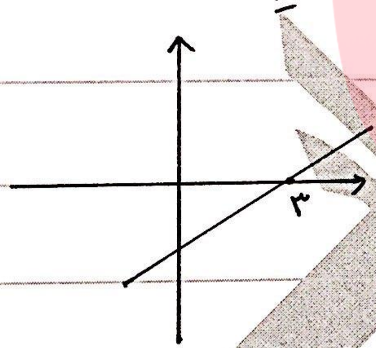
حال چون تابع $f(x)$ در $x=-2$ پیوسته است پس ← $\left|-2-\frac{1}{a}\right| = 2$

$\to -2-\frac{1}{a} = 2 \to \frac{1}{a} = -4 \to a = -\frac{1}{4}$

$\to -2-\frac{1}{a} = -2 \to \frac{1}{a} = 0 \to$ غ ق ق

$\underbrace{f(a)=f(-\frac{1}{4})}_{\text{از ضابطه‌ی پایینی } f(x) \text{ باید استفاده کنیم}} = |x-(-4)| = |x+4| = \left|-\frac{1}{4}+4\right| = \boxed{\frac{15}{4}}$

مثال (۱۸): نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x+b}{x-a} & x\neq a \\ -5 & x=a \end{cases}$ به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



۱) -4 ۲) -5 ۳) -7 ۴) -8

حل: اولاً با توجه به نمودار در می‌یابیم $f(3)=0$

پس ← $f(3) = \frac{x^2-x+b}{x-a} = \frac{9-3+b}{3-a} = 0$

$\to \frac{6+b}{3-a} = 0 \to \boxed{b=-6}$

از طرفی همانطور که از نمودار مشخص است می‌بینیم تابع در تمامی نقاط پیوسته است پس در $x=a$ (که نقطه جزئی تابع است) هم پیوسته است. پس حد آن در $x=a$ و مقدار آن در $x=a$ می‌بایست با هم برابر باشد ←

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-x+b}{x-a} \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to a}\frac{2x-1}{1} = 2a-1$

$f(a) = -5 \to 2a-1 = -5 \to 2a = -4 \to \boxed{a=-2} \to \boxed{a+b=-8}$

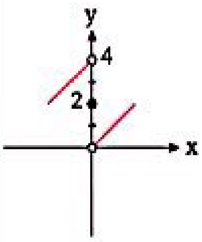
نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: ارزیابی حد و پیوستگی

شیوا اربابی

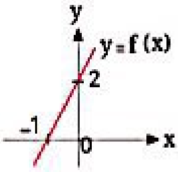
۱- اگر $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{2x-2}}{ax+b} = \dfrac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2



۲- اگر شکل زیر مربوط به تابع $g(x)$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}$ کدام است؟

① $-\infty$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{2}{\sqrt{2}-2}$ ④ -4

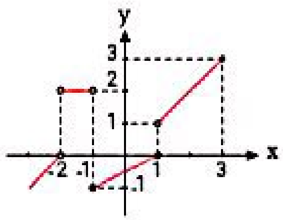


۳- با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)+2f^{-1}(x)}{x}$ کدام است؟

① 3 ② 1 ③ 4 ④ 2

۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x-1$ و $x+1$ به‌ترتیب 3 و -2 باشد، k کدام باشد تا $f(x) = p(x+1) - 2p(x+3) + x^2 - 2kx$ بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد؟

① $\dfrac{2}{3}$ ② $-\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $-\dfrac{3}{2}$



۵- نمودار تابع $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است. حاصل $\lim\limits_{x\to 3^-} f(-\dfrac{x}{3}) + \lim\limits_{x\to(-1)^-} [f(2x)]$ کدام است؟

① 1 ② 2

③ -2 ④ -1

۶- اگر $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{4x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، آنگاه حاصل ab کدام است؟

① -2 ② 2 ③ -4 ④ 4

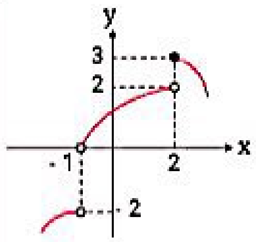
۷- اگر $f(x+2) = \dfrac{\cos \pi x}{1+\sin \pi x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ کدام است؟

① 0 ② -1 ③ 1 ④ $+\infty$

۸- اگر بازهٔ $(2-x \,,\, 1-4x)$ یک همسایگی برای ۱٫۴ و ۱٫۸ باشد، محدودهٔ x کدام است؟

① $(-0/2 \,,\, 0/6)$ ② $(-0/6 \,,\, 0/2)$ ③ $(-0/1 \,,\, 0/2)$ ④ $(-0/2 \,,\, 0/1)$

۹- اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد. حاصل $\lim\limits_{x\to 2^-} f(1-x)$ کدام است؟



۱) -1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) صفر

۱۰- اگر $f(x+\frac{\pi}{4})=\frac{[x]-1}{1-\tan x}$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x)$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) صفر ۲) $-\infty$ ۳) $+\infty$ ۴) -1

۱۱- در تابع $f(x)=\frac{[x+2]+k}{x-2}$، اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ باشد، محدودهٔ k کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $-4<k<-3$ ۲) $-3<k<-2$ ۳) $k<-4$ یا $k>-3$ ۴) $k<-3$ یا $k>-2$

۱۲- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) 2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱۳- حاصل حد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)}$ کدام است؟

۱) 24 ۲) 12 ۳) 8 ۴) 6

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} ([x]+[-x])\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{-2}{3}$ ۲) $\frac{-3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2+x-2|}{x-1} & ;x\neq 1\\ a & ;x=1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟

۱) هر مقدار a ۲) -3 ۳) 3 ۴) هیچ مقدار a

۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}[x]-3 & ;x<a\\ x^2-3x & ;x\geq a\end{cases}$، $a\in\mathbb{Z}$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)-\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=0$ باشد، $f(-\frac{a}{3})$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) 2 ۲) -2 ۳) -3 ۴) -4

۱۷- حد چپ تابع $f(x)=4[x]+3[-x]$ در نقطه‌ای به‌طول صحیح a، دو برابر حد راست تابع f در این نقطه است. a کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) 1 ۲) -1 ۳) -2 ۴) 2

۱۸- حد چپ تابع $f(x)=\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ در نقطه ی $x=3$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است)

۱) 1 ۲) -1 ۳) 0 ۴) ∞

ارزیابی حد و پیوستگی

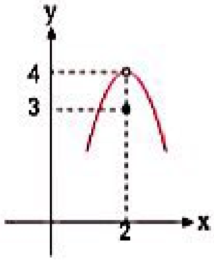
۱۹ - حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{12^x - 3^x + 4^x - 1}{16^x - 1}$، کدام است؟

① ۱　② ۳　③ ۴　④ ۱۲

۲۰ - حاصل $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{\tan^2 x}$ برابر کدام است؟

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{8}$　④ $\frac{1}{16}$

۲۱ - نمودار تابع f به صورت مقابل است. حاصل $2\lim\limits_{x\to 2}[f(x)] - \left[\lim\limits_{x\to 2} f(x)\right]$ کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)



① ۱　② ۲　③ ۳　④ ۴

۲۲ - حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos 2x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1}$ کدام است؟

① $-\frac{2}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{4}{3}$　④ $-\frac{4}{3}$

۲۳ - حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{4}} \dfrac{1+\cot x}{1+\tan x}$ کدام است؟

① -1　② 0　③ 1　④ $+\infty$

۲۴ - اگر $(3b-2a, 7) \cup (c, 2a+b)$ یک همسایگی محذوف عدد ۴ باشد، آنگاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی برای کدام‌یک از عددهای زیر است؟

① $\frac{3}{4}$　② $\frac{8}{3}$　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{9}{4}$

۲۵ - اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x)$ بر x^2+3x+2، $2x+1$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $p(x-1)-p(x-2)$ بر x کدام است؟

① ۱　② ۲　③ ۳　④ ۴

۲۶ - حاصل $\lim\limits_{x\to \pi^-} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}$ کدام است؟

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$　④ $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

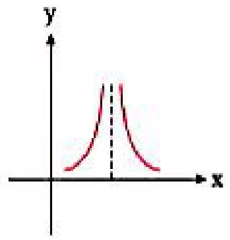
۲۷ - در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax + b\sqrt{x^2+3}}{x^2 - 3x + 2}$، اگر $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه حد تابع $g(x) = xf(x)$ وقتی $x \to -\infty$ کدام است؟

① 4　② -8　③ 8　④ -4

۲۸- حاصل $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \dfrac{\cos^3 x}{|\sin 2x - 2\cos x|}$ کدام است؟

① -1 ② صفر ③ 1 ④ $-\infty$

۲۹- شکل زیر بخشی از نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x+a}{4x^2+bx+1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



① $(0,4)$
② $(0,-4)$
③ $(-2,4)$
④ $(-2,-4)$

۳۰- حد عبارت $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ وقتی $x \to (\frac{\pi}{2})^+$، کدام است؟

① $+\infty$ ② 2 ③ 1 ④ $-\infty$

۳۱- اگر $f(x)=\dfrac{(m^2-1)x^4+(2m+3)x^3+2x^2-1}{mx+5}$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ باشد، مقدار m کدام است؟

① 1 ② هیچ مقداری برای m وجود ندارد. ③ ± 1 ④ -1

۳۲- اگر $\lim\limits_{x\to k^+} \dfrac{1-x}{x^2+x-12}=+\infty$ باشد، مقدار k کدام است؟

① فقط ۳ ② فقط -4 ③ ۳ یا -4 ④ وجود ندارد.

۳۳- مقدار $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{\tan^3 x}$ کدام است؟

① 1 ② -1 ③ $\dfrac{1}{4}$ ④ $-\dfrac{1}{4}$

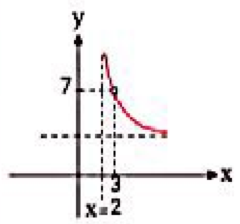
۳۴- اگر $f(x)=2x^3+ax^2+4x-3$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ کدام است؟

① $\dfrac{61}{4}$ ② $\dfrac{9}{2}$ ③ $\dfrac{25}{3}$ ④ $\dfrac{65}{4}$

۳۵- تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-[x]}$ در همسایگی محذوف چند نقطه به طول عدد صحیح تعریف شده است؟

① ۶ ② ۸ ③ ۷ ④ ۹

۳۶- اگر قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{2x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ مطابق شکل زیر باشد حاصل $ab+cd$ کدام است؟



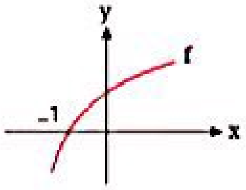
① -15 ② 15
③ 30 ④ -30

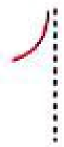
ارزیابی حد و پیوستگی

۳۷- حد عبارت $\dfrac{\sqrt{\tan x}-\sqrt{\frac{۱}{\tan x}}}{\cos ۲x}$ وقتی $x \to \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

① ۱ ② ۱− ③ ۲ ④ ۲−

۳۸- اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار تابع $g(x)=\sqrt{\dfrac{۲x+۱}{f(x)}}$ در اطراف $x=-۱$ به کدام صورت است؟



①  ② 

③  ④ 

۳۹- کدام یک از توابع زیر در همسایگی چپ $x=۰$ تعریف می‌شود، اما در همسایگی راست این نقطه تعریف نمی‌شود؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

① $y=\sqrt{x-[x]}$ ② $y=\dfrac{۱}{\sqrt{x-[x]}}$ ③ $y=\dfrac{۱}{[x]}$ ④ $y=\dfrac{۱}{[-x]}$

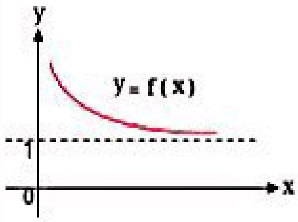
۴۰- اگر $\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=۲$ آنگاه a کدام است؟

① $a=۱$ ② $a=-۱$ ③ $a=۵$ ④ $a=-۵$

۴۱- اگر $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{|۳a|x^۵-ax^n+۷x^۲-۲}{۴x^۵+۱}=۱$، آنگاه مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ ۲ ④ ۴

۴۲- باتوجه به نمودار تابع $y=f(x)$، حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)}$ کدام است؟



① $-\frac{۱}{۲}$ ② ۱ ③ ۱− ④ $\frac{۱}{۲}$

۴۳- در تابع $f(x)=\dfrac{۳x-\sqrt{x^۲+۱۶x}}{ax^n+b}$ اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=۲$, $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=c$ باشند، آنگاه عدد حقیقی c کدام است؟ $(c\neq ۰)$

① $\frac{۲}{۳}$ ② $\frac{۳}{۲}$ ③ $\frac{۳}{۴}$ ④ $\frac{۴}{۳}$

۴۴- با شرط $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n^۲x^{m-۳}+nx+m}{mx^{-n+۳}+mx-۳}=۳$ ، $m>۴, n<۲$ مقدار $m-n$ کدام است؟

① صفر ② ۶ ③ ۹ ④ ۱۸

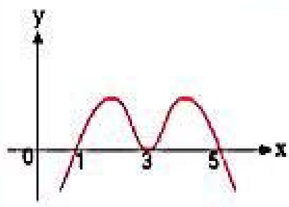
۴۵- اگر $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{ax-2}}{\sqrt[3]{3x-1}-2}=b$، حاصل $a+b$ کدام است؟

① $\frac{5}{2}$ ② ۴ ③ ۳ ④ صفر

۴۶- اگر $\lim_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$ باشد حاصل $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}$ کدام است؟

① $-\frac{1}{3}$ ② ۲ ③ -2 ④ $\frac{1}{3}$

۴۷- نمودار تابع f به صورت شکل روبه‌رو است. حاصل $\lim_{x\to 5}\dfrac{(-1)^{[x]}}{f(x)-f(x-2)}$ کدام است؟ ([ ]. نماد جزء صحیح است.)

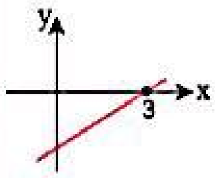


① $-\infty$
② ۱
③ -1
④ $+\infty$

۴۸- اگر $f(x)=\dfrac{ax^2+\sqrt{x^2+5x}}{-x^n-ax-1}$ و $\lim_{x\to -\infty}f(x)=1$ باشد، آنگاه حد راست و چپ تابع f در $x=1$ به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

① $+\infty$ و $+\infty$ ② $-\infty$ و $-\infty$ ③ $+\infty$ و $-\infty$ ④ $-\infty$ و $+\infty$

۴۹- نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x+b}{x-a} & ,x\neq a\\ -5 & ,x=a\end{cases}$ به صورت زیر است. $a+b$ کدام است؟



① -4 ② -5 ③ -7 ④ -8

۵۰- تابع $f(x)=[x^2]$ در بازهٔ $(-1,k)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است. بیش‌ترین مقدار k کدام است؟

① صفر ② ۱ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{3}$

۵۱- اگر $f(x)=\begin{cases}[-x] & ;x<-2\\ \left|x-\dfrac{1}{a}\right| & ;x\geq -2\end{cases}$، در $x=-2$ پیوسته باشد آنگاه مقدار $f(a)$ کدام است؟ ([ ]. نماد جزء صحیح است.)

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{17}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$

۵۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[4\sin^2\pi x\right]$ روی بازه‌ی $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

پاسخنامه تشریحی

۱ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{2x-2}}{ax+b}=\frac{0}{2a+b}\xrightarrow[\frac{0}{0}\text{ بوده که پس از رفع ابهام جوابش } \frac{1}{2} \text{ شده است}]{\text{چون جواب حد برابر عدد شده است پس این کسر حتما}} 2a+b=0$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{1-\frac{2}{2\sqrt{2x-2}}}{a}=\frac{1-\frac{2}{4}}{a}=\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}\to a=\frac{1}{2}\ ,\ b=-1$$

۲ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}=\frac{4-4}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{0}$$

عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{4-g(x)}{\sqrt{g(x)}-2}\times\frac{\sqrt{g(x)}+2}{\sqrt{g(x)}+2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(4-g(x))(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(g(x)-4)(\sqrt{g(x)}+2)}{g(x)-4}=\lim_{x\to 0^-}-(\sqrt{g(x)}+2)=-(\sqrt{4}+2)=-4$$

۳ ـ گزینه ۱ ابتدا با داشتن دو نقطه‌ی $B\Big|\begin{matrix}0\\2\end{matrix}$ و $A\Big|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}$ روی تابع $y=f(x)$ معادله‌ی آن را می‌نویسیم و سپس ضابطه‌ی معکوس آن را بدست می‌آوریم و می‌دانیم برای بدست آوردن ضابطه‌ی معکوس یک تابع، ابتدا رابطه‌ی را برحسب x بدست می‌آوریم و سپس x را به y و y را به x تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{y-y_A}{x-x_A}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\to\frac{y}{x+1}=\frac{0-2}{-1-0}=2\to y=f(x)=2x+2:y=f(x)$$ ضابطه‌ی تابع

$$y=2x+2\to 2x=y-2\to x=\frac{y-2}{2}\to f^{-1}(x)=\frac{x-2}{2}:y=f(x)$$ ضابطه‌ی معکوس تابع

پس: $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2f^{-1}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2+2(\frac{x-2}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2+x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$$

۴ ـ گزینه ۱ باقی ماندهٔ $p(x)$ بر $x-1$ برابر با ۳ می باشد، پس: $p(1)=3$

باقی ماندهٔ $p(x)$ بر $x+1$ برابر با -2 می‌باشد، پس: $p(-1)=-2$

باقی ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ برابر است با $f(-2)$، بنابراین:

$$f(-2)=p(-1)-2p(1)+4+6k=-2-6+4+6k=0\Rightarrow 6k=4\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

۵ ـ گزینه ۳

$$x\to 2^-:x<2\to\frac{x}{2}<1\to-\frac{x}{2}>-1$$

پس: $$\lim_{x\to 2^-}f(-\frac{x}{2})=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=-1$$

از طرفی: $$\lim_{x\to(-1)^-}[f(2x)]=[f((-2)^-)]=[0^-]=-1$$

توجه کنید وقتی x از سمت مقادیر کوچک تر از -2 به -2 نزدیک می شود y از سمت مقادیر کوچک تر از صفر به صفر نزدیک می شود.

بنابراین $$\lim_{x\to 2^-}f(-\frac{x}{2})+\lim_{x\to(-1)^-}[f(2x)]=-1+(-1)=-2$$

۶ ـ گزینه ۳ صورت کسر به ازای $x=\frac{1}{2}$ منفی است و چون جواب حد برابر $-\infty$ شده است بنابراین مخرج باید $^+0$ باشد پس حتماً $x=\frac{1}{2}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است یعنی مخرج به صورت $4(x-\frac{1}{2})^2$ است.

$$4(x-\frac{1}{2})^2 = 4(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 4x^2 - 4x + 1 \xrightarrow{\text{مقایسه با مخرج}} \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases} \to ab = -4$$

۷ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x+2)$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x}{1+\sin \pi x} = \frac{\cos \pi}{1+\sin \pi} = \frac{-1}{1+0} = -1$$

۸ ـ گزینه ۳ باید دو عدد ۱٫۴ و ۱٫۸ را در این بازه یعنی بازهٔ $(1-4x \ , \ 2-x)$ قرار داشته باشند پس داریم:

$$1-4x < 1.4 < 2-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-4x < 1.4 \Rightarrow -4x < 0.4 \Rightarrow x > -\frac{0.4}{4} \Rightarrow x > -0.1 \\ 2-x > 1.4 \Rightarrow 2-1.4 > x \Rightarrow x < 0.6 \end{cases} \Rightarrow -0.1 < x < 0.6 \quad (1)$$

$$1-4x < 1.8 < 2-x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-4x < 1.8 \Rightarrow -4x < 0.8 \Rightarrow x > -\frac{0.8}{4} \Rightarrow x > -0.2 \\ 2-x > 1.8 \Rightarrow 2-1.8 > x \Rightarrow x < 0.2 \end{cases} \Rightarrow -0.2 < x < 0.2 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -0.1 < x < 0.2$$

۹ ـ گزینه ۴

$$x \to 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow 1-x > -1$$

پس وقتی $x \to 2^-$ آنگاه $1-x \to (-1)^+$ و در نتیجه:

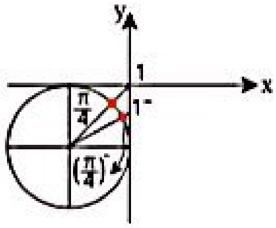
$$\lim_{x\to 2^-} f(1-x) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = f(-1^+) = 0$$

۱۰ ـ گزینه ۲

دقت کنید که $x + \frac{\pi}{4} = (\frac{\pi}{2})^- \to x = (\frac{\pi}{4})^-$ است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} f(x+\frac{\pi}{4}) = \lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^-} \frac{[x]-1}{1-\tan x} = \frac{0-1}{1-1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

دقت کنید: $\underbrace{\left[(\frac{\pi}{4})^-\right]}_{\text{بین صفر و یک}} = 0 \ , \ \tan(\frac{\pi}{4})^- = 1^-$



۱۱ ـ گزینه ۱ برای آنکه $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$ باشد، باید حد چپ و راست f، وقتی $x \to 2$ هر دو برابر $+\infty$ باشند، پس:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{[x+2]+k}{x-2} = \frac{[4^+]+k}{2^+-2} = \frac{4+k}{0^+} = +\infty$$

$$\xrightarrow{\text{باید صورت کسر مثبت باشد.}} k+4 > 0 \Rightarrow k > -4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{[x+2]+k}{x-2} = \frac{[4^-]+k}{2^--2} = \frac{3+k}{0^-} = +\infty$$

$$\xrightarrow{\text{باید صورت کسر منفی باشد.}} 3+k < 0 \Rightarrow k < -3$$

از اشتراک دو شرط بالا، داریم: $-4 < k < -3$.

۱۲ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos x})}{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})(1+\cos x)} = \frac{1}{2\times 2} = \frac{1}{4}$$

۱۳ ـ گزینه ۳ اگر صورت و مخرج جمعی صورت ضرب باشند و تعداد جملات آنها برابر باشد آن عبارت را به ضرب چند جمله تبدیل می‌کنیم و هر کدام را بطور جداگانه رفع ابهام می کنیم.

روش اول:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{\sqrt[3]{x}-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}\times\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)}=2\times 3=6$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt[3]{x}-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\times\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{0}{0}$$
$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=2\times 3=6$$

۱۴ ـ گزینه ۱ می‌دانیم که $[x]+[-x]=-1$ است.

$$\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}-\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}-\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^3 x}$$

در صورت از اتحاد مزدوج و در مخرج از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم.

$$=\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}-\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1+\sin^2 x-\sin x)}=\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}}\frac{-(1-\sin x)}{1+\sin^2 x-\sin x}=\frac{-(1+1)}{1+1+1}=\frac{-2}{3}$$

۱۵ ـ گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x=1$ بدست آوریم.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{|\overbrace{(x+2)(x-1)}^{+}|}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)}=3$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{|\overbrace{(x+2)(x-1)}^{-}|}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)}=-3$$

این تابع در $x=1$ پیوسته نمی‌باشد.

۱۶ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}(x^2-3x)=a^2-3a\quad,\quad\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^-}[x]-3=a-1-3=a-4$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a^+}f(x)-\lim_{x\to a^-}f(x)=0\Rightarrow a^2-3a-a+4=0\Rightarrow a^2-4a+4=0$$

$$\Rightarrow(a-2)^2=0\Rightarrow a=2\Rightarrow f(x)=\begin{cases}[x]-3 & ,x<2\\ x^2-3x & ,x\geq 2\end{cases}$$

$$f(-\frac{a}{2})=f(-\frac{2}{2})=[-\frac{2}{2}]-3=-1-3=-4$$

۱۷ ـ گزینه ۴

می‌دانیم که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ,x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ,x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ است.

ابتدا ضابطهٔ f را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=[x]+2([x]+[-x])\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x & ;x\in\mathbb{Z}\\ [x]-2 & ;x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=[a^-]-2=a-1-2=a-3\\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=[a^+]-2=a-2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{فرض سوال}}a-3=2a-5\Rightarrow a=2$$

۱۸ ـ گزینه ۲

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{(3-[x])\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\lim_{x\to 3^-}\frac{(3-\overbrace{[3^-]}^{2})\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3^-} \frac{\overbrace{|x-3|}}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

۱۹ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x \to 0} \frac{16^x - 4^x + 4^x - 1}{16^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{4^x(4^x - 1) + (4^x - 1)}{(4^x - 1)(4^x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{4^x + 1}{4^x + 1} = \frac{2}{2} = 1$$

۲۰ ـ گزینه ۲ روش اول:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 x} : \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \times \cos^2 x = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} \times \cos^2 x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \times \cos^2 x = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} \times \cos^2 x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x}{(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{\cos^2(0)}{(1 + \sqrt{\cos 0})(1 + \cos 0)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

روش دوم: می‌دانیم که $\lim_{u \to 0} (1 - \cos^m u) \sim \frac{u^2}{2} \times m$ و $\lim_{u \to 0} \tan^n u \sim u^n$ است.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^{\frac{1}{2}} x}{\tan^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{2} \times \frac{1}{2}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

۲۱ ـ گزینه ۲ در $x \to 2$ مقادیر تابع از پایین به ۴ نزدیک می‌شوند.

$$2 \lim_{x \to 2} [f(x)] - \left[\lim_{x \to 2} f(x)\right] = 2[4^-] - [4] = 2 \times 3 - 4 = 2$$

۲۲ ـ گزینه ۴

می‌دانیم که $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ است.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{2\sin^2 x + \sin x - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2(1 - 2\sin^2 x) - 1}{2\sin^2 x + 2\sin x - \sin x - 1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4\sin^2 x}{2\sin x(\sin x + 1) - (\sin x + 1)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{-(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}{(\sin x + 1)(2\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{-(2\sin x + 1)}{\sin x + 1} = \frac{-(2 \times \frac{1}{2} + 1)}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{-2}{\frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}$$

۲۳ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \to \frac{3\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)}{\tan x(1 + \tan x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

توجه کنید که $\tan \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = -1$ است.

۲۴ ـ گزینه ۳ توجه کنید $(a,b) \cup (b,c)$ یک همسایگی محذوف عدد b است.

با توجه به تساوی $(3b - 2a, 7) \cup (c, 2a + b) = (c, 2a + b) \cup (3b - 2a, 7)$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ 3b - 2a = 4 \end{cases} \Rightarrow 4b = 8 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2a + b = 4 \xrightarrow{b=2} a = 1$$

بازهٔ (a,b) برابر با $(1,2)$ است که با توجه به گزینه‌ها، یک همسایگی برای $\frac{4}{3}$ است.

۲۵ ـ گزینه ۲ با نوشتن رابطهٔ تقسیم داریم:

$$p(x) = (x^2 + 3x + 2)q(x) + 2x + 1 = (x+1)(x+2)q(x) + 2x + 1 \quad (1)$$

حال برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x-1) - p(x-2)$ بر x داریم:

$x = 0 \Rightarrow$ باقی مانده $= p(0-1) - p(0-2) = p(-1) - p(-2)$

$(1) \Rightarrow p(-1) = 0 + 2(-1) + 1 = -1 \quad , \quad p(-2) = 0 + 2(-2) + 1 = -3$

باقی مانده $= p(-1) - p(-2) = -1 - (-3) = 2$

۲۶ ـ گزینه ۴

می دانیم: $\boxed{\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\ ,\ 1+\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}}$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\tan 2x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\overbrace{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}^{+}}{\sin 2x}$$

$(\frac{\pi}{2})^-$ در ناحیه ی اول است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است.

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\sin x\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x\cdot\cos\frac{x}{2}}{2(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\cos x}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sqrt{2}\cos 2x}{4\sin\frac{x}{2}\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{4(1)(-1)}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

۲۷ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}=\underbrace{\frac{a+2b}{0}}_{\text{این کسر حتما }\frac{0}{0}\text{ بوده است}}\xrightarrow{\text{چون جواب حد عدد شده است بنابراین}}a+2b=0\to a=-2b$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax+b\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 1}\frac{a+b\frac{1(2x)}{2\sqrt{x^2+3}}}{2x-3}=\frac{a+\frac{b}{2}}{-1}$$

$$=-a-\frac{b}{2}=2b-\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}=2\to b=\frac{4}{3}\ ,\ a=-\frac{8}{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}xf(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx\sqrt{x^2+3}}{x^2-3x+2}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx\overbrace{|x|}^{-}}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2-bx^2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-b)x^2}{x^2}=a-b=\frac{-8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{-12}{3}=-4$$

۲۸ ـ گزینه ۳ می‌دانیم: $\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

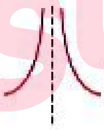
ابتدا باید مشخص کنیم که داخل قدر مطلق چه علامتی دارد.

$$|\sin 2x-2\cos x|=|2\sin x\cos x-2\cos x|=|2\cos x(\sin x-1)|$$

وقتی $x\to(\frac{\pi}{2})^-$ یعنی x در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی است و در این ناحیه، کسینوس مثبت است و $\sin(\frac{\pi}{2})^-=1^-$ است. بنابراین $\sin x-1$ مقداری منفی است در نتیجه داخل قدر مطلق، منفی است.

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos^3 x}{-2\cos x(\sin x-1)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\cos^2 x}{-2(\sin x-1)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1-\sin^2 x}{-2(\sin x-1)}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{2(1-\sin x)}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{1+\sin x}{2}=\frac{1+1}{2}=1$$

۲۹ ـ گزینه ۲ شکل تابع در اطراف ریشهٔ مضاعف مخرج به صورت  یا  است.

بنابراین مخرج باید دارای ریشهٔ مضاعف مثبت باشد.

$$\begin{cases}\Delta=0\to b^2-4ac=0\to b^2-16=0\to b=\pm 4\\ -\frac{b}{2a}>0\to-\frac{b}{8}>0\to b<0\end{cases}\to b=-4$$

چون جواب حد $+\infty$ شده پس صورت کسر به‌ازای ریشهٔ مخرج $(\frac{-b}{2a})$ یعنی $x=\frac{1}{2}$ باید یک عدد مثبت باشد.

$$2(\frac{1}{2})+a>0\to 1+a>0\to a>-1$$

گزینهٔ دوم می‌تواند صحیح باشد.

۳۰ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x}{(1-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

۳۱ ـ گزینه ۴ حالت ۱: اگر بزرگ‌ترین درجهٔ صورت چهار باشد داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(m^2-1)x^4}{mx} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{m^2-1}{m})x^3$$

حد فوق در $x \to +\infty$ و $x \to -\infty$ متفاوت می‌باشد زیرا:

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$$

چون حد تابع در $x \to \pm\infty$ فقط برابر $-\infty$ می‌باشد، پس نمی‌تواند بزرگ‌ترین درجهٔ صورت برابر چهار باشد.

حالت ۲: اگر بزرگ‌ترین درجهٔ صورت سه باشد داریم:

$$m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$m = 1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3+2x^2-1}{x+5} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^3}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 5x^2 = 5(\pm\infty)^2 = +\infty$$

پس $m = 1$ غیر قابل قبول است.

$$m = -1 \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+2x^2-1}{-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x\to\pm\infty} (-x^2) = -(\pm\infty)^2 = -\infty$$

بنابراین $m = -1$ قابل قبول است.

۳۲ - گزینه ۴ چون حاصل حد نامتناهی شده است، پس k می‌تواند یکی از ریشه های مخرج باشد. پس:

$$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3, -4$$

در هر دو حالت حد را حساب می‌کنیم:

$$1)\ x = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 3^+} \frac{1-x}{x^2+x-12} = \lim_{x\to 3^+} \frac{1-x}{(x-3)(x+4)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$2)\ k = -4 \Rightarrow \lim_{x\to(-4)^+} \frac{1-x}{x^2+x-12} = \lim_{x\to(-4)^+} \frac{1-x}{(x-3)(x+4)} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

پس برای k مقداری وجود ندارد.

۳۳ - گزینه ۱

$$\lim_{x\to0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{\tan^3 x} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin x - 2\sin x\cos x}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin x(1-\cos x)\cos^3 x}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2(1-\cos x)(1)^3}{(1-\cos^2 x)} = \lim_{x\to0} \frac{2(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{2}{2} = 1$$

۳۴ - گزینه ۴

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 4x - 3$$

چون $f(x)$ بر $x+1$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -2 + a - 4 - 3 = 0 \Rightarrow a = 9$$
$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 4x - 3$$

با تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+9x^2+4x-3 & x+1 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 \pm 2x^2} & 2x^2+7x-3 \\ 7x^2+4x-3 & \\ \underline{-7x^2 \pm 7x} & \\ -3x-3 & \\ \underline{\mp 3x \mp 3} & \\ 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(2x^2+7x-3) = 0 \Rightarrow x = -1\ ,\ 2x^2+7x-3 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

اگر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+7x-3 = 0$ را x_1 و x_2 بنامیم، داریم:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-\frac{7}{2})^2 - 2(\frac{-3}{2}) = \frac{49}{4} - 2(-\frac{3}{2}) = \frac{61}{4}$$

مجموع مجذورات صفرهای $f(x)$ $= (-1)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1 + \frac{61}{4} = \frac{65}{4}$

۳۵ - گزینه ۳ باید دامنهٔ تابع را بیابیم.

زیر رادیکال $\geq 0 \to 16 - x^2 \geq 0 \to x^2 \leq 16 \to -4 \leq x \leq 4$

مخرج $\neq 0 \to x - [x] \neq 0 \to [x] \neq x \to x \notin \mathbb{Z}$

پس: $D_f = [-4,4] - \mathbb{Z} = (-4,4) - \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

تابع در همسایگی محذوف نقاط $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ تعریف شده است.

$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \Rightarrow$ ۷ عدد

۳۶ - گزینه ۱ تابع در $x = 2$ ناپیوسته می‌شود بنابراین $x = 2$ ریشهٔ مخرج است.

$$x = 2 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 4 + 2c + d = 0 \to 2c + d = -4$$

تابع در $x = 3$ توخالی است بنابراین $x = 3$ ریشهٔ مخرج است.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{صدق در مخرج}} 9 + 3c + d = 0 \to 3c + d = -9$$

از حل دو معادله به جواب $c = -5$ و $d = 6$ می‌رسیم پس مخرج $x^2 - 5x + 6$ یا همان $(x-2)(x-3)$ است.

با توجه به شکل، تابع در $x = 3$ حدی برابر ۷ دارد.

$$x = 3 \to \frac{18 + 3a + b}{0} \xrightarrow[\text{جواب ۷ شده است.}]{\text{این کسر حتماً } \frac{0}{0} \text{ بوده که پس از رفع ابهام}} 18 + 3a + b = 0$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x + a + 6)}{(x-2)(x-3)} = \frac{12 + a}{1} = 7 \to a = -5, b = -3$$

پس $ab + cd = 15 - 30 = -15$ است.

برای آنکه متوجه شوید چگونه $2x^2 + ax + b$ را به صورت $(x-3)(2x + a + 6)$ نوشتیم باید توجه کنید که $2x^2 + ax + b$ را بر $x - 3$ تقسیم کردیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + ax + b & x - 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^2 + 6x} & 2x + a + 6 \\ (a+6)x + b & \\ \underline{-(a+6)x + 3a + 18} & \\ \underbrace{3a + 18 + b}_{\text{صفر است}} & \end{array} \to 2x^2 + ax + b = (x-3)(2x + a + 6)$$

و توجه کنید برای رفع ابهام از $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6}$ می‌توان از روش هوپیتال نیز استفاده کرد.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \to 3} \frac{4x + a}{2x - 5} = \frac{12 + a}{1} = 7 \to a = -5$$

۳۷ - گزینه ۲ می‌دانیم $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$ است.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \sqrt{\frac{1}{\tan x}}}{\cos 2x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\tan x} - \frac{1}{\sqrt{\tan x}}}{\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\tan x - 1}{\sqrt{\tan x}}}{\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1 - \tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-(1 - \tan x)(1 + \tan^2 x)}{\sqrt{\tan x}(1 + \tan x)(1 - \tan x)} = \frac{-(1+1)}{1(1+1)} = -1$$

۳۸ - گزینه ۱ ابتدا دامنهٔ تابع g را حساب می‌کنیم.

$$\frac{2x+1}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$+$
عبارت ≥ 0	$+$	ن	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{2}, +\infty)$$

باتوجه به دامنه، تابع g در همسایگی چپ $x = -1$ تعریف شده است، حال داریم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}\sqrt{\frac{2x+1}{f(x)}}=\sqrt{\frac{-2+1}{0^-}}=\sqrt{\frac{-1}{0^-}}=\sqrt{+\infty}=+\infty$$

۳۹ ـ گزینه ۳ دامنهٔ تابع مربوط به هر گزینه را می‌یابیم.

گزینهٔ ۱) $y=\sqrt{x-[x]}$: می‌دانیم $0\le x-[x]<1 \Rightarrow x\in \mathbb{R} \Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}$

گزینهٔ ۲) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-[x]}} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-[x]>0 \\ \text{می‌دانیم}:\ 0\le x-[x]<1\end{array}\right\} \Rightarrow x-[x]\ne 0 \Rightarrow [x]\ne x \Rightarrow x\notin \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ دامنهٔ تابع $=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$

گزینهٔ ۳) $y=\dfrac{1}{[x]}\ ,\ [x]=0 \Rightarrow 0\le x<1 \Rightarrow$ دامنه $=\mathbb{R}-[0,1)=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

با توجه به دامنه، تابع در همسایگی چپ $x=0$ تعریف شده است ولی در همسایگی راست این نقطه تعریف نشده است.

گزینهٔ ۴) $y=\dfrac{1}{[-x]}\ ,\ [-x]=0 \Rightarrow 0\le -x<1 \Rightarrow -1<x\le 0$

دامنه $=\mathbb{R}-(-1,0]=(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

۴۰ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to -3}\frac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=\lim_{x\to -3}\frac{a(x+3)(1+\sqrt{5x+16})}{(1-\sqrt{5x+16})(1+\sqrt{5x+16})}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{a(x+3)(2)}{-5(x+3)}=\frac{2a}{-5}=2 \Rightarrow 2a=-10 \Rightarrow a=-5$$

۴۱ ـ گزینه ۲ چون جواب حد، عددی غیرصفر شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید باهم برابر باشند.

حالت اول: وقتی $5<n$ است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|3a|x^5}{4x^5}=\frac{|3a|}{4}=1 \to |3a|=4 \to 3a=\pm 4 \to a=\pm\frac{4}{3}$$

حالت دوم: وقتی $5=n$ است.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|3a|x^5-ax^5}{4x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(|3a|-a)x^5}{4x^5}=\frac{|3a|-a}{4}=1$$

$$\to |3a|-a=4 \to \begin{cases} a\ge 0 \to 3a-a=4 \to 2a=4 \to a=2 \ \text{ق ق} \\ a<0 \to -3a-a=4 \to -4a=4 \to a=-1 \ \text{ق ق}\end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a برابر $\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+2-1=1$ است.

۴۲ ـ گزینه ۱

عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}\times\frac{f(x)+\sqrt{f(x)}}{f(x)+\sqrt{f(x)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f^2(x)-f(x)}{(1-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-f(x)(1-f(x))}{(1-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-f(x)}{f(x)+\sqrt{f(x)}}=\frac{-1}{1+\sqrt{1}}=\frac{-1}{2}$$

۴۳ ـ گزینه ۱

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)\xlongequal{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-\sqrt{x^2}}{ax^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-|\overset{-}{x}|}{ax^n}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{ax^n}\xlongequal{n=1}\frac{4}{a}=2$$

$\longrightarrow a=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{2x+b}=c \xrightarrow[\text{نیز باید صفر باشد تا جواب حد، صفر نشود.}]{\text{چون صورت صفر است مخرج}} 2x+b=0\to 4+b=0\to b=-4$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{2x-4}\times\frac{3x+\sqrt{x^2+16x}}{3x+\sqrt{x^2+16x}}=\lim_{x\to 2}\frac{9x^2-x^2-16x}{(2x-4)(3x+\sqrt{x^2+16x})}=\lim_{x\to 2}\frac{8x(x-2)}{2(x-2)(3x+\sqrt{x^2+16x})}$$

$$=\frac{16}{2(12)}=\frac{2}{3}=c$$

البته توجه کنید حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال نیز می‌توان محاسبه کرد.

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-\sqrt{x^2+16x}}{2x-4}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 2}\frac{3-\frac{1(2x+16)}{2\sqrt{x^2+16x}}}{2}=\frac{3-\frac{20}{12}}{2}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$$

۴۴ ـ گزینه ۴ چون جواب حد، عددی غیر از صفر شده است بنابراین بزرگترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند.

$m>4\to m-3>1\to$ بزرگترین توان x صورت برابر $m-3$ است

$n<2\to -n>-2\to -n+3>1\to$ بزرگترین توان x مخرج برابر $-n+3$ است.

بزرگترین توان x صورت $=$ بزرگترین توان x مخرج $\to m-3=-n+3\to m+n=6$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n^2\cdot x^{m-3}}{m\cdot x^{-n+3}}=\frac{n^2}{m}=3\to n^2=3m\to m=\frac{n^2}{3}$$

$$\xrightarrow{m+n=6}\frac{n^2}{3}+n=6\to n^2+3n-18=0\to(n+6)(n-3)=0$$

$$\to\begin{cases}n=-6\to m=12\to m-n=18\\ n=3\ \text{غ ق ق}\ (n<2)\end{cases}$$

۴۵ ـ گزینه ۴ چون مخرج کسر، به ازای $x=3$، صفر می‌باشد و حاصل حد نیز متناهی است، پس صورت کسر نیز باید به ازای $x=3$ صفر شود.

$$2-\sqrt{3a-2}=0\Rightarrow\sqrt{3a-2}=2\Rightarrow a=2$$

روش اول: $a=2$ را جایگذاری کرده، حد تابع را می گیریم.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{2x-2}}{\sqrt[3]{3x-1}-2}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 3}\frac{-\frac{2}{2\sqrt{2x-2}}}{\frac{3}{3\sqrt[3]{(3x-1)^2}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=-2\Rightarrow b=-2\Rightarrow a+b=0$$

روش دوم:

$$b=\lim_{x\to 3}\frac{2-\sqrt{2x-2}}{\sqrt[3]{3x-1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(2-\sqrt{2x-2})(2+\sqrt{2x-2})(\sqrt[3]{(3x-1)^2}+2\sqrt[3]{3x-1}+4)}{(\sqrt[3]{3x-1}-2)(\sqrt[3]{(3x-1)^2}+2\sqrt[3]{3x-1}+4)(2+\sqrt{2x-2})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(4-2x+2)(4+4+4)}{(3x-9)(2+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{-2(x-3)(12)}{3(x-3)(4)}=\frac{-24}{12}=-2\Rightarrow a+b=0$$

۴۶ ـ گزینه ۴

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b}=+\infty$$

حد صورت برابر ۳ است و چون حاصل حد $+\infty$ می‌باشد، پس باید $x=-3$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد و با توجه به اینکه ضریب x^2 در مخرج برابر یک است، یعنی مخرج همان عبارت $(x+3)^2$ می باشد.

$$x^2+2ax+b=(x+3)^2=x^2+6x+9$$

$$2a=6 \Rightarrow a=3, b=9$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^3+2x+5}{bx^3+x^2+7}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^3}{9x^3}=\frac{1}{3}$$

۴۷ ـ گزینه ۴ باید حد چپ و حد راست عبارت مورد نظر را در $x=5$ محاسبه کنیم، بنابراین داریم:

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 5^-}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)-f(x-4)}=\frac{(-1)^{[5^-]}}{f(5^-)-f(5^- -4)}=\frac{(-1)^4}{0^+-f(1^-)}$$

$$=\frac{1}{0^+-0^-}=\frac{1}{0^++0^+}=+\infty$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 5^+}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)-f(x-4)}=\frac{(-1)^{[5^+]}}{f(5^+)-f(5^+-4)}=\frac{(-1)^5}{0^--f(1^+)}$$

$$=\frac{-1}{0^--0^+}=\frac{-1}{0^-+0^-}=+\infty$$

بنابراین جواب حد داده شده برابر $+\infty$ است.

۴۸ ـ گزینه ۲ باید درجهٔ عبارت صورت و مخرج یکسان باشد تا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ شود.

بنابراین $n=2$ است. حال داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+\sqrt{x^4+5x}}{-x^2-ax-1}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+x^2}{-x^2}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{(a+1)x^2}{-x^2}=1\Rightarrow a+1=-1\Rightarrow a=-2$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{-2x^2+\sqrt{x^4+5x}}{-(x-1)^2}=\frac{-2+\sqrt{6}}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-2x^2+\sqrt{x^4+5x}}{-(x-1)^2}=\frac{-2+\sqrt{6}}{0^-}=-\infty$$

بنابراین حد راست و چپ تابع در $x=1$ برابر $-\infty$ است.

۴۹ ـ گزینه ۴ مقدار تابع در $x=3$ برابر صفر است بنابراین باید کسر $\dfrac{x^2-x+b}{x-a}$ به ازای $x=3$ صفر گردد.

$$x=3\to\frac{9-3+b}{3-a}=0\to 6+b=0\to b=-6$$

چون تابع همواره پیوسته است پس باید در $x=a$ نیز پیوسته باشد. از طرفی چون $f(a)=-5$ و $f(3)=0$ است پس $a\neq3$ است.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-x-6}{x-a}=\frac{0}{0}\longrightarrow a^2-a-6=0\Rightarrow\begin{cases}a=-2 & \text{ق.ق}\\ a=3 & \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

توجه کنید که چون مقدار کسر تابع به‌ازای $x=a$ صفر است ولی مقدار حد تابع برابر -5 است پس مقدار صورت تابع نیز صفر است.

پس $a+b=-8$ است.

۵۰ ـ گزینه ۳ می دانیم تابع $[x]$ (جزء صحیح) در نقاطی با طول صحیح ناپیوسته و در نقاطی با طول غیرصحیح پیوسته است. لذا با توجه به بازهٔ مطرح شده کافیست شرط پیوستگی را برای تابع $[x^2]$ در نقاطی که x^2 صحیح می‌شود بررسی کنیم یعنی نقاط ۰ و ۱ و $\sqrt{2}$.

تابع در این نقطه، پیوسته است.
$$\Rightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^-}f(x)=f(0)=0$$

$$x=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x^2\to1^+}[x^2]=1=f(1)\\ \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x^2\to1^-}[x^2]=0\end{cases}$$

تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

$$x=\sqrt{2}\Rightarrow x^2=2\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^+}f(x)=\lim\limits_{x^2\to 2^+}[x^2]=2=f(2)\\ \lim\limits_{x\to(\sqrt{2})^-}f(x)=\lim\limits_{x^2\to 2^-}[x^2]=1\end{cases}$$

تابع در این نقطه، ناپیوسته است.

روشن است که به ازای مقادیر $k>\sqrt{2}$، تعداد نقاط ناپیوستگی بیش از یکی خواهد بود، پس بیشترین مقدار k برابر $\sqrt{2}$ است.

۵۱ ـ گزینه ۱

با فرض پیوسته بودن $f(x)=\begin{cases}[-x] & , \quad x<-2\\ |x-\frac{1}{a}|, & x\geq -2\end{cases}$ در $x=-2$ داریم:

$$f(-2)=\lim_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim_{x\to(-2)^+}|x-\frac{1}{a}|=\left|-2-\frac{1}{a}\right|\overset{|f|=|-f|}{=\!=\!=}|2+\frac{1}{a}|$$

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{x\to(-2)^-}[-x]=\left[-(-2)^-\right]=\left[2^+\right]=2$$

شرط پیوستگی: $f(-2)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)\Rightarrow|2+\frac{1}{a}|=2\Rightarrow 2+\frac{1}{a}=\pm 2$

$$\Rightarrow\begin{cases}2+\frac{1}{a}=2\to\frac{1}{a}=0 \text{ :امکان ندارد}\\ 2+\frac{1}{a}=-2\Rightarrow\frac{1}{a}=-4\Rightarrow\frac{-1}{4}=a\end{cases}$$

$$f(a)=f(-\frac{1}{4})=|-\frac{1}{4}+4|=\frac{15}{4}$$

۵۲ ـ گزینه ۴ روش اول: تابع به فرم $y=[f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی پیوسته تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$0\leq x\leq\frac{1}{2}\to 0\leq\pi x\leq\frac{\pi}{2}\to 0\leq\sin^2\pi x\leq 1\to 0\leq 4\sin^2\pi x\leq 4$$

$$4\sin^2\pi x=0\to\sin\pi x=0\to\pi x=0\to x=0$$

$$4\sin^2\pi x=1\to\sin^2\pi x=\frac{1}{4}=\sin^2\frac{\pi}{6}\to\pi x=\frac{\pi}{6}\to x=\frac{1}{6}$$

$$4\sin^2\pi x=2\to\sin^2\pi x=\frac{1}{2}=\sin^2\frac{\pi}{4}\to\pi x=\frac{\pi}{4}\to x=\frac{1}{4}$$

$$4\sin^2\pi x=3\to\sin^2\pi x=\frac{3}{4}=\sin^2\frac{\pi}{3}\to\pi x=\frac{\pi}{3}\to x=\frac{1}{3}$$

$$4\sin^2\pi x=4\to\sin^2\pi x=1=\sin^2\frac{\pi}{2}\to\pi x=\frac{\pi}{2}\to x=\frac{1}{2}$$

ابتدای بازه‌ی بسته پیوستگی راست و انتهای بازه‌ی بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x=0$ پیوستگی راست دارد پس $x=0$ نقطه‌ی ناپیوستگی نمی‌باشد و تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه‌ی ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به‌صورت $\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$ است.

پاسخنامه کلیدی

۱- ۲	۹- ۴	۱۷- ۴	۲۵- ۲	۳۳- ۱	۴۱- ۲	۴۹- ۴
۲- ۴	۱۰- ۲	۱۸- ۲	۲۶- ۴	۳۴- ۴	۴۲- ۱	۵۰- ۳
۳- ۱	۱۱- ۱	۱۹- ۱	۲۷- ۴	۳۵- ۳	۴۳- ۱	۵۱- ۱
۴- ۱	۱۲- ۴	۲۰- ۲	۲۸- ۳	۳۶- ۱	۴۴- ۴	۵۲- ۴
۵- ۳	۱۳- ۳	۲۱- ۲	۲۹- ۲	۳۷- ۲	۴۵- ۴	
۶- ۳	۱۴- ۱	۲۲- ۴	۳۰- ۴	۳۸- ۱	۴۶- ۴	
۷- ۲	۱۵- ۴	۲۳- ۱	۳۱- ۴	۳۹- ۳	۴۷- ۴	
۸- ۳	۱۶- ۴	۲۴- ۳	۳۲- ۴	۴۰- ۴	۴۸- ۲	