فصل ۷ احتمال

یاد آوری

دو پیشامد
- **سازگارند**
  - مستقل: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$
  - نامستقل: $P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
- **ناسازگارند**
  - $A\cap B=\phi$: $P(A\cap B)=0$ ، $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۱۳۴) در جعبه‌ای ۶ لامپ سالم و ۴ لامپ معیوب وجود دارد. ۳ لامپ به تصادف و هم زمان خارج می‌کنیم، احتمال آن‌که لامپ‌ها از یک نوع باشند را بیابید.

☑پاسخ:

$$n(S)=\binom{10}{3}=120$$

$$n(A)=\binom{4}{3}\binom{6}{0}+\binom{6}{3}\binom{4}{0}=4+20=24 \quad\Rightarrow\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{24}{120}=\frac{8}{30}$$

۱۳۵) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می کنیم احتمال ان که یکی سفید و دیگری قرمز باشد چقدر است؟

☑پاسخ:

چون گفته متوالی و بدون جایگذاری از روش ضرب تناسب‌ها میریم.

اولی سفید دومی قرمز

$$P(D)=\frac{3}{14}\times\frac{5}{13}+\frac{5}{14}\times\frac{3}{13}$$

اولی قرمز دومی سفید

۱۳۶) احتمال قبولی کنکور نفر اول $\frac{2}{5}$ و احتمال قبولی نفر دوم $\frac{3}{7}$ است.

الف) احتمال اینکه فقط نفر دوم در کنکور قبول شود.

ب) احتمال اینکه هیچکدام قبول نشوند را بدست آورید.

☑پاسخ:

قبولی نفر اول ربطی به قبولی نفر دوم ندارد یعنی مستقل‌اند، هم چنین متمم این پیشامدها نیز مستقل‌اند

الف) $P(\text{فقط نفر دوم قبول شود})=P(\text{اولی قبول نشود و دومی قبول شود})=P(A')\times P(B)=(1-\frac{2}{5})\times\frac{3}{7}=\frac{9}{35}$

ب) $P(\text{هیچکدام قبول نشوند})=P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=(1-\frac{3}{7})(1-\frac{2}{5})=\frac{12}{35}$

۱۳۷) احتمال آن‌که شخص A تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۸ و احتمال آن‌که شخص B تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند ۰/۶ است، چقدر احتمال دارد:

الف) هر دو تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کنند.

ب) حداقل یکی از آنها تا ۲۰ سال دیگر ناراحتی قلبی پیدا کند.

☑پاسخ:

بیماری شخص A ربطی به بیماری شخص B ندارد یعنی از هم مستقل‌اند. هر دوی آن‌ها بعد از ۲۰ سال ناراحتی قلبی بگیرند یعنی اشتراک، حداقل یکی از آن‌ها ناراحتی بگیرد یعنی اجتماع.

الف) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{8}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{48}{100}$

ب) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)=\frac{8}{10}+\frac{6}{10}-(\frac{8}{10}\times\frac{6}{10})=\frac{92}{100}$

فرمول احتمال کل یا قانون جمع احتمال ها

اگر فضای نمونه ای S به پیشامد های $A_1, A_2 ......, A_{n-1}, A_n$ افراز شده باشد . یعنی :

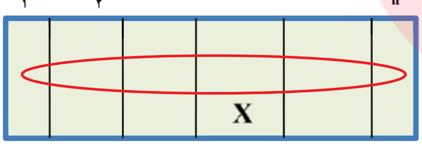
$$A_i \cap A_j = \phi$$
$$A_1 \cup A_2 \cup .... A_n = S$$

قانون جمع احتمال‌ها

در بعضی از مسایل احتمال، فضای نمونه ای به چند قسمت تقسیم می‌شوند. مثلاً مردان و زنان – ظرف‌ها و کیسه‌ها و....

فرض کنید $A_1, A_2, ..., A_n$ پیشامد هائی از فضای نمونه ای S باشند به طوری که $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = S$ و این پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند یعنی اشتراک نداشته باشند . و اگر X یک پیشامد دلخواه از S باشد در این صورت داریم از قانون جمع احتمال استفاده می شود . البته هنگامی که پیشامدی مانند X با چندین پیشامد دیگر مانند : $A_1, A_2, ..., A_n$ ((که فضای نمونه را افراز نموده اند)) اشتراک داشته باشد .

$$P(X) = p(A_1)p(x|A_1) + p(A_2)p(x|A_2) + ... + p(A_n)p(x|A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(X|A_i)$$



اگر فضای نمونه ای چند قسمتی باشه ، مثل زنان و مردان ، ظرف ها و کیسه های مختلف ، شهری و روستایی و کارخانه هاو دستگاه های مختلف ، حالت های متفاوت و ...... احتمال یه پیشامد مثل x در این فضا بخواهد از فرمول بالا به دست استفاده می کنیم

برای حل این مسایل می توانیم از نمودار درختی استفاده کنیم به طوری که اعداد موجود در هر شاخه از درخت را در هم ضرب نموده و اگر از شاخه‌ای به شاخه‌ی دیگر برویم اعداد آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

۱۳۸) ۶۰ درصد جمعیت کشوری را مردان که ۷۰ درصد آن ها با سوادند و بقیه جمعیت زنان ، با ۶۰ درصد سواد می باشند ، چند در صد این جمعیت باسواد هستند ؟

☑پاسخ:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$
$$P(B) = \frac{60}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{60}{100} = \frac{66}{100}$$

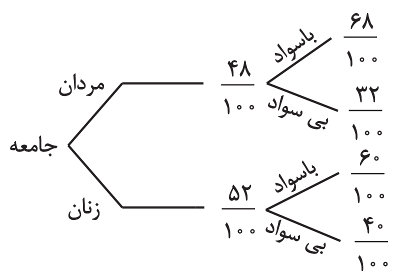
۱۳۹) طبق تحقیقات پزشکی احتمال تولد غیر طبیعی برای پسر $\frac{21}{100}$ و برای دختر $\frac{18}{100}$ است احتمال این که فرزند یک خانواده غیر طبیعی به دنیا بیاید چقدر ا ست ؟

☑پاسخ: اگر A پیشامد غیر طبیعی به دنیا آمدن فرزند ، A_1 پیشامد پسر بودن و A_2 پیشامد دختر بودن باشد ، داریم :

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{21}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{18}{100} = \frac{39}{200}$$

۱۴۰) ۵۲ ٪ جمعیت کشور را زنان و ۴۸ ٪ دیگر را مردان تشکیل می دهند اگر ۶۰ ٪ زنان و ۶۸ ٪ از مردان با سواد باشند چند درصد از افراد جامعه باسوادند؟

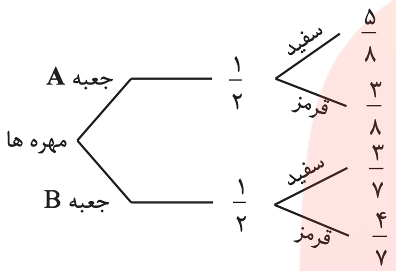
☑پاسخ:



$$P=\frac{۴۸}{۱۰۰}\times\frac{۶۸}{۱۰۰}+\frac{۵۲}{۱۰۰}\times\frac{۶۰}{۱۰۰}$$

۱۴۱) در جعبه A ، ۵ مهره سفید و ۳ مهره قرمز و در جعبه B ، ۳ مهره سفید و ۴ مهره قرمز وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب و از ان یک مهره خارج می‌کنیم چقدر احتمال دارد این مهره سفید باشد؟

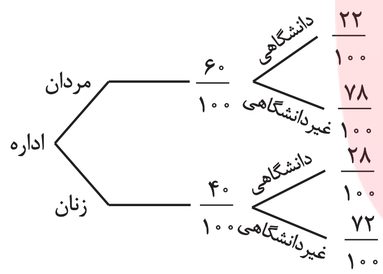
☑پاسخ:



$$P(\text{سفید بودن})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۷}$$

۱۴۲) در اداره‌ای ۶۰ ٪ کارمندان مرد، و ۲۲٪ آن ها تحصیلات دانشگاهی دارند. ۲۸ ٪ زنان این اداره نیز تحصیلات دانشگاهی دارند. اگر یک نفر از میان آن‌ها انتخاب شود چقدر احتمال دارد تحصیلات دانشگاهی نداشته باشد؟

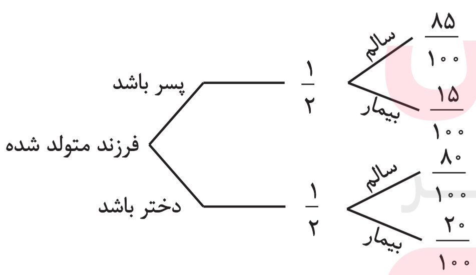
☑پاسخ:



$$P=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۷۸}{۱۰۰}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۷۲}{۱۰۰}$$

۱۴۳) انتقال نوعی بیماری ارثی از پدر مادر به فرزند پسر ۱۵ ٪ و به فرزند دختر ۲۰ ٪ است. والدینی که حامل این نوع بیماری‌اند انتظار فرزندی را دارند. احتمال آن‌که این فرزند سالم به دنیا بیاید را حساب کنید.

☑پاسخ:



$$P(\text{فرزند سالم})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۵}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۸۰}{۱۰۰}$$

۱۴۴) در جعبه A، ۲ مهره سفید ۳ مهره سیاه و در جعبه B، ۳ مهره سفید و ۴ مهره سیاه قرار دارد. از هر یک از این دو جعبه ۱ مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه دو مهره هم رنگ باشند کدام است؟

☑پاسخ:

$$P(\text{دو مهره هم رنگ})=P(\text{هر دو مهره سفید})+P(\text{هر دو سیاه})$$

$$P(\text{دو مهره هم رنگ})=\frac{۲}{۵}\times\frac{۳}{۷}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۷}=\frac{۱۸}{۳۵}$$

نکته

هر وقت در انتخاب‌های متوالی یکی از انتخاب‌ها مورد پرسش قرار نگیره یعنی از نتیجه‌ی یک آزمایش چیزی نگویند ما باید خودمون حالت‌های ممکن رو برای اون در نظر بگیریم یا این‌که فکر کنیم اصلاً اون آزمایش رخ نداده و احتمال موارد گفته شده رو حساب کنیم.

۱۴۵) در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شود با تصادف سه موش از بین آن ها انتخاب می شود . با کدام احتمال ، اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

☑پاسخ:

چون از رنگ موش دوم حرفی نزده یا حالت‌های ممکن برای اون رو حساب می‌کنیم مثل راه حل اول و یا مثل راه حل دوم انگار اتفاقی نیفتاده. احتمال‌های اول و سوم را حساب می‌کنیم و در هم ضرب می‌کنیم.

(راه اول) : $P_۱ = \frac{۵}{۸}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۳}{۶}+\frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷}\times\frac{۲}{۶}$

(راه دوم) : $P_۲ = \frac{۵}{۸}\times\frac{۳}{۷} = \frac{۱۵}{۵۶}$

۱۴۶) در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره دومین مهره خارج شده سفید است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

☑پاسخ:

(راه اول) : $P(A) = \frac{۶}{۱۵}\times\frac{۵}{۱۴}+\frac{۹}{۱۵}\times\frac{۶}{۱۴} = \frac{۸۴}{۱۵\times۱۴} = \frac{۲}{۵}$

(راه دوم) : $P(A) = \frac{۶}{۱۵} = \frac{۲}{۵}$

بدون در نظر گرفتن مهره اول فقط احتمال سفید بودن مهره دوم را حساب می‌کنیم. میبینی که جواب یکیه.

۱۴۷) دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می کنیم احتمال ان که یکی سفید و دیگری قرمز باشد چقدر است؟

☑پاسخ:

چون گفته متوالی و بدون جایگذاری از روش ضرب تناسب‌ها میریم.

اولی سفید دومی قرمز

$P(D) = \frac{۳}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۳}+\frac{۵}{۱۴}\times\frac{۳}{۱۳}$

اولی قرمز دومی سفید

۱۴۸) در کیسه ای ۶ مهره آبی و ۴ مهره قرمز وجود دارد اگر در سه اقدام به برداشتن مهره از کیسه کنیم به طوریکه در مرحله اول ۲ مهره در مرحله دوم ۳ مهره و در مرحله سوم ۵ مهره برداریم با کدام احتمال همه مهره های قرمز در مرحله سوم از کیسه خارج می شوند ؟

☑پاسخ:

در مرحله دوم هر سه سفید بیاد

$$P = \frac{\binom{۶}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} \times \frac{\binom{۴}{۳}}{\binom{۸}{۳}} \times \frac{\binom{۴}{۴}\binom{۱}{۱}}{\binom{۵}{۵}} = \frac{۱۵}{۴۵}\times\frac{۴}{۵۶}\times۱ = \frac{۱}{۴۲}$$

در مرحله اول هر دو سفید بیاد

در مرحله سوم چهار تا قرمز و یک مهره سفید بیاد