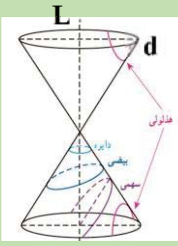
فصل ۶ هندسه

اگر خط d را حول محور L (که با آن متقاطع است) دوران دهیم. دو تا مخروط ایجاد می شود که در راس به هم متصل شده اند . حال اگر رویه مخروطی را با صفحه p قطع دهیم . موارد زیر رخ می دهد .



الف) صفحه p بر محور L عمود باشد . دایره حاصل می شود .

ب) صفحه p بر محور L عمود نباشد و موازی مولد d هم نباشد بیضی حاصل می شود .

ج) صفحه p موازی محور L مخروط باشد . هذلولی حاصل می شود .

د) صفحه p موازی مولد d باشد . سهمی حاصل می شود .

ه) صفحه p از راس دو مخروط بگذرد . نقطه حاصل می شود .

اگر کره را با یک صفحه قطع دهیم همواره سطح مقطع دایره خواهد بود .

اگر یک استوانه قائم را با یک صفحه قطع دهیم ممکن است مستطیل ، بیضی ، دایره ایجاد شود .

اگر پاره خطی حول محوری موازی خودش دوران کند سطح استوانه حاصل می شود .

اگر یک مستطیل حول یکی از اضلاعش دوران کند استوانه ساخته می شود .

اگر یک مربع یا لوزی حول یک قطر خود دوران کند دو مخروط حاصل می شود .

۱۲۳)جا های خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

۱ – شکل حاصل از دوران یک ربع دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک .... است .

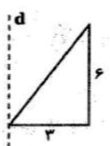
۲ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه ....است .

۳ – شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول وتر آن .... است .

۴ – اگر یک لوزی با طول قطر های ۶ و ۴ را حول قطر بزرگ آن دوران دهیم حجم شکل حاصل .... است .

۱) نیمکره ۲) مخروط ۳) دو مخروط هم قاعده ۴) دو مخروط هم قاعده به حجم 8π

۱۲۴) اگر مثلث قائم الزاویه شکل روبرو را حول خط d دوران دهیم حجم شکل حاصل را به دست آورید .



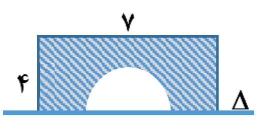
با این دوران حجم حاصل عملا تفاضل حجم استوانه از مخروط خواهد بود.

حجم مورد نظر

$$V = Vo - V_m = \pi(۳)^۲(۶) - \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۶) = ۳۶\pi$$

حجم استوانه حجم مخروط

۱۲۵)در شکل مقابل حجم حاصل از دوران شکل ، حول خط Δ هنگامی که قطر نیم دایره ۴ باشد را به دست آورید.



با این دوران حجم حاصل عملاً تفاضل حجم استوانه ای با شعاع ۴ و ارتفاع ۷ و یک کره با شعاع ۲ خواهد بود .

حجم مورد نظر

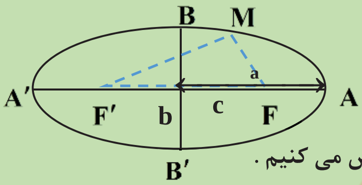
$$V = Vo - V_k = \pi(۴)^۲(۷) - \frac{۴}{۳}\pi(۲)^۳ = \pi(\frac{۳۰۴}{۳})$$

حجم استوانه حجم کره

بیضی

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آن ها از دو نقطه ثابت (کانون ها F , F') مقدار ثابت $2a$ است که $2a$ طول قطر بزرگ یا کانونی بیضی نامیده می شود .

$$\underbrace{AA'=2a}_{\text{قطر کانونی}} \quad , \quad \underbrace{BB'=2b}_{\text{قطر نا کانونی}} \quad , \quad \underbrace{FF'=2c}_{\text{فاصله کانونی}} \quad , \quad MF+MF'=2a \quad , \quad a^2=b^2+c^2$$



در شکل مقابل

۱) نقاط F و F' را کانون های بیضی می گوییم .

۲) فاصله بین دو کانون را که مقدار ثابتی ا ست فاصله کانونی بیضی می گوییم و آن را برابر $F'F=2c$ فرض می کنیم .

۳) پاره خط $A'A$ را قطر بزرگ و محور کانونی و پاره خط $B'B$ را قطر کوچک و محور نا کانونی می گوییم .

مختصات نقاط مهم در بیضی افقی

$$O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} \quad A\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{matrix} \quad A'\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{matrix} \quad F\begin{vmatrix}\alpha+c\\ \beta\end{matrix} \quad F'\begin{vmatrix}\alpha-c\\ \beta\end{matrix} \quad B\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+b\end{matrix} \quad B'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-b\end{matrix}$$

و

$$O=\frac{A+A'}{2}=\frac{B+B'}{2}=\frac{F+F'}{2}$$

مختصات نقاط مهم در بیضی قائم

$$O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{matrix} \quad A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{matrix} \quad A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{matrix} \quad F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+c\end{matrix} \quad F'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-c\end{matrix} \quad B\begin{vmatrix}\alpha+b\\ \beta\end{matrix} \quad B'\begin{vmatrix}\alpha-b\\ \beta\end{matrix}$$

و

$$O\begin{vmatrix}\alpha=\dfrac{x_A+x_{A'}}{2}=\dfrac{x_B+x_{B'}}{2}=\dfrac{x_F+x_{F'}}{2}\\ \beta=\dfrac{y_A+y_{A'}}{2}=\dfrac{y_B+y_{B'}}{2}=\dfrac{y_F+y_{F'}}{2}\end{matrix}$$

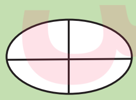
خروج از مرکز : در هر بیضی نسبت $e=\frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می گویند .

$$0<FF'<MF+MF' \Rightarrow 0<2c<2a \Rightarrow 0<\frac{c}{a}=e<1$$

if $e\to 1$

خروج از مرکز چاقی و لاغری بیضی را نشان می دهد هرچه کمتر چاق تر

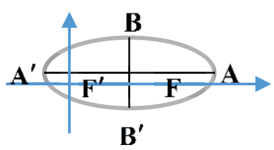
if $e\to 0$



۱۲۶) کانون های یک بیضی $F(14,2)$, $F'(2,2)$ هستند و خروج از مرکز آن $\frac{3}{5}$ است . B, B', A, A' را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید .

$$O=\frac{F+F'}{2} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha=\dfrac{2+14}{2}=8\\ \beta=\dfrac{2+2}{2}=2\end{matrix} \quad , \quad 2c=|FF'|=\sqrt{(14-2)^2+(2-2)^2}=12 \Rightarrow c=6 \quad , \quad e=\frac{c}{a} \Rightarrow \frac{3}{5}=\frac{6}{a} \Rightarrow a=10$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{100-36}=8 \Rightarrow A\begin{vmatrix}8+10=18\\ 2\end{matrix} \quad A'\begin{vmatrix}8-10=-2\\ 2\end{matrix} \quad B\begin{vmatrix}8\\ 2+8=10\end{matrix} \quad B\begin{vmatrix}8\\ 2-8=-6\end{matrix}$$



۱۲۷) اگردر یک بیضی داشته باشیم $B(1,4)$, $F(5,2)$, $F'(-3,2)$ آنگاه خروج از مرکز بیضی را به دست آورید .

$$O=\frac{F+F'}{2} \Rightarrow O\begin{vmatrix}\alpha=\dfrac{-3+5}{2}=1\\ \beta=\dfrac{2+2}{2}=2\end{matrix} \quad , \quad \begin{cases}2c=|FF'|=5-(-3)=8 \Rightarrow c=4\\ B(\alpha,\beta+b)=(1,4) \Rightarrow 2+b=4 \Rightarrow b=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

دایره

معادله استاندارد دایره : معادله دایره ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع R به صورت : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ است .

معادله فرم گسترده دایره : اگر معادله فرم استاندارد دایره را بسط دهیم و مرتب بنویسیم فرم گسترده معادله دایره را خواهیم داشت . $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در این حالت داریم :

$$\begin{cases} a=-2\alpha \\ b=-2\beta \\ c=\alpha^2+\beta^2-R^2 \end{cases} \Rightarrow O\begin{cases} \alpha=\dfrac{-a}{2} \\ \beta=\dfrac{-b}{2} \end{cases} \quad , \quad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$$

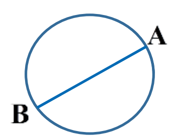
۱) در فرم گسترده باید ضرائب x^2 , y^2 برابر باشند و همواره باید : $a^2+b^2-4c>0$

۲) برای نوشتن معادله دایره داشتن مختصات مرکز و شعاع دایره الزامی است مگر آنکه در مسئله اطلاعاتی بدهند که بتوان آنها را محاسبه کرد .

۳) در نوشتن و حل مسائل دایره از رسم کردن غافل نشوید به خصوص هنگامی که ایده خاصی ندارید و چیزی به ذهنتان نمی رسد پیاده کردن داده های مسئله روی شکل راه حل را به ذهن ما القاء می کند .

۴) در بعضی از سوالات میگه مرکز دایره روی خط $y=mx+n$ قرار داره ویا میگه $y=mx+n$ معادله یک قطر دایره است . در این سوالات مرکز را به صورت $O\begin{cases}\alpha \\ \beta=m\alpha+n\end{cases}$ نشان دهید .

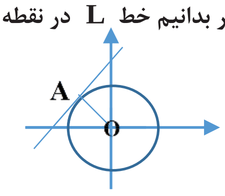
۱۲۸) معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(2,4)$, $B(-2,2)$ دو سر یک قطر آن باشند .



$$O=\frac{A+B}{2} \Rightarrow O\begin{cases} \alpha=\dfrac{-2+2}{2}=0 \\ \beta=\dfrac{2+4}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow R=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(2+2)^2+(4-2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$$

$$(x-0)^2+(y-3)^2=5$$

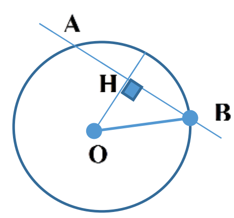
۱۲۹) اگر بدانیم خط L در نقطه $(-3,4)$ بر دایره ای به مرکز مبداء مختصات مماس است . معادله خط مماس را بنویسید .



$$M_{OA}=\frac{4}{-3} \Rightarrow M'=\frac{3}{4} \Rightarrow L_A: y-4=\frac{3}{4}(x+3)$$

۱۳۰) دایره ای به مرکز $O(1,-1)$ خط $\frac{3}{2}x-2y+4=0$ را در دو نقطه قطع می کندو طول وتر ایجاد شده ۸ است معادله این دایره را بنویسید .

خطی که از مرکز دایره بر وتر وارد و بر آن عمود باشد آن را نصف می کند.



$$OH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|\frac{3}{2}+2+4\right|}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}}=\frac{7/5}{\frac{5}{2}} \Rightarrow OH=\frac{15}{5}=3$$

$$R^2=OH^2+(4)^2=9+16=25 \Rightarrow R=5 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=25$$

وضعیت دو دایره

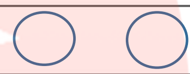
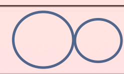
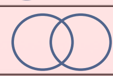
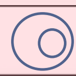
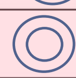
روش حل مسئله

۱- مختصات مراکز دو دایره و همچنین شعاع هریک را به تعیین کنید .

۲- فاصله دو مرکز دایره یعنی $d=|O_۱O_۲|$ را حساب کنید .

۳- $R_۱+R_۲$, $|R_۱-R_۲|$ را محاسبه کنید .

۴ - d را با $R_۱+R_۲$, $|R_۱-R_۲|$ مقایسه کنید .

	متخارج	$d>R_۱+R_۲$
	مماس خارج	$d=R_۱+R_۲$
	متقاطع	$\|R_۱-R_۲\|<d<R_۱+R_۲$
	مماس داخل	$d=\|R_۱-R_۲\|$
	متداخل	$d<\|R_۲-R_۱\|$
	هم مرکز	$d=۰$

۱۳۱) دو دایره به معادلات : $\begin{cases} x^۲+y^۲-۴x+۸y+۱۹=۰ \\ x^۲+y^۲-۴x+۴y-۱=۰ \end{cases}$ نسبت به هم چگونه اند ؟

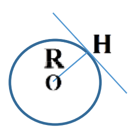
۱) $O_۱(۲,-۴)$, $R_۱=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۶۴-۷۶}=۱$

۲) $O_۲(۲,-۲)$, $R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶+۴}=۳$, $\begin{cases} R_۱+R_۲=۴ \\ |R_۱-R_۲|=۲ \end{cases} \Rightarrow d=|R_۱-R_۲|=۲$ مماس داخل اند

۳) $d=|O_۱O_۲|=\sqrt{(۲-۲)^۲+(-۲+۴)^۲}=۲$

۱۳۲) وضعیت خط به معادله $۳x+۴y+۷=۰$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ چگونه است .

$O\Big|_{۰}^{۱}$, $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۲}=۲$, $OH=\frac{|۳+۷|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲ \Rightarrow OH=R$ خط و دایره بر هم مماس اند



۱۳۳) وضعیت دو دایره $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$, $x^۲+y^۲-۲x-۸y+۱۳=۰$ نسبت به هم را تعیین کنید .

$o_۱\Big|_{۱}^{۱}$, $R_۱=۲$, $o_۲\Big|_{۴}^{۱}$, $R_۲=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۶۴-۵۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶}=۲$

$d=|o_۱o_۲|=|۴-۱|=۳$, $R_۱+R_۲=۲+۲=۴$, $|R_۱-R_۲|=۰$ $|R_۱-R_۲|<o_۱o_۲=d<R_۱+R_۲$

دو دایره متقاطع اند .