فصل ۳ حد

بخش پذیری

فرض کنید $p(x)$, $g(x)$ دو چند جمله ای با شند در این صورت چند جمله ای های منحصر به فرد $r(x), q(x)$ وجود دارند به طوری که $p(x)=g(x)q(x)+r(x)$
$p(x)$ را مقسوم و $g(x)$ را مقسوم علیه و $q(x)$ را خارج قسمت و $r(x)$ را باقی مانده می نامند .

اگر $p(x)$ از درجه n و مقسوم علیه $g(x)$ از مرتبه m باشد آنگاه خارج قسمت $q(x)$ از درجه $(n-m)$ و باقی مانده $r(x)$ حداکثر از درجه ی $(m-1)$ ا ست .

مثال

$p(x)$ مقسوم ؛ درجه ۴　　$g(x)$ مقسوم علیه ؛ مرتبه ۱

$$\begin{array}{l|l} x^4-2x+1 & x-1 \\ \hline -(x^4-x^3) & x^3+x^2+x-1 \\ x^3-2x+1 & \\ -(x^3-x^2) & \\ x^2-2x+1 & \\ -(x^2-x) & \\ -x+1 & \\ -(-x+1) & \\ 0 & \end{array}$$

$q(x)$ خارج قسمت ؛ مرتبه ۳

$r(x)$ باقیمانده صفر شده یعنی بخش پذیراست

نکته

۱) اگر $p(x)$ یک چند جمله ای آنگاه باقی مانده تقسیم ، $p(x)$ بر $g(x)=x-a$ برابر ا ست با : $p(a)$

۲) برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $(ax+b)$ ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه آن را بدست آورده و در مقسوم به جای x قرار می دهیم آنگاه داریم : $r=p\left(\frac{-b}{a}\right)$ بدیهی ا ست که اگر $r=0$ باشد ، $p(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر ا ست

۵۹) مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x)=2x^3-kx^2-x+3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد .

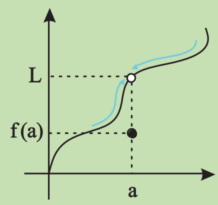
✍) $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-k(-1)^2-(-1)+3=0 \Rightarrow k=2$

۶۰) مقدار k را طوری تعیین کنید که عبارت $8x^3+4x^2-kx-8$ بر $2x-1$ بخش پذیر با شد ؟

✍) $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right)=8\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^2-k\left(\frac{1}{2}\right)-8=0 \Rightarrow k=-12$

مفهوم حد

فرض کنید تابع $f(x)$ در یک همسایگی متقارن محذوف نقطه‌ی $x=a$ تعریف شده باشد، آن‌گاه می‌گوئیم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ حد دارد و مقدار آن L است هر وقت با میل کردن x به سمت a مقادیر $f(x)$ هم به سمت عدد معین L میل کند. در واقع حد یعنی رفتار تابع در مجاورت نقطه a و اصلاً ربطی به مقدار تابع در نقطه a ندارد.



– **حد راست:** اگر x از طرف راست به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند L_1 نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد راست دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L_1$$

– **حد چپ:** اگر x از طرف چپ به سمت a میل کند و تابع $f(x)$ به عددی مانند L_2 نزدیک شود، می‌گوئیم تابع f در نقطه‌ی a حد چپ دارد و به صورت روبه‌رو نشان می‌دهیم:

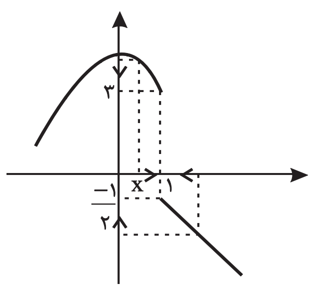
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L_2$$

بررسی حد تابع از روی نمودار:

برای تعیین حد تابع از روی نمودار به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا چند نقطه روی محور x ها در سمت راست نقطه a انتقاب می‌کنیم از این نقاط از راست به چپ خطوطی عمود بر محور xها خارج می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را با نمودار تابع به دست آورده و از نقاط تقاطع به محور y ها عمود می‌کنیم. با این کار رفتار y تابع هنگامی که xها به a از سمت راست نزدیک می‌شوند را مشاهده می‌کنیم. همین کار را از سمت چپ نقطه a انجام می‌دهیم اگر شاخه‌هایی سمت چپ و راست نمودار f در $x=a$ به عرض L روی محور y ها برسند آن‌گاه تابع در نقطه a حد دارد.

۶۱) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{-1}{2}x & x\geq 1 \\ 4-x^2 & x<1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x=1$ بررسی کنید.



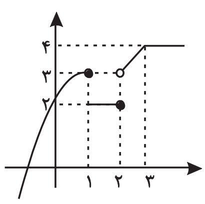
☑پاسخ:

تابع در این نقطه حد ندارد زیرا:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{2}x=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} 4-x^2=4-1=3$$

۶۲) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. حاصل عبارت $3\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)+2f(3)$ را به دست آورید.

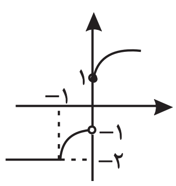


☑پاسخ:

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=3$ $\qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=3$ $\qquad f(3)=4$

$$3\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 1^-} f(x)+2f(3)=3(3)-(3)+2(4)=14$$

۶۳) با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را به دست آورید.



☑پاسخ :

$\lim_{x\to -1} f(x)=-2$ $\qquad \lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$

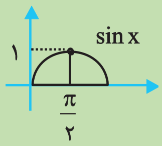
$\lim_{x\to 0^-} [f(x)]=[-1^-]=-2$ $\qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

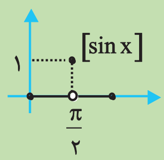
صفر مطلق

اساساً صفرمطلق یعنی تابع ای در تمامی یک بازه همواره صفر باشد یعنی به ازای x های یک بازه $f(x)=0$ می‌شود. مثلاً صفری که به وسیله براکت ساخته شود صفر مطلق است.

$$\begin{cases} 1^- \cong \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow \left[1^-\right] = 0 \text{ صفر مطلق} \\ 0^+ \cong \quad 0 \le x < 1 \Rightarrow \left[0^+\right] = 0 \text{ صفر مطلق} \end{cases}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [\sin x] = 0$$





$$\lim_{x\to 0^+}[\sin x] = [\sin 0^+] = [0^+] = 0$$

تو یه بازه این تابع صفره. بنابراین صفرش مطلقه .

حدود توابع کسری

برای محاسبه حد توابع کسری به نکات زیر توجه داریم:

اگر صورت و مخرج کسر صفر نشه که خیلی راحته. مقدار گذاری می‌کنیم. خلاص

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

اما اگه فقط مخرج صفر حدی بشه و صورت عدد ناصفر، جواب حد بی نهایت میشه.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L \ne 0}{\underbrace{0}_{\text{صفر حدی}}} = \infty$$

اگه صورت و مخرج هر دو صفر بشن حالت‌های زیر رخ میده:

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}} = 0$$

$$\lim_{x\to a} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 \quad \text{صفر مطلق}}{0 \quad \text{صفر مطلق}} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0 \quad \text{صفر حدی}}{0 \quad \text{صفر حدی}} = \text{ابهام}$$

اگر حد ابهام $\frac{0}{0}$ داشت، باید آن را رفع ابهام کنیم که روش‌های رفع ابهام را خواهیم گفت .

۶۴) حاصل حدود $1)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}}$ و $2)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ را به دست آورید.

☑ پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}}{2-\sqrt{x}} = \frac{4}{2-\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$2)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+1}{(x-2)^2} = \frac{5}{(0^\pm)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

هر چند حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده‌اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند، تابع در این نقطه حد ندارد.

۶۵) حاصل حدود روبه‌رو را محاسبه کنید: $1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x}$ $\quad 2)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{[x]-1}$

☑ پاسخ:

$$1)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{0 \text{ مطلق}}{0 \text{ حدی}} = 0$$

$$2)\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{[x]-1} = \frac{x-1}{[1^+]-1} = \frac{0 \text{ حدی}}{0 \text{ مطلق}} \quad \boxed{\text{وجود ندارد}}$$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

روش حل مسئله

سوالات ابهام‌دار

۱) در ابتدای کار ابهام $\frac{0}{0}$ را بیان کنید و بنویسید.

۲) عامل ابهام در $x=a$ ، $(x-a)$ می‌باشد. که باید آن را از صورت و مخرج فاکتور بگیریم و ساده کنیم. (به این کار می‌گن رفع ابهام)

۳) پس از ساده کردن ، مقدار $x=a$ را جایگذاری کنید و حد را به دست آورید.

۴) در هر مرحله $\lim$ یادت نره.

هرگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ بشه اصطلاحاً می‌گویند حد ابهام صفر صفرم داره، معنیش این که عامل $(x-a)$ یعنی عامل صفر کننده هم در صورت و هم در مخرج وجود داره و باعث ابهام $\frac{0}{0}$ می شه. برای رفع ابهام یکی از روش‌های زیر را استفاده می‌کنیم.

از عامل $(x-a)$ هم در صورت و هم در مخرج فاکتور می‌گیریم و پس از ساده نمودن مقدارگذاری می‌کنیم. (در توابع چند جمله‌ای خطی بیشتر کاربرد داره)

۶۶) حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$ ۲) $\lim\limits_{t\to -1}\frac{t+1}{t^3+1}$ ۳) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}$

☑پاسخ:

وقتی $x\to 2$ عامل صفر $(x-2)$ میشه. در صورت و مفرج از اون فاکتور گرفتیم.

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$

اتحاد چاق و لاغر

۲) $\lim\limits_{t\to -1}\frac{t+1}{t^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{(t^2-t+1)}=\frac{1}{3}$

۳) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{3}$

۶۷) حد توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد و شهریور ۹۰)

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{3x^2-12}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{3(x+2)}=\frac{12}{12}=1$

۲) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{(x-3)(x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{2}{(x+3)}=\frac{1}{3}$

نکته

نکته : اگر تجزیه صورت و مخرج برای یافتن عامل ابهام مشکل باشد می توانیم با تقسیم هر کدام بر $(x-a)$ آن را تجزیه کنیم.

۶۸) حدود توابع زیر را تعیین کنید.

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}\qquad ۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-x^۲-x-۲}{x^۴-۲x^۳-x^۲+۲x}\qquad ۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۲x+۱}{۲x^۲-۳x+۱}$$

☑پاسخ:

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲x-۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{\cancel{(x+۱)}(x^۲-x-۱)}{\cancel{(x+۱)}(x-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۲-x-۱}{x-۱}=\frac{۱}{-۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-x^۲-x-۲}{x^۴-۲x^۳-x^۲+۲x}=\lim_{x\to ۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۲)}(x^۳-x)}=\frac{۴+۲+۱}{۸-۲}=\frac{۷}{۶}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۱}\frac{x^۴-۲x+۱}{۲x^۲-۳x+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x^۳+x^۲+x-۱)}{\cancel{(x-۱)}(۲x-۱)}=\frac{۲}{۱}=۲$$

$$\begin{array}{l|l}
x^۴-۲x+۱ & x-۱ \\ \hline
-(x^۴-x^۳) & x^۳+x^۲+x-۱ \\
x^۳-۲x+۱ & \\
-(x^۳-x^۲) & \\
x^۲-۲x+۱ & \\
-(x^۲-x) & \\
-x+۱ & \\
-(-x+۱) & \\
۰ &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
۲x^۲-۳x+۱ & x-۱ \\ \hline
-(۲x^۲-۲x) & ۲x-۱ \\
-x+۱ & \\
-(-x+۱) & \\
۰ &
\end{array}$$

روش حل مسئله

۲) هرگاه صورت یا مخرج عامل ابهام رادیکالی داشته باشد (مثلا: $(\sqrt{x}-\sqrt{a})$) صورت و مخرج را در مزدوج عامل رادیکالی ضرب می کنیم پس از گویا و ساده کردن رفع ابهام نموده، حد را به دست می‌آوریم.

مزدوج‌های مهم:

$$(x-a)(x+a)=x^۲-a^۲\qquad (\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})=x-a$$

$$(x\pm a)(x^۲\mp ax+a^۲)=x^۳\pm a^۳\qquad (\sqrt[۳]{x}\pm\sqrt[۳]{a})(\sqrt[۳]{x^۲}\mp\sqrt[۳]{x}\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{a^۲})=x\pm a$$

۶۹) حد زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۱۶}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}}{\cancel{(x-۴)}(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۱}{(x+۴)(\sqrt{x}+۲)}=\dfrac{۱}{۳۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲x-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{۲(x-۱)}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}}{۲\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱}{۲(\sqrt{x}+۱)}=\dfrac{۱}{۴}$

۷۰) حدود روبه رو را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^۲-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x-۲}{\sqrt{۲x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{\sqrt{۲x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲x-۴}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\cancel{(x-۲)}\left(\sqrt{۲x}+۲\right)}{۲\cancel{(x-۲)}}=\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sqrt{۲x}+۲}{۲}=۲$

۲) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{x^۲-۶۴}{\sqrt[۳]{x}-۲}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{(x-۸)(x+۸)}{\left(\sqrt[۳]{x}-۲\right)}\times\dfrac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}=\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\cancel{(x-۸)}(x+۸)\left(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴\right)}{\cancel{(x-۸)}}=۱۹۲$

۳) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{۹-x^۲}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{۳x+۷}-۴}{(۳-x)(۳+x)}\times\dfrac{\sqrt{۳x+۷}+۴}{\sqrt{۳x+۷}+۴}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳x-۹}{(۳-x)(۳+x)(۸)}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۳\cancel{(x-۳)}}{-\cancel{(x-۳)}(x+۳)(۸)}=\dfrac{-۱}{۱۶}$

۷۱) حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد وشهریور ۹۴- خارج کشور)

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}\times\dfrac{\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x}+۲}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{(x-۴)}}=\sqrt{۴}+۲=۴$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}\times\dfrac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x}+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x}+۱=۲$

۷۲)حد تابع زیر را تعیین کنید.

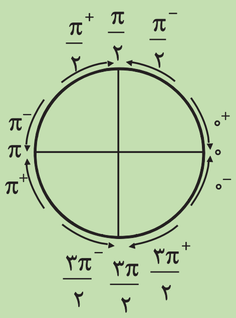
$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}$

☑پاسخ:

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۲-۱}{۱-\sqrt{x}}=\dfrac{۰}{۰}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{۱-\sqrt{x}}\times\dfrac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x+۱)(۱+\sqrt{x})}{۱-x=-\cancel{(x-۱)}}=-۴$

حدود توابع مثلثاتی در نقاط مرزی

در محاسبه حدهای یک طرفه در توابع مثلثاتی دونستن این که زاویه در کدوم ناحیه مثلثاتیه خیلی مهمه. مثلا وقتی $x \to 0^-$ یعنی x در ربع چهارمه و به صفر نزدیک میشه، یا وقتی $x \to 0^+$ یعنی x در ربع اوله و به صفر نزدیک میشه. این مطالب را در شکل زیر بررسی می‌کنیم.



تعریف نشده $\tan\frac{\pi}{2}$	ناحیه دوم $\tan\frac{\pi^+}{2} = -\infty$	ناحیه اول $\tan\frac{\pi^-}{2} = +\infty$
تعریف نشده $\tan\frac{3\pi}{2}$	ناحیه چهارم $\tan\frac{3\pi^+}{2} = -\infty$	ناحیه سوم $\tan\frac{3\pi^-}{2} = +\infty$

۷۳) حاصل حدود زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi^+}{2}} \tan x$ ۲) $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi^+}{2}} \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin(x+\frac{\pi}{3})}$ ۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \dfrac{1}{\cos x}$ ۴) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{1}{\sin x}$ ۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{5\pi^+}{2}} \tan x = \lim\limits_{x \to \frac{5\pi^+}{2}} \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

۲) $\lim\limits_{x \to \frac{-\pi^+}{2}} \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{3})}{\sin(x+\frac{\pi}{3})} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{1}{\sin x} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{1}{\sin \pi^+} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

۵) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x} = \dfrac{1+0}{1-1^-} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

روش حل مسئله

در حالت ابهام $\frac{0}{0}$ اگر عامل ابهام در صورت یا مخرج داخل قدر مطلق باشد، باید تکلیف قدر مطلق را با تعیین علامت مشخص کنیم و حد چپ و راست را جداگانه بررسی کنیم.

۷۴) حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{|۹-x^۲|}{x-۳}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲-۷}{|۳-x|}$ ۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{|x^۲-۱|}{x-۱}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{|۹-x^۲|}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{-(۳-x)(۳+x)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=\lim\limits_{x\to ۳^+}(۳+x)=۶$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲-۷}{|۳-x|}=\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲-۷}{۳-x}=\dfrac{۲}{۰^+}=+\infty$

۳) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{|x^۲-۱|}{x-۱}=\dfrac{۰}{۰}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\[2mm]\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{-(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=-۲\end{cases}$

۷۵) حاصل حدود زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}$

☑پاسخ:

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{|x-۳|+|x^۲-۹|}{|x-۳|}=\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{|x-۳|+|x-۳||x+۳|}{|x-۳|}=\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{\cancel{|x-۳|}(۱+|x+۳|)}{\cancel{|x-۳|}}=\lim\limits_{x\to ۳^-}(۱+|x+۳|)=۱+|۳+۳|=۷$

۲) $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|}=\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{(x-۲)(x+۲)}{|(x-۲)(x-۳)|}=\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x-۳)}=\dfrac{۴}{-۱}=-۴$

روش حل مسئله

برای محاسبه‌ی حدودی که شامل عبارت براکتی است، اول تکلیف قسمت براکتی را تعیین می‌کنیم و به جای آن عدد صحیح مناسب را قرار می‌دهیم، سپس به ادامه حد می‌پردازیم.

۷۶) حدود توابع زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{[x]-۳}{x-۳}$ ۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}$

☑پاسخ:

۱) $x\to ۳^+\Rightarrow ۳\le x<۴\Rightarrow [x]=۳\Rightarrow [۳^+]=۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{[x]-۳}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{[۳^+]-۳}{x-۳}=\dfrac{۰\ \text{مطلق}}{۰\ \text{حدی}}=۰$

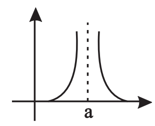
$\boxed{[(۱^+)^۳]=۱}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۳-[x^۳]}{x-[x]}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{\cancel{(x-۱)}(x^۲+x+۱)}{\cancel{(x-۱)}}=۳$

$\boxed{[(۱^+)]=۱}$

حدود نامتناهی :

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد مثبت بسیار بزرگی ، بزرگتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود (در مجاورت $x=a$ عرض تابع بیکران یا همان بی نهایت می شود)



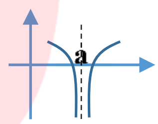
$$\begin{cases} x\to a & \text{عدد} \\ y\to +\infty \end{cases}$$

۷۷) حاصل $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ را به دست آورید .

✍)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{(x-2)^2}=\frac{5}{(0^{\pm})^2}=\frac{5}{0^+}=+\infty$$

هر چند ، حد چپ و راست هر دو برابر $+\infty$ شده اند ولی به خاطر آن که عدد نیستند ، تابع در این نقطه حد ندارد .

اگر تابع f در همسایگی محذوف نقطه $x=a$ تعریف شده باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ شود ،معنایش این است که مقادیر y تابع یعنی عرض آن از هر عدد منفی کوچکتر است به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شود .



$$\begin{cases} x\to a & \text{عدد} \\ y\to -\infty \end{cases}$$

مثلاً
$$\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{x^2+6x+9}=\lim_{x\to -3}\frac{x-4}{(x+3)^2}=\frac{-7}{(0^{\pm})^2}=\frac{-7}{0^+}=-\infty$$

بعضی وقت ها حاصل حد در یک نقطه ۲ تا بی نهایت با علامت های متفاوت میشه

مثلاً)

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-2}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{x-2}=\dfrac{5}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

در توابع کسری ریشه هایی از مخرج کسر ، به شرط آن که در این نقاط بتوان حد گرفت و حد ∞ شود . (*یعنی باید در همسایگی چپ یا راستِ ریشه مخرج تابع تعریف شده باشد*) حدود بی نهایتی ایجاد می کنند .

۷۸) حاصل حدود زیر را محاسبه کنید:

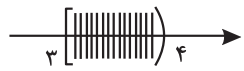
۱) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{[x]-3}$ ۳) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

☑ *پاسخ:*

۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty$

$2)\ D_f = R - \{x \mid [x] - 3 = 0\} = R - [3,4)$

می‌دانیم:



$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ این حد وجود ندارد، چون در همسایگی راست این نقطه تابع تعریف نشده

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{[3^-]-3} = \frac{1}{2-3} = -1$$

$$3)\ \lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{2}{0^+}} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^-}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{2}{0^-}} = \end{cases}$$

با توجه به دامنه اساساً این حد وجود ندارد چون در سمت چپ نقطه $x=-1$ تابع تعریف نشده .

x		-1	1	
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$	۰	ت ن	$-$

x			
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$	$+$	$-$

۷۹) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} + \frac{x^2+1}{\sin^2 x} = \frac{1}{|0^\pm|} + \frac{(0^\pm)^2+1}{(0^\pm)^2} = \frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^+} = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2-3x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(x-3)} = \frac{1}{0^+(0^+-3)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{0-3}{|0^\pm|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

حد در بینهایت : اگه متغییر ما بره به سمت بینهایت یعنی $x\to\infty$ و عرض تابع یعنی y آن به یک عدد نزدیک شود می گوییم تابع ما در بینهایت حد دارد و می نویسیم : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$

به عبارت دیگر

$x\to\infty$
$y\to$ عدد بشه

روش حل مسئله

در کتاب درسی تاکید به محاسبه حد در بینهایت توابع کسری که صورت و مخرج آنها چند جمله می باشند داره . برای محاسبه حد توابع کسری وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ میل می کند در صورت و مخرج از بزرگترین توان x فاکتور بگیر، ساده کن و حاصل حد رو پیدا کن .

یادت باشه : در توابع کسری وقتی $x \to \pm\infty$ میل می کند و صورت و مخرج کسر ∞ می شود و ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ رخ می دهد می توان از قاعده پرتوان استفاده کرد یعنی در صورت و مخرج جمله ای که بزرگترین توان از x را دارد در نظر می گیریم و حد عبارت حاصل را محاسبه می کنیم .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\dots\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+\dots\dots}=\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

یعنی

۱) وقتی جواب حد عدد ناصفر بشه معنیش اینکه توان صورت و مخرج برابره

۲) اگه جواب حد صفر بشه توان مخرج بیشتر از توان صورته .

۳) اگه بی نهایت شد یعنی توان و مرتبه ی صورت بزرگتراز توان و مرتبه ی مخرجه .

۸۰) حاصل $\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{7}{x^3}\right)$ چند برابر $\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$ است ؟

$$\lim_{x\to-\infty}\left(9+\frac{7}{x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}9+\frac{7}{(-\infty)^3}=9+0=9$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\frac{-6}{2}=-3$$

هر دو تابع ، هنگامی که x شان بینهایت می شود ، عرض شان عدد شده، پس هر دو در بینهایت حد دارند و اولی -3 برابر دومی است .

۸۱) حدود زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x+4}{x^2+3x-2x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{-2x^3}=\frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3x-5}{x^3-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

۸۲) حاصل حد $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{3x-1}$ را به دست آورید .

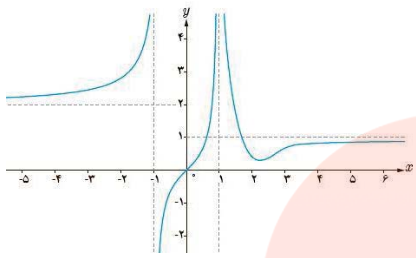
رادیکال میره به سمت ۱

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+3}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x}{3x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}{3x}=\frac{-2x}{3x}=\frac{-2}{3}$$

۸۳) حاصل حد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^2-3x-1}$ را حساب کنید .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^2-3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{2x^2}=\frac{5}{2}$$

۸۴) حاصل تمامی حدود زیر را محاسبه کنید .



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

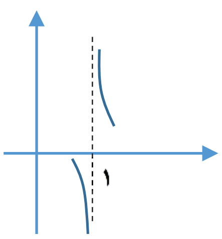
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)\right]+\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]=\left[2^+\right]+\left[1^-\right]=2+0=2$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=+\infty\end{cases}$$

۸۵) حد کدام تابع شبیه شکل مقابل است ؟



۱) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-x}{x-1}$

۲) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}$

۳) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

۴) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{1-x}$

$$\lim_{x\to1}\frac{-1}{1-x}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-1}{1-x}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$$