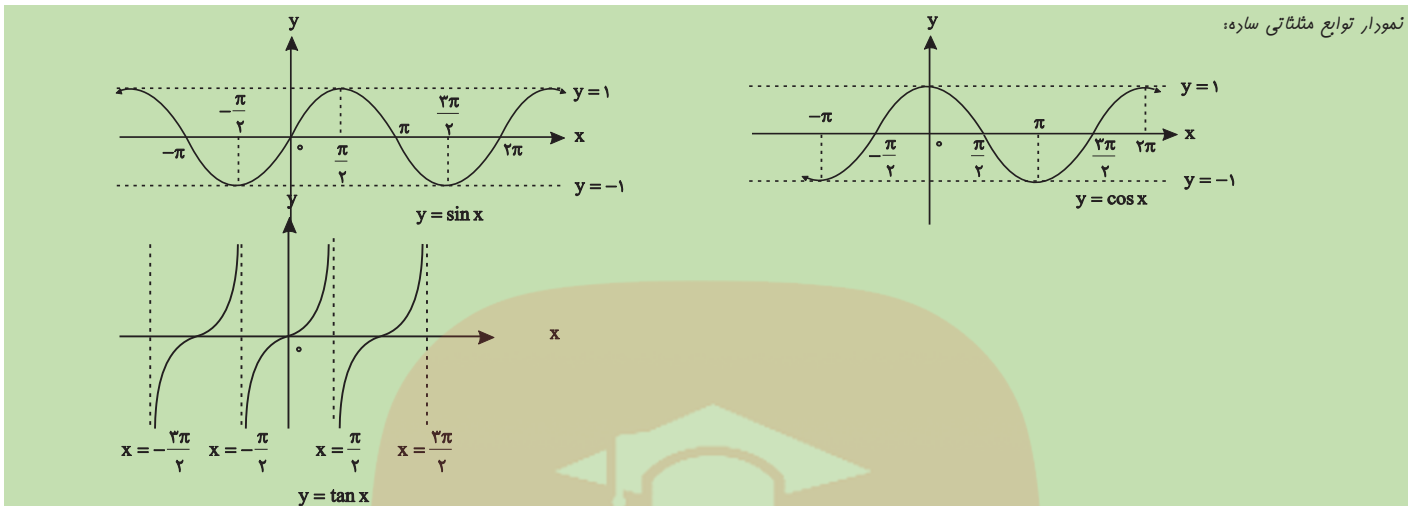


## فصل ۲ مثلثات

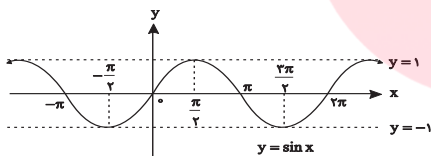


## دوره تناوب

تابع با ضابطه  $y = f(x)$  با دامنه  $D_f$  را در دامنه اش متناوب می گویند، هرگاه عدد حقیقی و ناصفر  $T$  وجود داشته باشد به طوری که در دو شرط زیر صدق کند.

$$1) \forall x \in D_f \quad (x \pm T) \in D_f \quad , \quad 2) \forall x \in D_f \quad f(x \pm T) = f(x)$$

این یعنی اینکه شکل تابع در فاصله های  $T$  واحدی تکراریه مثل تابع سینوس که در فاصله های  $2\pi$  واحدی تکرار میشه



(۳۸) تابع  $y = x - [x - 2]$  مفروض است.

(۱) نمودار تابع را رسم کنید. (۲) حدود  $y$  را بیابید. (۳) نشان دهید تابع متناوب است.

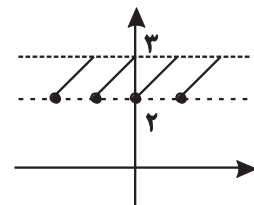
پاسخ:

$$1) y = x - [x - 2] = x - [x] + 2$$

وقتی این تابع را ساده کنیم به فرم تابع فراقسلی که دو واحد به سمت بالا در امتداد محور  $y$  ها رفته می شود.

$$2) 0 \leq x - [x] < 1 \Rightarrow 2 \leq x - [x] + 2 < 3 \Rightarrow 2 \leq y < 3$$

$$3) f(x) = x - [x] + 2 \Rightarrow T = \frac{1}{|1|} = 1$$



دوره تناوب اصلی تابع: اگر  $T$  دوره تناوب تابع  $f$  باشد آن گاه  $nT, \forall n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  نیز دوره تناوب تابع است یعنی دوره تناوب تابع مجموعه ای بی شمار است، حال اگر این مجموعه دارای کوچک ترین عضو مثبت باشد آن را دوره ی تناوب اصلی می نامند.

دوره تناوب های مهم:

$$\begin{cases} f(x) = \sin^{2n-1}(ax+b) \\ f(x) = \cos^{2n-1}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x) = \sin^{2n}(ax+b) \\ f(x) = \cos^{2n}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|a|}$$

۳۹) دوره تناوب کدام تابع بیشتر است؟

$$y = \sin(3x + 4) \quad (۴)$$

$$y = \cos \frac{x}{2} \quad (۳)$$

$$y = \cos \pi x \quad (۲)$$

$$y = \sin 4x \quad (۱)$$

گزینه ۳ درست است زیرا

$$\sin 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \pi x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\cos \frac{x}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\sin(3x + 4) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$



۱) هرگاه تابعی به صورت مجموع یا تفاضل چند تابع مثلثاتی ساده بود برای تعیین دوره تناوب اصلی تابع، ابتدا تناوب هر یک از توابع را حساب کرده سپس کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را به دست می‌آوریم.  
 ۲) هرگاه تابع به صورت حاصل ضرب دو یا چند تابع مثلثاتی ساده باشد، ابتدا آن را به مجموع تبدیل کرده سپس دوره تناوب آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

۴۰) دوره تناوب تابع  $y = \sin^2\left(\frac{3x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)$  را تعیین کنید.

پاسخ:

$$y = \sin^2 \frac{3x}{4} \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi}{3}, \quad y = \cos^2 \frac{2x}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi \xrightarrow{\text{ک.م.م}} T = 12\pi$$

مای درس

گروه آموزشی عصر



اگر مجموع دو کمان برابر  $\frac{\pi}{2}$  باشد آن‌گاه دو کمان متمم و اگر مجموعشان  $\pi$  باشد مکمل یکدیگرند.

$$a + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \cos b \\ \cos a = \sin b \\ \tan a = \cot b \\ \cot a = \tan b \end{cases}$$

$$a + b = \pi \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin a - \sin b = 0 \\ \cos a + \cos b = 0 \\ \tan a + \tan b = 0 \\ \cot a + \cot b = 0 \end{cases}$$

در صورت وجود

چند مثال:

$$\sin 8^\circ = \cos 82^\circ$$

$$\cot 50^\circ = \tan 40^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$$

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$2) \begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$3) (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 \pm \sin 2\alpha$$

(شهریور ۹۴)

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

(۴۱) نشان دهید برای هر زاویه  $\alpha$  داریم:پاسخ: 

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2 \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

(خرداد ۹۴ - خارج کشور)

(۴۲) در صورتی که  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و زاویه  $\alpha$  حاده باشد مقدار عددی  $\cos 2\alpha$  را محاسبه کنید.پاسخ: 

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

(۴۳) خلاصه شده عبارت  $\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ)$  را به دست آورید.پاسخ: 

$$\tan 20^\circ (1 + \cos 40^\circ) = \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} (2 \cos^2 20^\circ) = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \sin 40^\circ = \cos 50^\circ$$

(۴۴) خلاصه شده عبارت  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \sin(\pi + a) - \sin(\pi - a) \cos a$  را بنویسید.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \sin(\pi + a) - \sin(\pi - a) \cos a = \cos a (-\sin a) - \sin a \cos a = -2 \sin a \cos a = -\sin 2a$$

پاسخ: 

(دی ماه ۹۲)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

(۴۵) نشان دهید برای هر زاویه  $\alpha$  داریم:پاسخ: 

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

(خرداد ۹۱)

www.my-dars.ir

(۴۶) سینوس زاویه  $22/5^\circ$  را حساب کنید.پاسخ: زاویه  $22/5^\circ$  درجه نسبت های مثلثاتیش رایج نیست ولی به کمک زاویه  $45^\circ$  می توانیم اون رو به دست بیاریم

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x \rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

(۴۷) با توجه به این که  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ، حاصل  $\sin 7/5^\circ$  را بیابید.

پاسخ: فب به فورده سفته ولی

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin^2 7/5^\circ = \frac{1 - \cos 15^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{2} \Rightarrow \sin 7/5^\circ = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}}$$



(۱) در توابع  $f(x) = a \cos bx + c$  ،  $f(x) = a \sin bx + c$  مقدار ماکزیمم تابع  $|a| + c$  و مقدار مینیمم آن  $-|a| + c$

و دوره تناوب  $\frac{2\pi}{|b|}$  خواهد بود. و یادت باشه:  $c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$  ،  $|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$

(۲) یعنی با داشتن ضابطه ی توابع فوق ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع تعیین می شود وبا داشتن مقادیر ماکسیمم و مینیمم و دوره تناوب می توان ضابطه ی تابع را تعیین کرد.

یادت باشه:

(۱) در تابع  $y = a \sin x$  خواهیم داشت.  $y_{\max} = |a|$  ،  $y_{\min} = -|a|$  که در مبداء مختصات صعودی است اگر  $a > 0$  باشد و اگر  $a < 0$  تابع نزولی عبور می کند.

(۲) اما تابع  $y = a \sin bx$  دارای دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{|b|}$  است و  $y_{\max} = |a|$  ،  $y_{\min} = -|a|$

(۳) در تابع  $y = \sin(bx + c)$  همان نمودار  $y = \sin bx$  را داریم که به اندازه  $\frac{c}{b}$  به سمت چپ یا راست انتقال دارد.

(۴۸) ضابطه تابع به فرم  $y = a \sin bx + c$  را بنویسید که دوره تناوب آن  $\pi$  ، مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \quad |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{4 - (-2)}{2} = 3 \quad c = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$$

$$y = 3 \sin 2x + 1$$

(۴۹) ولتاژ یک دستگاه لوازم خانگی بر حسب کسینوس نسبت به زمان دارای فرکانس یا دوره تناوب  $\frac{1}{80}$  است و تغییرات ولتاژ در بازه  $[120, -120]$  است معادله ولتاژ این دستگاه را بنویسید.

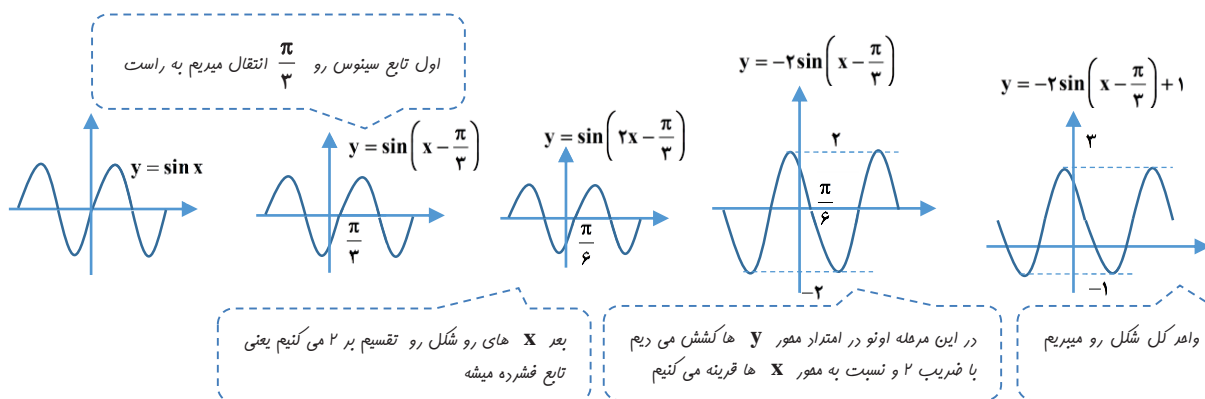
$$v(t) = a \cos(bt) + c$$

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{1}{80} \Rightarrow b = 160\pi \quad , \quad a = \frac{120 - (-120)}{2} = 120 \quad , \quad c = \frac{120 + (-120)}{2} = 0 \Rightarrow v(t) = 120 \cos 160\pi t$$

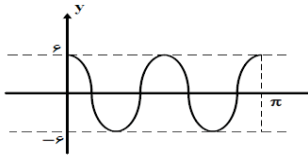
پاسخ:

www.my-dars.ir

(۵۰) نمودار تابع  $y = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$  را رسم کنید.



۵۱) شکل مقابل نمودار  $y = a \cos bx$  است. مقادیر  $a, b$  را تعیین کنید و مقدار تابع در  $x = \frac{7\pi}{12}$  به دست آورید.

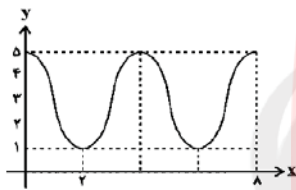


پاسخ: در بازه  $[0, \pi]$  شکل منفی دو بار تکرار شده است پس دوره تناوب  $T = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{|b|}$  است در نتیجه  $b = 4$

و تغییرات تابع در بازه  $[-6, 6]$  است و چون روند تابع در میراء نزولی است پس  $a = 6$  است و معادله منفی به صورت  $y = 6 \cos 4x$  فواید بود.

در نتیجه :

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 6 \cos\left(4 \times \frac{7\pi}{12}\right) = 6 \cos \frac{7\pi}{3} = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 6 \left(\frac{1}{2}\right) = 3$$



۵۲) نمودار تابع  $y = a \cos b \pi x + 3$  مطابق شکل روبروست است. حاصل  $a + b$  کدام است؟

پاسخ: در نقطه‌ی  $x = 0$  داریم :  $f(0) = a \cos b \pi(0) + 3 = a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2$

طبق نمودار فاصله‌ی  $x = 0$  تا  $x = 2$ ، برابر نصف دوره‌ی تناوب تابع مورد نظر است:

$$2 - 0 = \frac{T}{2} \Rightarrow T = 4 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 4 \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ a + b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

# مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

منظور از حل معادله‌ی مثلثاتی یافتن تمام کمان‌هایی است که در معادله صدق می‌کنند، هر معادله‌ی مثلثاتی در صورت داشتن جواب به یکی از معادلات زیر تبدیل می‌شود. به حل و بسط هر یک می‌پردازیم.

۱)  $\sin x = m = \sin \theta$

۲)  $\cos x = m = \cos \theta$

معادلات سینوسی

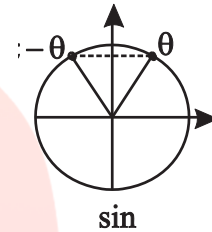
(۱)

$\sin x = m = \sin \theta$

$$x = \begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$$

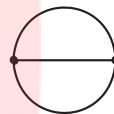
$(-1 \leq m \leq 1)$

$k \in \mathbb{Z}$  جواب‌های عمومی



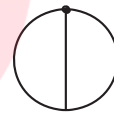
◀ حالت‌های خاص

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$



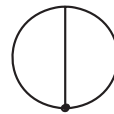
$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

ریشه‌های مضاعف



$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$

ریشه‌های مضاعف



مای دارس

گروه آموزشی عصر

۵۳) معادله  $\sin^2 x = \sin x$  را حل کنید.

☑ پاسخ:

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x & \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi + \pi - x & \Rightarrow 3x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} \end{cases}$$

(دی ماه ۹۳)

۵۴) معادله  $2\sin^2 x - \sin x = 0$  را حل کرده جواب‌هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  هستند را تعیین کنید.

☑ پاسخ:

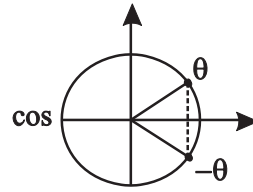
$\sin x(2\sin x - 1) = 0$

$$\begin{cases} \sin x = 0 & \Rightarrow x = k\pi \\ 2\sin x - 1 = 0 & \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

معادلات کسینوسی

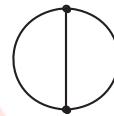
$$\cos x = m = \cos \theta \quad -1 \leq m \leq 1$$

$$x = \begin{cases} 2k\pi - \theta \\ 2k\pi + \theta \end{cases} \quad \text{پواب‌های عمومی}$$

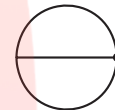


حالت‌های خاص

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$



$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$



(۵۵) معادله  $\cos 3x - \cos x = 0$  را حل کنید.

$$\cos 3x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

(۵۶) معادله  $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$  را حل کنید.

پاسخ:

۲ شره دو ۱

$$1 + \cos 2x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{4} = \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = 1 = \cos 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi, \quad \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

(شهریور ۹۳)

(۵۷) معادله  $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$  را حل کنید.

پاسخ:

$$2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(شهریور ۹۴)

(۵۸) معادله  $\sin^2 x = \cos^2 x + 1$  را حل کنید.

پاسخ:

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$