اعمال روی توابع

بررسی تابع $kf(x)$

برای رسم نمودار kf باید عرض هر نقطه‌ی f را در عدد k ضرب کنیم.

$$(kf)(x)=kf(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{kf}=D_f \\ R_{kf}=\{ky \mid y\in R_f\} \end{cases}$$

- $k>1$: تابع f در راستای محور yها با ضریب k کشیده می‌شود.
- $0<k<1$: تابع f در راستای محور y ها با ضریب k فشرده می‌شود.
- $-1<k<0$: تابع ابتدا نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ فشرده می‌شود.
- $k=-1$: تابع فقط نسبت به محور x ها آینه‌وار منعکس می‌شود.
- $k<-1$: تابع نسبت به محور x ها منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ کشیده می‌شود.

اگر برد تابع $y=f(x)$ بازه‌ی $[m,n]$ باشد، آن‌گاه با فرض مثبت بودن k برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[km,kn]$ می‌باشد و اگر k منفی باشد، برد تابع $y=kf(x)$ بازه‌ی $[kn,km]$ خواهد بود.

دامنه‌ی توابع $f(x)$ ، $kf(x)$ ، $f(x)+k$ یکسان‌اند.

بررسی تابع $g(x)=f(kx)$

در این توابع دامنه تغییر می‌کند، اما برد هیچ‌گونه تغییری نمی‌کند.

$$D_f=[a,b] \Rightarrow a\le kx\le b \Rightarrow \begin{cases} \text{if } k>0 \Rightarrow \frac{a}{k}\le x\le \frac{b}{k} \\ \text{if } k<0 \Rightarrow \frac{a}{k}\ge x\ge \frac{b}{k} \end{cases} \Rightarrow D_g=\left\{\frac{x}{k} \mid x\in D_f\right\}$$

$$\begin{cases} g(x)=f(kx) \\ |k|<1 \ \text{کشیدگی} \\ |k|>1 \ \text{فشردگی} \end{cases}$$

نکته

✹ برای رسم $f(ax+b)$ ابتدا انتقال عدد ثابت b را انجام می دهیم . سپس تغییرات مربوط به ضریب x را روی شکل اعمال می کنیم .

برای رسم نمودار $f(ax)$ اگر $(0<a<1)$ باشد نمودار تابع $f(x)$ را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط می کنیم . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

اگر $(a>1)$ نمودار تابع $f(x)$ در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{a}$ منقبض می شود . طول ها $\frac{1}{a}$ برابر می شوند .

نکته

✸اگر نقطه A روی نمودار تابع $f(x)$ باشد نقطه نظیر آن روی تابع $g(x)=f(ax+b)$ برابراست با :

$$\text{if}\quad A(x_{\circ},y_{\circ})\in f(x)\qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_{\circ}-b}{a}\\ y_{\circ}\end{matrix}\right.\in g(x)=f(ax+b)$$

$$\text{if}\quad A(x_{\circ},y_{\circ})\in f(x)\qquad A'\left|\begin{matrix}\dfrac{x_{\circ}-b}{a}\\ ky_{\circ}\pm k'\end{matrix}\right.\in g(x)=kf(ax+b)\pm k'$$

نکته

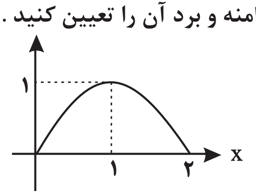
✸ بررسی تابع $y=f(x-a)\quad (a>\circ)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد مثبت محور x ها انتقال دهیم .

✸ بررسی تابع $y=f(x+a)\quad (a>\circ)$

برای رسم منحنی آن کافی است نمودار تابع f را a واحد در امتداد منفی محور x ها انتقال دهیم .

۱) نمودار تابع معین $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو داده شده است. نمودار تابع $g(x)=f(-۲x)$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید .



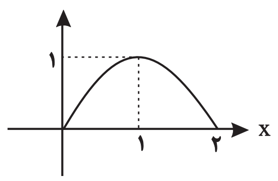
☑پاسخ:

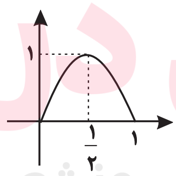
در تابع f ، x باید

حالا باید $-۲x$ تو دامنه f باشه

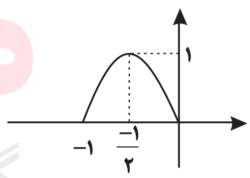
طرفین نامساوی رو بر -۲ تقسیم

$$D_f=[\circ,۲]\ ,\ R_f=[\circ,۱]\ \Rightarrow f(x)\Rightarrow \circ\le x\le ۲\ \Rightarrow f(-۲x)\ \Rightarrow\ \circ\le -۲x\le ۲\ \Rightarrow\ -۱\le x\le \circ$$





فشردگی طولی به خاطر ضریب ۲ واحدی x داخل پرانتز



تقارن طولی به خاطر منفی داخل پرانتز

$$D_g=[-۱,\circ]\quad ,\quad R_g=[\circ,۱]$$

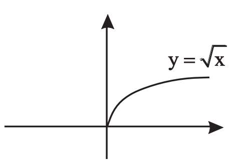
نکته

برد توابع $f(x+k)$ ، $f(kx)$ ، $f(x)$ یکسان‌اند.

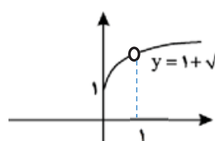
۲) به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

☑پاسخ: برای هر کاری به جز دامنه گرفتن، اول تا جای ممکن تابع را ساده کنید. (ثواب داره !)

$$f(x)=\frac{۱-x}{۱-\sqrt{x}}=\frac{(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})}{۱-\sqrt{x}}=۱+\sqrt{x}$$

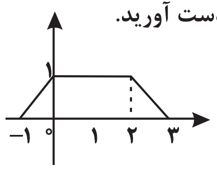


حالا شکل $\sqrt{x}$ رو یه واحد می‌بریم بالا



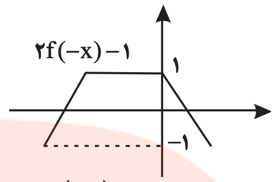
اینجا بخاطر دامنه تابع کسری ، تابع سوراخ داره

۳) اگر نمودار $y=f(x)$ شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $g(x)=2f(-x)-1$ را رسم کنید و دامنه و برد $g(x)$ را به دست آورید.

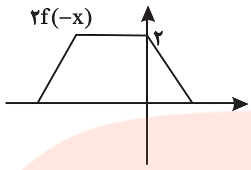


☑پاسخ:

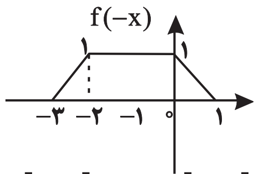
یک واحد ببر پایین



y ها رو دو برابر کن (کشیدگی عرضی)

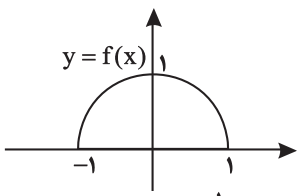


یعنی x های دامنه را قرینه کن.



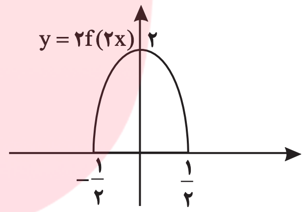
$0\le f(-x)\le 1 \Rightarrow 0\le 2f(-x)\le 2 \Rightarrow -1\le 2f(-x)-1\le 1$, $0\le f(x)\le 1$, $D_f=[-1,3]$, $D_g=[-3,1]$

۴) نمودار $f(x)$ شکل مقابل است. نمودار توابع $f\left(\frac{x}{2}\right)$, $g(x)=2f(2x)$ را رسم کنید.

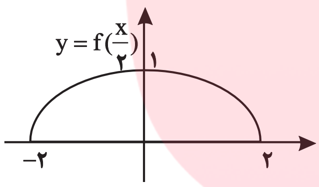


☑پاسخ:

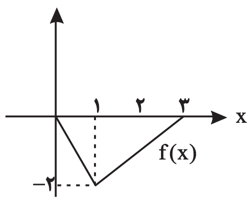
فشردگی طولی به خاطر ضریب دو واحدی x و کشیدگی عرضی به خاطر ضریب دو واحدی f



کشیدگی طولی به خاطر ضریب $\frac{1}{2}$ واحدی x

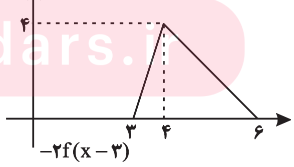


۵) در زیر نمودار تابع $y=f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال ابتدا نمودار تابع $y=f(x-3)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y=-2f(x-3)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۱)

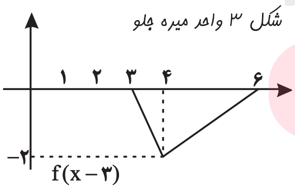


☑پاسخ:

شکل قرینه نسبت به محور Xها و دو واحد انبساط عرضی دارد.

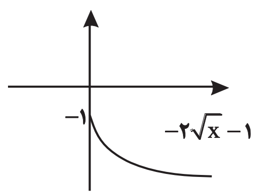


شکل ۳ واحد میره جلو

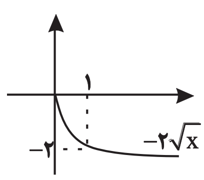


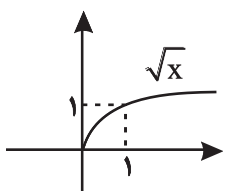
۶) ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-2f(x)-1$ را رسم کنید.(خرداد ۹۲)

☑پاسخ:



۱ واحد میره پایین





توابع صعودی و توابع نزولی

تابع صعودی: تابع $y=f(x)$ را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند.

$\forall\ x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)\le f(x_2)$

تابع $y=f(x)$ را صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y نیز بزرگ شود.

$\forall x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$

تابع نزولی: تابع $y=f(x)$ را نزولی می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x، مقدار تابع یعنی y کاهش یابد و یا ثابت بماند.

$\forall\ x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$

تابع $y=f(x)$ را نزولی اکید می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر x ، مقدار تابع یعنی y نیز کاهش یابد.

$\forall\ x_1,x_2\in D_f:\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

نکته

۱. در هر بازه که تابع ثابت باشه، هم می‌توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می‌کنه.
۲. هر تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به یک باشه ولی یکنوا نباشه مثل تابع : $y=\frac{1}{x}$

روش حل مسئله

۱) اول از $x_1<x_2$ متعلق به دامنه تابع شروع کنید و سعی نمایید $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بسازید.
۲) دقت کنید کدام نامساوی برقرار است $f(x_1)\le f(x_2)$ یا $f(x_1)\ge f(x_2)$ اولی یعنی صعودی بودن تابع و دومی یعنی نزولی بودن آن

۷) نشان دهید تابع $f:(0,+\infty)\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ نزولی اکید است.

☑پاسخ: $0<x_1<x_2\ \Rightarrow\ 0<(x_1)^2<(x_2)^2\Rightarrow 1+(x_1)^2<1+(x_2)^2\Rightarrow\frac{1}{1+(x_1)^2}>\frac{1}{1+(x_2)^2}\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

۸) صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x)=\sqrt{2x-4}$ را روی دامنه‌اش بررسی کنید.

☑پاسخ:

$f(x)=\sqrt{2x-4}\ \Rightarrow\ 2x-4\ge 0\ \Rightarrow\ x\ge 2\ \Rightarrow\ D_f=[2,+\infty)$

$x_1<x_2\ \Rightarrow\ 2x_1<2x_2\Rightarrow 2x_1-4<2x_2-4\ \Rightarrow\ \sqrt{2x_1-4}<\sqrt{2x_2-4}\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2)$

تابع در دامنه‌اش صعودی است.

۹) با استفاده از ضابطه‌ی، صعودی یا نزولی بودن تابع : $f(x)=-2(x+1)^3-1$ را بررسی کنید.

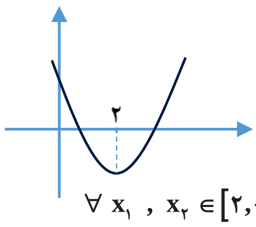
☑پاسخ: $x_1<x_2\ \Rightarrow 2(x_1+1)^3<2(x_2+1)^3\Rightarrow\ -2(x_1+1)^3-1>-2(x_2+1)^3-1\ \Rightarrow\ f(x_1)>f(x_2)\ \Rightarrow$

بنابراین تابع نزولی است.

۱۰) در تابع با ضابطه ی $f(x)=x^{۲}-۴x+۱$ دامنه تابع را به گونه ای محدود کنید که تابع اکیداً صعودی باشد .

☑پاسخ:

راس این سهمی $x=\frac{-b}{۲a}=\frac{۴}{۲}=۲$ و چون $a=۱>۰$ دهنه سهمی رو به بالاست و از $x=۲$ به بعد تابع صعودی است .



اینم اثباتش

باید نشون بدیم

$\forall\ x_۱\ ,\ x_۲\in[۲,+\infty)\qquad x_۱<x_۲\ \Rightarrow\ f(x_۱)<f(x_۲)$

چون x ها بزرگتر از ۲ اند داریم

$x_۱<x_۲\ \Rightarrow\ (x_۱-۲)<(x_۲-۲)\Rightarrow(x_۱-۲)^۲<(x_۲-۲)^۲\ \Rightarrow\ (x_۱-۲)^۲-۳<(x_۲-۲)^۲-۳$

$x_۱^۲-۴x_۱+۱<x_۲^۲-۴x_۲+۱\ \Rightarrow\ f(x_۱)<f(x_۲)$

روش حل مسئله

۱) نمودار تابع را رسم کنید.

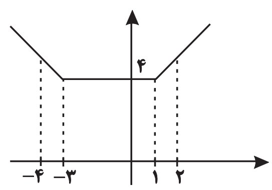
۲) برای هر بازه به صورت مجزا صعودی یا نزولی بودن را بررسی کنید.

۱۱) با رسم نمودار تابع $y=|x-۱|+|x+۳|$ مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ (شهریور ۹۳)

☑پاسخ:

$y=|x+۳|+|x-۱|\Rightarrow\begin{cases}x=-۳\\x=۱\end{cases}$ ریشه قدر مطلق اول / ریشه قدر مطلق دوم

$f(x)=\begin{cases}-۲x-۲ & x<-۳\\ ۴ & -۳\le x\le ۱\\ ۲x+۲ & x>۱\end{cases}$



x	-۴	-۳	۱	۲
y	۶	۴	۴	۶

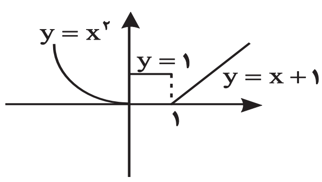
نزولی $\forall x\in(-\infty,-۳)$ ثابت $\forall x\in(-۳,۱]$ صعودی $\forall x\in(۱,+\infty)$

۱۲) ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x<۰\\ ۱ & ۰\le x\le ۱\\ x-۱ & x>۱\end{cases}$

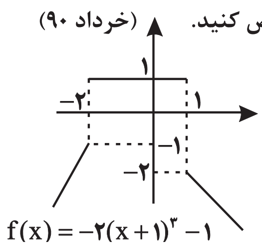
☑پاسخ:

۱۳) تابع در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ اکیداً نزولی است در بازه‌ی $[۰,۱]$ ثابت و در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است.



۱۴) تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<-۲\\ ۱ & -۲<x<۱\\ -۲x & x>۱\end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

☑پاسخ: تابع در بازه‌ی $(-\infty,-۲)$ صعودی است و در بازه‌ی $(-۲,۱)$ ثابت و در بازه‌ی $(۱,+\infty)$ نزولی است.

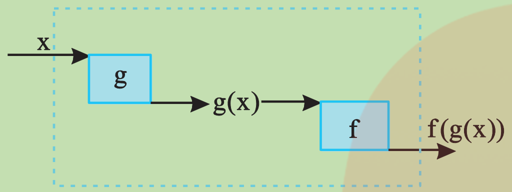


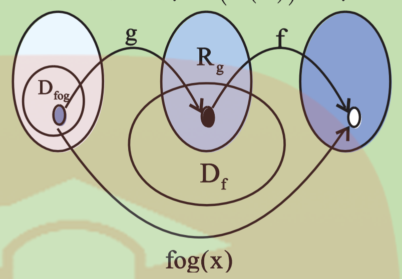
ترکیب توابع

اگر $A \xrightarrow{f} B$, $C \xrightarrow{g} D$ آن‌گاه $C \xrightarrow{fog} B$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد $g(x)$ اشتراکی با دامنه‌ی تابع $f(x)$ نداشته باشد، $f(g(x))$ قابل تشکیل نیست. حال اگر $R_g \cap D_f \neq \phi$ آن‌گاه با جای گزینی $g(x)$ به جای x در ضابطه‌ی $f(x)$، تابع fog تشکیل می‌شود.





۱۵) اگر $f = \{(-۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۴,۵)\}$, $g = \{(-۱,۰),(۱,۲),(۲,۴),(۵,۳)\}$ دو تابع باشند : (شهریور ۹۵)

تابع fog را به صورت زوج مرتب بنویسید .

$$\begin{array}{|l} -۱ \xrightarrow{g} ۰ \xrightarrow{f} \times \\ ۱ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f} ۳ \quad \Rightarrow \quad (۱,۳) \in fog \\ ۲ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f} ۵ \quad \Rightarrow \quad (۲,۵) \in fog \\ ۵ \xrightarrow{g} ۳ \xrightarrow{f} \times \end{array} \quad \Rightarrow \quad fog = \{(۱,۳),(۲,۵)\}$$

۱۶) اگر $g = \left\{(۲,\sqrt{۲}),(-۱,۲),\left(\frac{۱}{۴},۳\right),\left(۱,\frac{۳}{۲}\right)\right\}$, $f = \left\{(۰,۲),(۱,-۱),\left(۳,\frac{-۱}{۴}\right),(-۲,۳),(-۱,۰)\right\}$ باشند، تابع gof را بدست آورید.

(خرداد ۹۴)

☑پاسخ:

$$۰ \xrightarrow{f} ۲ \xrightarrow{g} \sqrt{۲} \Rightarrow (۰,\sqrt{۲}) \in gof$$

$$۱ \xrightarrow{f} -۱ \xrightarrow{g} ۲ \Rightarrow (۱,۲) \in gof$$

$$۳ \xrightarrow{f} \frac{-۱}{۴} \xrightarrow{g} \times \qquad gof = \{(۰,\sqrt{۲}),(۱,۲)\}$$

$$-۲ \xrightarrow{f} ۳ \xrightarrow{g} \times$$

اینا به جایی نمیرن

$$-۱ \xrightarrow{f} ۰ \xrightarrow{g} \times$$

۱۷) اگر $f(x) = \sqrt{x-۳}$, $g = \{(۰,۴),(۳,۲),(۵,۶)\}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۱)

الف) تابع fog را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید .

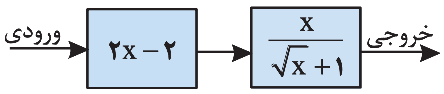
☑پاسخ:

$$\begin{cases} ۰ \xrightarrow{g} ۴ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} ۱ \Rightarrow (۰,۱) \\ ۳ \xrightarrow{g} ۲ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۲-۳} \\ ۵ \xrightarrow{g} ۶ \xrightarrow{f=\sqrt{x-۳}} \sqrt{۳} \Rightarrow (۵,\sqrt{۳}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad fog = \{(۰,۱),(۵,\sqrt{۳})\}$$

تعریف نشده

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = ۰\} \quad \Rightarrow \quad D_{\frac{f}{g}} = \{۳,۵\}$$

۱۸) اگر خروجی از ماشین شکل مقابل $\frac{۴}{۳}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

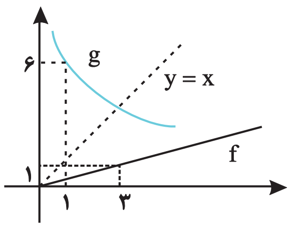


☑پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{x}+۱}=\frac{۴}{۳} \Rightarrow x=۴ \Rightarrow ۲x-۲=۴ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

۱۹) شکل مقابل نمودارهای توابع f,g است و f تابعی خطی می‌باشد، $gof(۳)+fog(۱)$ کدام است؟

☑پاسخ:



$$f(g(۱))=f(۶)=\frac{۱}{۳}(۶)=۲$$

$$g(f(۳))=g(۱)=۶$$

$$gof(۳)+fog(۱)=۶+۲=۸$$

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x \Rightarrow$$

تابع f خطی ، و با شیب $\frac{۱}{۳}$ و گذرا از مبدأ است.
بنابراین معادله آن به این صورت می‌باشد.

نکته

تعداد زیادی از سوالات ترکیب دو تابع مربوط به تعیین دامنه ترکیب دو تابع بدون تشکیل ضابطه و از راه تعریف است. دقت کن :

$$D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}$$

$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$

روش حل مسئله

۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.

۲) فرمول دامنه ترکیب رو با توجه به یکی از سه مورد بالا بنویسید.

۳) با استفاده از فرمول و محدودیت های هر دامنه، دامنه ترکیب را حساب کنید.

۲۰) توابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$, $g(x)=\frac{۱}{x}$ مفروض‌اند. (خرداد ۸۵)

الف) بدون تشکیل ضابطه‌ی fog دامنه را تعیین کنید.

ب) در صورت وجود، ضابطه‌ی gof را بنویسید.

☑پاسخ:

الف) $D_{fog}=\{x\in D_g=R-\{۰\} \mid g(x)\in D_f=[۱,+\infty)\}=\{x \mid x\in R-\{۰\}, \frac{۱}{x}\geq ۱\}=\{x \mid x\in R-\{۰\}, x\leq ۱\}=(-\infty,۱]-\{۰\}$

ب) $gof=g(\sqrt{x-۱})=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}}$

یعنی در تابع g بجای x ، ضابطه $f(x)$ رو قرار بده

۲۱) اگر $f(x)=\sqrt{x+|x|}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4x}$ باشد دامنه‌ی تابع gof کدام است؟

☑پاسخ: $f(x)=x+|x|=\begin{cases}\sqrt{2x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases} \Rightarrow x+|x|\ge 0 \Rightarrow D_f=R$, $D_g=R-\{0,4\}$

می‌دانیم: $\forall x\in(-\infty,0] \Rightarrow \sqrt{x+|x|}=0$, $\sqrt{x+|x|}=4 \Rightarrow \sqrt{2x}=4 \Rightarrow 2x=16 \Rightarrow x=8$

در نتیجه: $D_{gof}=\left\{x:x\in R \ni \sqrt{x+|x|}\neq 0,4\right\}=(0,+\infty)-\{8\}$

۲۲)اگر $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{x-3}$ دو تابع باشند. (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $3(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع fog را بیابید.

☑پاسخ:

الف) $3(f-g)(4)=3\left(\dfrac{1}{4-1}-\sqrt{4-3}\right)=-2$

ب) $D_f=R-\{1\}$, $D_g=[3,+\infty) \Rightarrow D_{fog}=\left\{x\,|\,x\in D_g \ , \ g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\,|\,x\in[3,+\infty) \ , \ \sqrt{x-3}\neq 1\right\}=[3,+\infty)-\{4\}$

۲۳) اگر $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$, $f(x)=3x-2$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۰)

الف) $(3f+2g)(4)$ ب) D_{fog}

☑پاسخ:

الف) $3f=3(3x-2)=9x-6$, $2g=\dfrac{2}{x-3} \Rightarrow 3f+2g=(9x-6)+\left(\dfrac{2}{x-3}\right)\Rightarrow(3f+2g)(4)=32$

ب) $D_{fog}=\left\{x\in D_g=R-\{3\}\,\middle|\,\dfrac{1}{x-3}\in D_f=R\right\}=R-\{3\}$

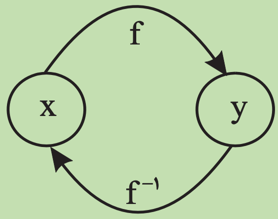
۲۴) توابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-2}{1-x}}$, $g(x)=2x$ مفروض‌اند. دامنه تابع $fog(x)$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۳- خارج کشور)

☑پاسخ: $D_g=R$, $D_f=\left[\dfrac{2}{3},1\right)$,

x		$\frac{2}{3}$		1	
$\dfrac{3x-2}{1-x}$	$-$	◆	$+$		$-$

$D_{fog}=\left\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in R\,|\,2x\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)\right\}=\left\{x\in R\,|\,\dfrac{2}{3}\le 2x<1\right\}=\left\{x\in R\,|\,\dfrac{1}{3}\le x<\dfrac{1}{2}\right\}=\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$

تابع وارون



اگر f تابعی یک به یک باشد، معکوس‌پذیر و معکوس تابع f به صورت زیر است.

$$f^{-1}=\{(y,x)\,|\,(x,y)\in f\}$$

$$D_{f^{-1}}=R_f \qquad D_f=R_{f^{-1}}$$

$$\forall x\in D_{f^{-1}} \quad f\left(f^{-1}(x)\right)=x \qquad\qquad \forall x\in D_f \quad f^{-1}\left(f(x)\right)=x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر $f(a)=b$ آن‌گاه $f^{-1}(b)=a$

نکته

۱) نمودار توابع f^{-1},f نسبت به خط $y=x$ متقارن‌اند.

۲) نمودار f^{-1},f در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط $y=x$ قطع می‌کنند. (نه همیشه)

۳) ممکن است نمودار f^{-1},f بر هم منطبق باشند، مانند: $y=\frac{۱}{x}$ و یا یکدیگر را قطع نکنند، مانند:

$$f^{-1}(x)=\log_{۲}^{x} \ , \ f(x)=۲^{x}$$

روش حل مسئله

۱) ابتدا ثابت کنید تابع یک به یک است. (قسمت خسته‌ی کار) این طوری:

$$\forall x_۱,x_۲\in D_f:\ f(x_۱)=f(x_۲)\ \Rightarrow\ x_۱=x_۲$$

کمتر سوال میاد ، بیشتر می خواد که ضابطه تابع معکوس رو مستقیم به دست بیارید

۲) تابع را بر حسب x بنویسید یعنی از ضابطه‌ی داده شده x رو بر حسب y تنها کنید. (قسمت سخت کار)

۳) درنهایت تابع حاصل را به صورت $y=f^{-1}(x)$ بنویسید.

۲۵) معکوس توابع زیر کدام است؟

۱) $y=ax+b$ \qquad ۲) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$

☑پاسخ:

۱) $y=ax+b \quad\Rightarrow\quad ax=y-b \quad\Rightarrow x=\frac{y-b}{a} \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

۲) $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x \quad\Rightarrow\quad y=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱=(x+۱)^۳-۱ \Rightarrow y+۱=(x+۱)^۳ \Rightarrow \sqrt[۳]{y+۱}=x+۱$

$x=\sqrt[۳]{y+۱}-۱ \quad\Rightarrow\quad f^{-1}(x)=\sqrt[۳]{x+۱}-۱$

مکعب کامل می‌کنیم

۲۶) در توابع زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

☑پاسخ:

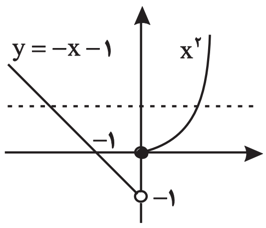
$$f(x)=\frac{۳x+۱}{x-۱} \ \Rightarrow\ f^{-1}(۷)=? \quad\Rightarrow\quad \frac{۳x+۱}{x-۱}=۷ \ \Rightarrow\ ۷x-۷=۳x+۱ \ \Rightarrow\ ۴x=۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow f^{-1}(۷)=۲$$

$$f(x)=x^۲-۲x\ ,\ x\le ۲ \ \Rightarrow\ f^{-1}(۵)=? \ \Rightarrow\ x^۲-۲x=۵ \Rightarrow x^۲-۲x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۲\pm\sqrt{۲۴}}{۲}=\begin{cases}۱+\sqrt{۶} & \text{ق}\\ ۱-\sqrt{۶} & \text{ق}\end{cases}$$

۲۷) به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (خرداد ۹۴)

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ -x-1 & x<0 \end{cases}$$

☑پاسخ: مطابق شکل خطوط افقی $y=k\geq 0$ منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد شد.



۲۸) تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x)=\frac{1}{x}+3$, $g(x)=\frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟ (شهریور ۹۴)

☑پاسخ: اولاً تابع $f(x)$ یک به یک است چون

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 \;\to\; \frac{1}{x_1}+3=\frac{1}{x_2}+3\Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

حال معکوس آن را به دست می‌آوریم.

$$y=\frac{1}{x}+3\Rightarrow \frac{1}{x}=y-3\Rightarrow x=\frac{1}{y-3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x-3}=g(x)$$

۲۹) وارون پذیری تابع $y=\frac{2x+1}{x-1}$ را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه‌ی تابع وارون را به دست آورید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

☑پاسخ:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1)=(2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_2x_1-2x_2+x_1-1\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\frac{2x+1}{x-1}\Rightarrow yx-y=2x+1\Rightarrow yx-2x=y+1\Rightarrow x=\frac{y+1}{y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-2}$$

۳۰) نشان دهید تابع $f(x)=1+\sqrt[3]{x-5}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

☑پاسخ: اول باید نشان دهیم تابع وارون‌پذیر است، یعنی باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2:\; 1+\sqrt[3]{x_1-5}=1+\sqrt[3]{x_2-5}\Rightarrow \sqrt[3]{x_1-5}=\sqrt[3]{x_2-5}\Rightarrow x_1-5=x_2-5\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=1+\sqrt[3]{x-5}\Rightarrow y-1=\sqrt[3]{x-5}\Rightarrow (y-1)^3=(x-5)\Rightarrow x=(y-1)^3+5\Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^3+5$$

۳۱) ثابت کنید تابع $f(x)=(x-2)^2$, $x\geq 2$ وارون‌پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (خرداد ۹۱)

☑پاسخ:

اثبات معکوس پذیری

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow (x_1-2)^2=(x_2-2)^2 \longrightarrow |x_1-2|=|x_2-2| \xrightarrow{x\geq 2} x_1=x_2$$

$$y=(x-2)^2\Rightarrow \sqrt{y}=\sqrt{(x-2)^2}\Rightarrow \sqrt{y}=|x-2| \xrightarrow{x\geq 2} \sqrt{y}=x-2 \quad x=\sqrt{y}+2\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}+2$$

۳۲) وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون‌پذیری تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (شهریور ۹۲)

$$f(x)=\sqrt{x+3}-5$$

☑پاسخ:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2 \longrightarrow \sqrt{x_1+3}-5=\sqrt{x_2+3}-5\Rightarrow x_1+3=x_2+3\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\sqrt{x+3}-5\Rightarrow y+5=\sqrt{x+3}\Rightarrow (x+3)=(y+5)^2\Rightarrow x=(y+5)^2-3\Rightarrow f^{-1}(x)=(x+5)^2-3$$

۳۳) اگر $f(a)=۳ax-۵$ و نقطه‌ی $(۴,۳)$ روی نمودار تابع $f^{-۱}$ باشد، اولاً مقدار a را به دست آورید. ثانیاً ضابطه‌ی تابع وارون f را تعیین کنید.

☑پاسخ:

$$(۴,۳)\in f^{-۱} \Rightarrow (۴,۳)\in f \Rightarrow f(۳)=۳a(۳)-۵=۴ \Rightarrow ۹a=۹ \Rightarrow a=۱$$

$$f(x)=۳x-۵ \Rightarrow y=۳x-۵ \Rightarrow y+۵=۳x \Rightarrow x=\frac{y+۵}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۵}{۳}$$

نکته

۱) $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$

۲) در توابع‌ای با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ (توابع هموگرافیک) اگر $a+d=0$ باشد، آن‌گاه تابع و تابع معکوس با هم برابرند.

یعنی : $f(x)=f^{-۱}(x)$

۳۴)اگر $f(x)=۴x-۳$, $g(x)=x+۲$ تابع $(gof)^{-۱}$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

پاسخ:

$$y=۴x-۳ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{۴} \quad , \quad y=x+۲ \Rightarrow g^{-۱}(x)=x-۲$$

$$(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}=f^{-۱}\left(g^{-۱}(x)\right)=\frac{x-۲+۳}{۴}=\frac{x+۱}{۴}$$

۳۵) اگر $f(x)=۱+\sqrt{x}$, $g(x)=x^{۲}$, $x>۰$ آن‌گاه ضابطه‌ی $g^{-۱}of^{-۱}$ کدام است؟

☑پاسخ:

$$y=۱+\sqrt{x} \Rightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲} \quad , \quad y=x^{۲} \Rightarrow g^{-۱}(x)=\sqrt{x}$$

$$g^{-۱}of^{-۱}=\sqrt{(x-۱)^{۲}}=|x-۱|$$

۳۶) تابع وارون $y=x^{۳}$، تابع .... است. (دی ماه ۹۰)

☑پاسخ:

$$y=f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$$

۳۷)در ماشین زیر ضابطه تابع g را تعیین کنید.

$$x \longrightarrow \boxed{x^{۳}+۱} \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow x$$

☑پاسخ:

$$g(x)=f^{-۱}$$

$$f(x)=x^{۳}+۱ \Rightarrow y=x^{۳}+۱ \Rightarrow y-۱=x^{۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{y-۱}=x \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$$