

فصل، مقرر

احتمال

❖ درس اول: قانون احتمال کل

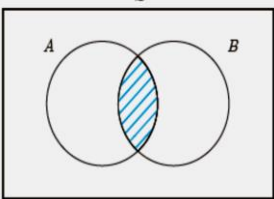
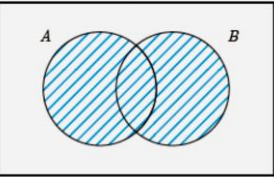
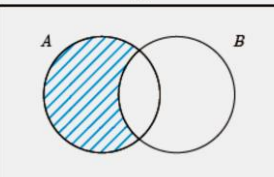
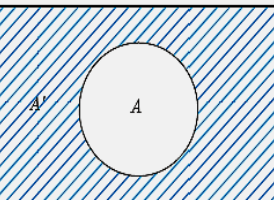
بارم فصل ۲:

شهریوردی	نوبت دوم	نوبت اول
۱/۵	۲	—

فصل ۲ درس ۱: قانون احتمال کل

یادآوری:

۹. پیشامدها و اعمال روی آنها:

نمودار ون	بیان توصیفی
	<p>اشتراک دو پیشامد:</p> <p>$A \cap B$ وقتی رخ می دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند</p>
	<p>اجتماع دو پیشامد:</p> <p>$A \cup B$ وقتی رخ میدهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامد ها) رخ دهند</p>
	<p>تفاضل دو پیشامد:</p> <p>$A - B$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B ندهد.</p>
	<p>متمم یک پیشامد</p> <p>$A'(A^c)$ وقتی رخ می دهد که پیشامد A ندهد.</p> <p>$P(A') = 1 - P(A)$</p>

۱. **پدیده تصادفی:** پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را نتوان قبل از انجام، به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲. **فضای نمونه:** مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می دهیم.

۳. **پیشامد تصادفی:** هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه ای S می نامیم

۴. **احتمال وقوع پیشامد یک پیشامد:**

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

۵. **رابطه محاسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۶. **پیشامدهای ناسازگار:**

اگر دو پیشامد A و B با هم رخ ندهند $A \cap B = \emptyset$ ، این تساوی به صورت زیر نوشته می شود:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۷. **احتمال شرطی:**

فرض کنیم A و B دو پیشامد باشند به طوریکه

$P(A) \neq 0$ در این صورت احتمال وقوع پیشامد A به

شرط آنکه بدانیم B رخ داده است را با نماد $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نمایش می دهیم و داریم:

۸. **پیشامد های مستقل:**

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B

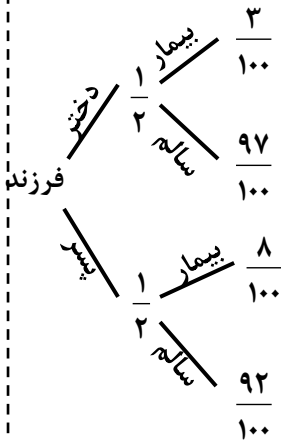
بر احتمال وقوع A تاثیر نگذارد. پیشامد A از پیشامد B

مستقل است، هرگاه: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(مثال ص ۱۴۶)

اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

☑ حل:



$$P = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{100} \right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{8}{100} \right) = \frac{11}{200}$$

(مثال ص ۱۴۷)

① ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

www.my-gars.ir

افراز (بازل) یک مجموعه:

*افراز یک مجموعه یعنی تبدیل کردن یک مجموعه به زیرمجموعه هایش
*زیرمجموعه های A_1, A_2, \dots, A_n یک افراز روی S درست می کنند به شرطی که:

۱. هیچ یک از زیر مجموعه ها تهی نباشد.

$$A_i \neq \emptyset \quad (1 \leq i \leq n)$$

۲. هیچ دو زیرمجموعه ای با هم اشتراک نداشته باشند.

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

۳. اجتماع همه زیرمجموعه ها مجموعه اولیه شود.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = S$$



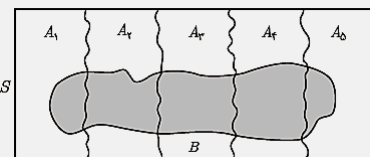
مثال ۱: مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می دهند.
مثال ۲: کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

قانون احتمال کل:

*تعریف عامیانه گاهی ممکن است انتخاب های غیر هم جنس داشته باشیم مثل چند ظرف (یا گروه، کیسه). که باید یکی را به تصادف انتخاب و از داخل آن شیء (یا فردی) را خارج کنیم بنابراین اول مسیر انتخاب ظرف (یا گروه، کیسه) سپس مسیر انتخاب شیء (یا فردی) طی می کنیم. برای این کار از نمودار درختی استفاده و اعداد موجود در هر شاخه را ضرب و اگر از شاخه ای به شاخه دیگر برویم اعداد را با هم جمع می کنیم.

*تعریف علمی: اگر پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n یک افراز روی فضای نمونه ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت با توجه به فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$



(تهرینی ص ۱۴۸)

① دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

② سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بسته سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بسته سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بسته سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟



(مثال ص ۱۴۸)

② فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir

③ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

⑤ مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال $\frac{45}{100}$ ، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال $\frac{1}{10}$ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال $\frac{3}{10}$ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند $\frac{1}{10}$ ، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند $\frac{6}{10}$ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند $\frac{3}{10}$ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

④ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A ، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A ، $\frac{4}{5}$ ، برای نوع B ، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C ، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

⑥ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟