فصل پنجم

کاربرد مشتق

- درس اول : اکسترمم های تابع
- درس دوم: بهینه سازی

بارم فصل۵:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور /دی
–	۳/۵	۳

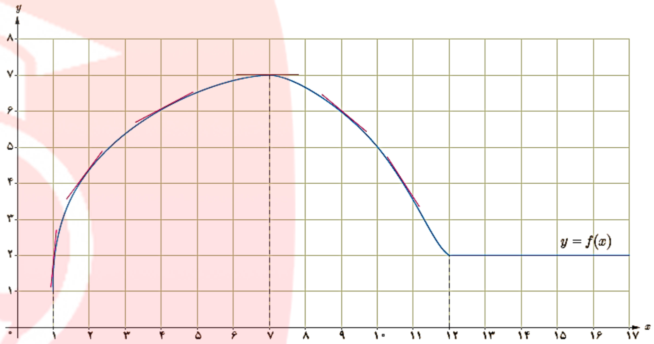
فصل ۵ درس ۱: اکسترمم های تابع

یادآوری:

*از فصل ۴ می دانیم که مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است.

(کاردرکلاس ص ۱۰۳)

تابع زیر را در نظر بگیرید :



الف) در بازهٔ $(1,7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f، مثبت است؛ بنابراین در این بازه علامت f' .... است.

ب) در بازهٔ $(7,12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خط‌های مماس بر نمودار f .... است؛ بنابراین در این بازه علامت f' .... است.

پ) در بازهٔ $(12,+\infty)$ که تابع، مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر .... است.

بررسی رفتار تابع به کمک مشتق:

*یکی از کاربرد های مشتق بررسی رفتار تابع است یعنی علاوه بر روش هایی که در فصل ۱ برای رفتار یک تابع (تعیین یکنوایی به عبارتی صعودی و نزولی بودن یک تابع) خواندیم در این فصل می توانیم رفتاریک تابع را از طریق مشتق گیری بررسی کنیم

*وقتی تابع مشتق پذیر است از طریق علامت مشتق می توانیم صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص کنیم.

آزمون یکنوایی تابع:

الف) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً صعودی است

ب) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود ومنفی باشد، آنگاه f در آن بازه اکیداً نزولی است

پ) در یک بازه از دامنه f اگر مقدار f' موجود وصفر باشد، آنگاه f در آن بازه تابعی ثابت است

مراحل تعیین رفتار تابع در توابع پیوسته:

۱) از تابع مشتق می گیریم

۲) مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه ها را می یابیم

۳) تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم.

در بازه هایی که مشتق + باشد یعنی تابع اکیدا صعودی است.

در بازه هایی که مشتق − باشد یعنی تابع اکیدا نزولی است.

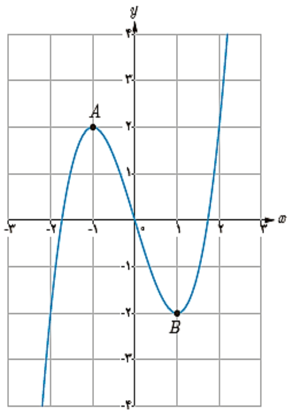
(مثال ص ۱۰۴)

الف) تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه ها اکیداً نزولی است؟

☑حل:

در اینجا ازدو روش رفتار این تابع را بررسی می کنیم روش اول از طریق نمودار تابع است که در فصل یک آموختیم .البته رسم نمودار تابع های درجه سوم در حالت کلی در زمره اهداف کتاب حاضر نیست.

روش اول: نمودار تابع



اکیداً صعودی	$(-\infty,-1]$
اکیداً نزولی	$[-1,1]$
اکیداً صعودی	$[1,+\infty)$

روش دوم: مشتق تابع

۱) از تابع مشتق می گیریم:

$$f(x)=x^3-3x \to f'(x)=3x^2-3$$

۲) مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم و ریشه ها را می یابیم

$$f'(x)=0 \to 3x^2-3=0 \to \begin{cases} x=+1 \\ x=-1 \end{cases}$$

۳) تابع مشتق را تعیین علامت می کنیم.

در سطر سوم جدول مقدار تابع را به ازای ریشه ها به دست می آوریم

$$y=x^3-3x \xrightarrow[x=-1]{x=+1} \begin{cases} y=-2 \\ y=+2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۲−	$\nearrow$	$-\infty$
		اکیدا صعودی		اکیدا نزولی		اکیدا صعودی	

(تمرین ۱و۲ص ۱۱۲)

①بزرگترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x)=x^3-12x+4$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

☑حل:

$$f(x)=x^3-12x+4 \qquad f'(x)=3x^2-12<0 \Rightarrow x^2<4$$
$$\Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow x\in(-2,2)$$

مشتق در این بازه منفی است. بنابراین، بزرگ ترین بازه ای که تابع در آن اکیداً نزولی است، عبارت است از $[-2,2]$

②با تشکیل جدول تغییرات تابع $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید است؟

☑حل:

$$g(x)=\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow g'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}, g'(x)=0 \Rightarrow x=0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

تابع در بازه $[-\infty,0]$ اکیدا صعودی و در بازه $[0,+\infty]$ اکیدا نزولی است.

نقاط بحرانی تابع:

***نقطه بحرانی:** نقطه درون دامنه تابع که مشتق صفراست یا مشتق ندارد.

***شناسایی نقاط بحرانی از روی شکل:**

الف) مشتق صفر است

ب) مشتق ندارد

*در یک تابع ثابت ،تمام نقاط بحرانی اند زیرا در تمام نقاط مشتق صفر است.

(تمرین ۷ص ۱۱۲)

⑦نمودار تابعی مانند f با دامنه $\mathbb{R}$ را رسم کنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f، یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟

***شناسایی نقاط بحرانی از روی ضابطه:**

*ابتدا مشتق تابع را پیدا می کنیم و برابر صفر قرار می دهیم

*اگر تابع روی بازه تعریف شود ابتدا و انتهای بازه بحرانی هستند

(تمرین ۳ص ۱۱۲)

③نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

☑حل:

$$f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \rightarrow f'(x)=\frac{-\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{۴-x^۲}}=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$$

$$f'(x)=۰ \rightarrow \frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}=۰ \rightarrow x=۰$$

دامنه تابع $\left[-۲,۲\right]$ می باشد پس نقاط به طول $۰,۲,-۲$ نقاط بحرانی تابع هستند

ب) $g(x)=x^۳+۳x^۲-۴$

پ) $h(x)=\sqrt[۳]{x}$

اکسترمم تابع:

***اکسترمم:** یعنی مینیمم یا ماکزیمم تابع

***انواع اکسترمم:**

الف) اکسترمم نسبی (ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی)

ب) اکسترمم مطلق(ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق)

اکسترمم نسبی تابع:

* **ماکزیمم نسبی :** وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از مقادیر نقاط همسایگی اش بیشتر یا مساوی باشد می گوییم تابع در آن نقطه ماکزیمم نسبی دارد

* **مینیمم نسبی:** وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از مقادیر نقاط همسایگی اش کمتر یا مساوی باشدمی گوییم تابع در آن نقطه مینیمم نسبی دارد

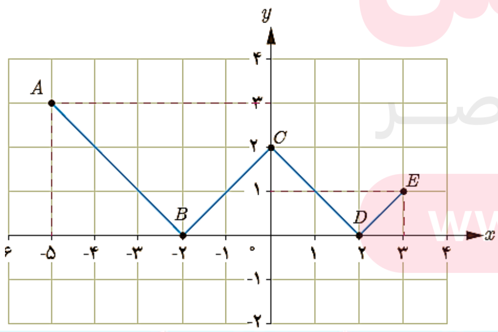
تشخیص اکسترمم نسبی از روی نمودار:

در نمودار روی‌نقطه مورد نظر یک خط افقی کوچک رسم کنید اگر نمودار تابع اطراف این نقطه، پایین یا روی خط افقی بیفتند این نقطه را ماکزیمم نسبی می گوییم. اگر نمودار تابع اطراف این نقطه، بالا یا روی خط افقی بیفتند این نقطه را مینیمم نسبی می گوییم.

(کاردرکلاس ص ۱۰۵)

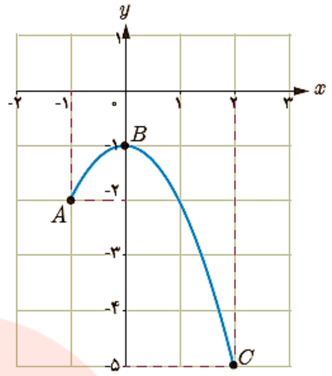
نوع اکسترمم‌های نسبی هر یک از توابع زیر را در نقاط مشخص شده تعیین کنید و جدول‌ها را کامل کنید.

الف) $f(x)=\left|\,|x|-۲\,\right| \;,\; x\in[-۵,۳]$



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نه max نسبی و نه min نسبی	–	–
B	min نسبی	۰	$f'(-۲)$ موجود نیست
C	...	۲	...
D	...	...	...
E	...	–	–

ب) $g(x) = -x^2 - 1 \ , \ x \in [-1, 2]$



نقطه	نوع اکسترمم نسبی	مقدار اکسترمم نسبی	مقدار مشتق
A	نقطه اکسترمم نسبی نیست	−	−
B	max نسبی	...	$f'(0)$ برابر صفر است
C	...	−	−

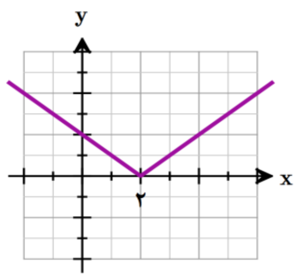
تذکر:

*هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

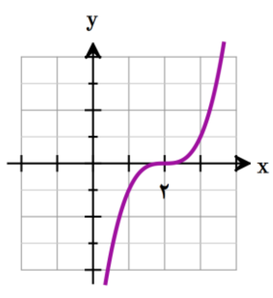
* هر نقطه بحرانی ممکن است نقطه اکسترمم نسبی باشد یا نباشد

مثال:

در شکل ۱ نقطه به طول $x = 2$ هم بحرانی است هم اکسترمم نسبی ولی در شکل ۲ نقطه به طول $x = 2$ بحرانی است اما اکسترمم نیست



(۱)



(۲)

*تابع فقط در نقاط زیر اکسترمم نسبی دارد :

۱) مقدار مشتق صفر باشد($f'(a) = 0$)

۲) مشتق موجود نباشد

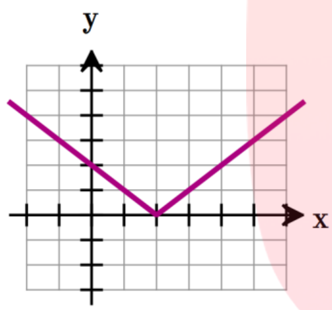
*بنابراین:

اگر تابع f در نقطه به طول اکسترمم نسبی داشته باشدو $f'(a)$ موجود باشد،آنگاه $f'(a) = 0$ ا

(کاردرکلاس ص ۱۰۷)

① الف) با رسم نمودار تابع $f(x) = |x - 2|$ ، نشان دهید که f در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد.

☑حل:



ب) آیا $f'(2)$ موجود است؟ چرا؟

☑حل:

با توجه به شکل $f'(2)$ موجود نیست چون مشتق چپ و راست برابر نیست

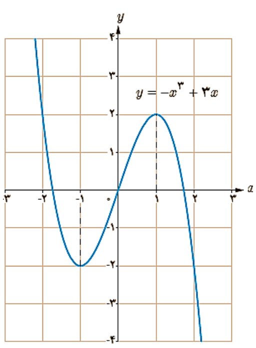
پ) آیا $x = 2$ طول نقطهٔ بحرانی تابع است؟ چرا؟

☑حل:

بله. زیرا تابع در $x = 2$ مشتق ناپذیر است

② نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کرده‌ایم.

الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.



ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید.

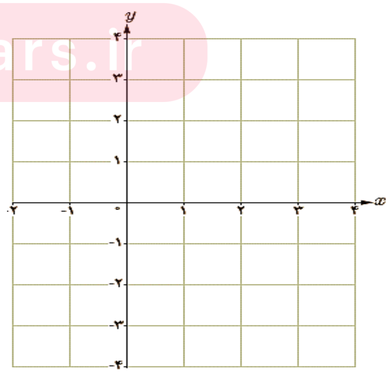
پ) با توجه به الف و ب، درستی قضیه قبل را در مورد این تابع بررسی کنید.

③ تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x+2$ را در نظر بگیرید.
f همواره مشتق‌پذیراست.

الف) $f'(x)$ را بدست آورید.

ب) ریشهٔ معادلهٔ $f'(x)=0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به‌دست آید.

پ) با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟



آزمون مشتق اول در تعیین اکسترمم نسبی:

۱) در توابعی که مشتق دارند مشتق را مساوی صفر قرار دهیم وریشه ها را می یابیم

۲) مشتق را تعیین علامت می کنیم

۳) با توجه به تغییر علامت مشتق طول نقاط اکسترمم نسبی را مشخص می کنیم

*اگر مشتق تغییر علامت دهدطول نقطه ریشه ساده مشتق است :

الف) اگر علامت مشتق از + به − تغییر کند ماکزیمم نسبی است

$$+\nearrow\searrow-$$
$$Max$$

ب) اگر علامت مشتق از − به +تغییر کند مینیمم نسبی است

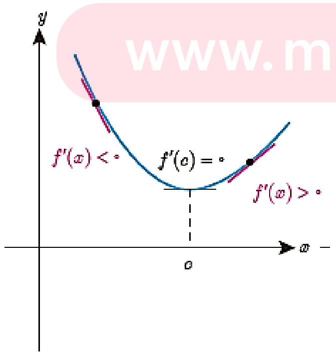
$$-\searrow\nearrow+$$
$$Min$$

*اگر مشتق تغییر علامت ندهد طول نقطه ریشه مضاعف مشتق است و علامت مشتق همواره + یا همواره − است بنابراین اکسترمم نسبی نداریم.

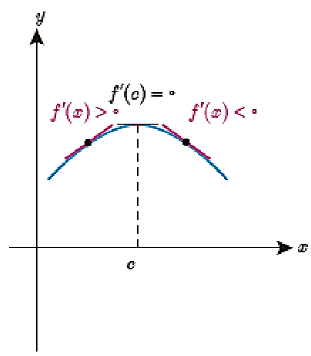
$$+\nearrow+\nearrow \qquad -\searrow-\searrow$$

۴) برای رسم نمودار بعد از مشخص کردن اکسترمم تابع، نقاط کمکی را می یابیم و نمودار را رسم می کنیم

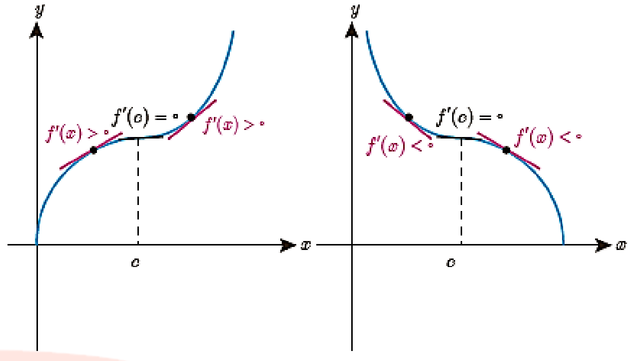
مثال:



طول مینیمم نسبی : $x=c$



طول ماکزیمم نسبی : $x=c$



$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

$x=c$: نه طول ماکزیمم نسبی است و نه مینیمم نسبی

(کاردرکلاس ۱ و ۲ ص ۱۰۸)

در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

۱) $f(x)=-x^2-2x$

☑حل:

۱) مشتق را مساوی صفر قرار می دهیم وریشه ها را می یابیم

$f(x)=-x^2-2x \to f'(x)=-2x-2$

طول نقطهٔ بحرانی $f'(x)=0 \to -2x-2=0 \to \boxed{x=-1}$

۲) مشتق را تعیین علامت می کنیم

در سطر سوم جدول مقدار تابع را به ازای ریشه ها به دست می آوریم $y=-x^2-2x \xrightarrow[x=-1]{} y=+1$

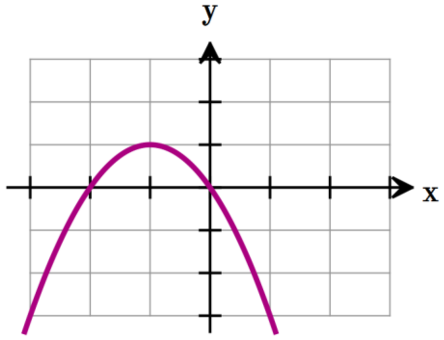
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

Max نسبی

۳) ماکزیمم نسبی $[-1,1]$

۴) نقاط کمکی و رسم نمودار تابع

$$y=-x^2-2x \xrightarrow[x=-2]{x=0} \begin{cases} y=0 \to (0,0) \\ y=0 \to (-2,0) \end{cases}$$



۲) $f(x)=x^3-3x^2$

(تمرین ۴ ص ۱۱۲)

④ در هر یک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به‌دست آورید و سپس جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

☑حل:

$f(x)=x^3+3x^2-9x-10 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-9=0$

$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=+1 \\ x=-3 \end{cases}$ (نقاط بحرانی تابع)

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	۱۷	↘	-15	↗	$+\infty$

max نسبی — min نسبی

ب) $g(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$

پ) $h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲$

☑حل:

$h(x) = -x^۳ - ۳x + ۲ \Rightarrow y'(x) = -۳x^۲ - ۳ < ۰ \Rightarrow$

تابع همواره نزولی اکید است و بنابراین فاقد ماکزیمم و مینیمم نسبی است.

(تمرین ۶ ص ۱۱۲)

اگر نقطهٔ $(۲,۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید.

☑حل:

$f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$

$(۲,۱) \in f \Rightarrow f(۲) = ۱ \Rightarrow ۸ + ۴b + d = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$

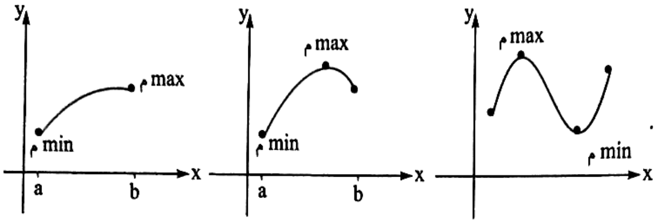
$f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \overset{f'(۲)=۰}{\Rightarrow} ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳ \Rightarrow d = ۵$

اکسترمم مطلق تابع:

* **ماکزیمم مطلق:** وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از تمامی مقادیر نقاط دیگر بیشتر یا مساوی باشد می گوییم تابع در آن نقطه ماکزیمم مطلق دارد

* **مینیمم مطلق:** وقتی مقدار تابع(عرض نقطه) از تمامی مقادیر نقاط دیگر کمتر یا مساوی باشد می گوییم تابع در آن نقطه مینیمم مطلق دارد

مثال:



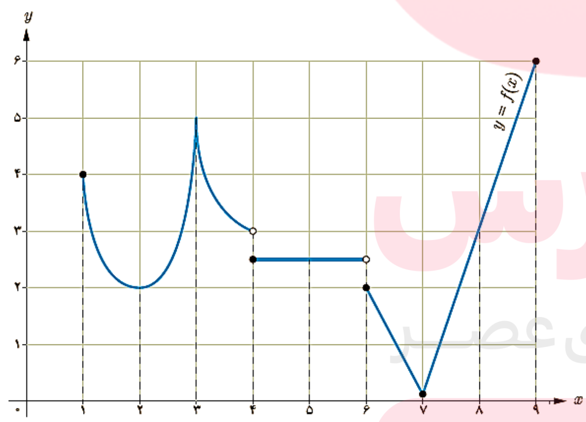
تفاوت و روابط اکسترمم نسبی و مطلق:

۱برای تشخیص اکسترمم نسبی به نقاط همسایه نگاه می کنیم ولی اکسترمم مطلق به کل نقطه های دامنه نگاه می کنیم.

۲اکسترمم مطلق می تواند در سرو ته بازه باشد ولی اکسترمم نسبی نمی تواند.

(کاردرکلاس ص ۱۱۰)

1 با تکمیل جدول زیر، اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع زیر و همچنین نقاط بحرانی آن را در نقاط مشخص شده تعیین کنید.



☑حل:

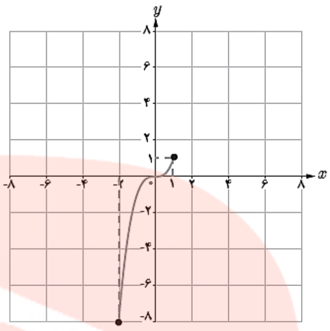
طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
max مطلق	×	×	×	×	×	×	×	×	✓
min مطلق	×	×	×	×	×	×	✓	×	×
max نسبی	×	×	✓	×	✓	×	×	×	×
min نسبی	×	✓	×	✓	✓	×	✓	×	×
نقطه بحرانی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓

② به کمک رسم نمودار تابع، مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق تابع‌های زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $t(x) = x^3 \;\; ; \;\; x \in [-2,1]$

☑حل:

ابتدا نمودار را رسم می کنیم:



اکسترمم نسبی ندارد.

مقدار ماکزیمم مطلق ۱

و مقدار مینیمم مطلق ۸- است.

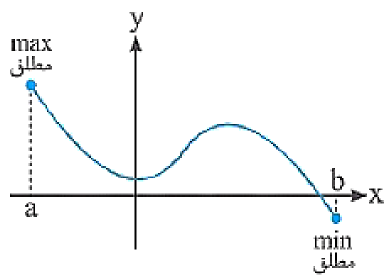
ب) $g(x) = -x^2 \;\; ; \;\; x \in [-2,3]$

پ) $u(x) = \dfrac{1}{x}$

قضیه:

*اگر تابع در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق دارد و هم مینیمم مطلق.

مثال:



(فعالیت ص ۱۱۱)

به کمک رسم نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ در بازه $(-2,3)$، نقاط اکسترمم مطلق را تعیین کنید.

روش پیدا کردن اکسترمم مطلق:

۱.مشتق تابع را به دست آورده و نقاط بحرانی را می یابیم

۲. مقدار تابع را می یابیم

۳. در عرض بزرگ ترین عدد به دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک ترین آنها مقدار مینیمم تابع است

(تمرین ۵ ص ۱۱۲)

⑤ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13 \;\; ; \;\; x \in [-1,2]$

☑حل:

$$f'(x) = -6x^2 + 18x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0, -1, 2 \\ x = 3 \notin [-1,2] \end{cases}$$

طول نقاط بحرانی تابع عبارت‌اند از صفر، ۱- و ۲.

x	-1	0	2
$f(x)$	-2	-13	7

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق ۷ و مقدار مینیمم مطلق ۱۳- است.

ب) $g(x) = x^۳ + ۲x - ۵ \;\; ; \;\; x \in [-۲,۱]$

☑حل:

$g(x) = x^۳ + ۲x - ۵ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۲ \neq ۰ \Rightarrow x = -۲ \;,\; ۱$

x	-۲	۱
$g(x)$	-۱۷	-۲

بنابراین مقدار ماکزیمم مطلق ۲- و مقدار مینیمم مطلق ۱۷- است.

(مثال ص ۱۱۱)

نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازه $[-۱,۳]$ تعیین کنید.

فصل ۵ درس ۲: بهینه سازی

بهینه سازی:

یکی از کاربردهای ریاضی، بهینه سازی است یعنی ایجاد بهترین حالت ممکن بنابراین مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم،سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد

مراحل حل مسائل بهینه سازی:

۱.درصورت نیاز ترسیم شکل برای درک بهتر
۲.نوشتن مسئله به صورت تابع یک متغیره
۳. مشتق تابع را مساوی صفر قرار می دهیم.
۴.یافتن نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه
۵.رسم جدول تغییرات (تعیین علامت) و یافتن اکسترمم مطلق

(مثال۱و۲و۳ و ۴ و ۵ص ۱۱۵ و۱۱۴ و ۱۱۶ و ۱۱۷)

1 نشان دهید در بین تمام مستطیل های با محیط ثابت ۱۴ سانتی متر، مستطیلی بیشترین مساحت رادارد که طول و عرض آن هم اندازه باشند.

2 می خواهیم از گوشه های یک ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ سانتی متر مربع های کوچکی به ضلع x ببریم و بعد از تاکردن گوشه صفحه آن را به شکل یک جعبه در باز در آوریم مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

3 می خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن $۱۰m^۳$ بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است .عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینه مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟

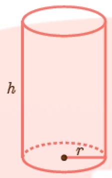
④ غلظت یک داروی شیمیایی در خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $c(t)=\frac{۳t}{t^{۳}+۲۷}$ به دست می آید .چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

⑤آرتا درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک ترین نقطه ساحل یعنی A معادل ۳ کیلومتر است . او می خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری نقطه A قرار دارد فرض کنید سرعت حرکت قایق $۲km/h$ و سرعت پیاده روی آرتا $۴km/h$ باشد .اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد در چه نقطه ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده روی کند؟

(کاردرکلاس ۱و۲و۳و۴ص ۱۱۸)

① می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

☑حل:



حجم استوانه $۱(lit)=۱۰۰۰\ cm^{۳}$

$$\Rightarrow \pi r^{۲}h=۱۰۰۰\ (cm^{۲}) \Rightarrow h=\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده $= S$: مساحت کل استوانه

$$S(r)=\pi r^{۲}+۲\pi rh \Rightarrow S(r)=\pi r^{۲}+۲\pi r(\frac{۱۰۰۰}{\pi r^{۲}})$$

$$\Rightarrow S(r)=\pi r^{۲}+\frac{۲۰۰۰}{r}$$

$$S'(r)=۲\pi r+\frac{۲۰۰۰}{r^{۲}}=۰ \Rightarrow \pi r^{۳}=۱۰۰۰$$

$$\Rightarrow r=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}$$

r	۰		$\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}$		$+\infty$
S'		$-$	۰	$+$	
S	$+\infty$	↘	$۳۰\sqrt[۳]{\pi}$	↗	

پس اگر شعاع قاعده و همچنین ارتفاع استوانه هر دو برابر $r=\frac{۱۰}{\sqrt[۳]{\pi}}\simeq ۶/۸۳\,cm$ گرفته شوند، کمترین مقدار فلز مصرف خواهد شد.

② هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $۳۲۰v^{۲}$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

☑حل :

اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم :

هزینه t ساعت حرکت : $C = 800000t + (320v^2)t$

هزینه x کیلومتر حرکت : $C = 800000(\frac{x}{v}) + (320v^2)(\frac{x}{v})$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت : $C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$

$$C'(v) = \frac{800000}{v^2} + 320 = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{10000}{4} \Rightarrow v = 50$$

v	0		50		$+\infty$
C'		$-$	0	$+$	
C	$+\infty$	$\searrow$	32000	$\nearrow$	$+\infty$

بنابراین، اگر قطار با سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدارممکن خواهد بود.

③ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

☑حل:

$x - y = 10 \Rightarrow y = x - 10$

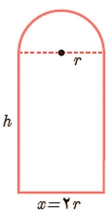
$P = xy = x(x-10) = x^2 - 10x \quad p'(x) = 2x - 10 = 0$

$x = 5 \,,\, y = -5$

④ در برخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل مستطیل و نیم دایره‌ای بر روی آن می‌باشد به طوری‌که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

☑حل:

باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



محیط $= 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت پنجره $S =$ مساحت مستطیل + مساحت نیم دایره

$$S = xh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}) + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$\Rightarrow S(r) = -(\frac{\pi + 4}{2})r^2 + \frac{9}{2}r$$

$$S'(r) = -(\pi + 4)r + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow r = \frac{9}{2(\pi + 4)}$$

r	0		$\frac{9}{2(\pi+4)}$		$\frac{9}{2(\pi+2)}$
$S'(r)$		$+$	0	$-$	
$S(r)$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{8(\pi+4)}$	$\searrow$	$\frac{81\pi}{8(\pi+2)^2}$

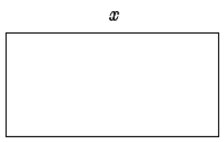
پس اگر $r = \frac{9}{2(\pi + 4)} \simeq 32/14\ cm$ این پنجره بیشترین نوردهی را خواهد داشت.

(تمرین ص ۱۲۰)

① کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

☑حل:



$\frac{10000}{x} = y$ (واحد بر حسب میلیون تومان است)

$$C_{(x)} = 2x \times 2 + 2 \times \frac{10000}{x} \times 8 \Rightarrow C_{(x)} = 4x + \frac{160000}{x}$$

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوار کشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

☑حل:

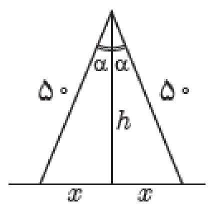
$$C'_{(x)} = 4 - \frac{160000}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 40000 \Rightarrow x = 200 \Rightarrow y = \frac{10000}{200} = 50$$

x	0		200	
$C'(x)$		$-$	0	$+$
$C(x)$		$\searrow$	1600	$\nearrow$

بنابراین اگر طول دیوارهای شمالی و جنوبی ۲۰۰ و عرض آن برابر ۵۰ متر باشد، هزینه دیوارکشی،حداقل مقدار ممکن خواهد بود.

② الف) می خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی الساقین را نرده کشی کنیم به طوری که قاعدهٔ مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

☑حل:



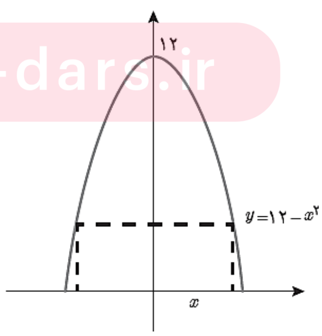
$$h = \sqrt{2500 - x^2}$$

$$S_{(x)} = x\sqrt{2500 - x^2} \Rightarrow S'_{(x)} = \sqrt{2500 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2500 - x^2}}$$

$$s'(x) = 0 \Rightarrow 2500 - x^2 = x^2$$

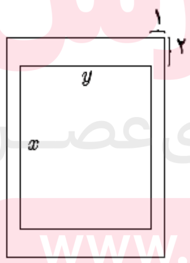
$$x^2 = \frac{2500}{2} \Rightarrow x = \frac{50}{\sqrt{2}} \Rightarrow S\left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right) = 1250$$

③ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.



④ هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $32cm^2$ خواهد بود . هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم ایت حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه $2cm$ و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

☑حل:



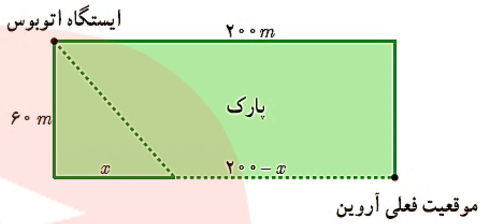
$$xy = 32$$

$$S = (y+2)(x+4) = \left(\frac{32}{x} + 2\right)(x+4) = 40 + \frac{128}{x} + 2x$$

$$S'_{(x)} = -\frac{128}{x^2} + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8 \quad \text{و} \quad y = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+4 = 12 \\ y+2 = 6 \end{cases}$$ ابعاد صفحه :

⑤آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲m / s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



☑حل:

$$t(x)=\frac{۲۰۰-x}{۳}+\frac{\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}}{۲}$$

$$t'(x)=-\frac{۱}{۳}+\frac{x}{۲\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}}=۰$$

$$\Rightarrow ۳x=۲\sqrt{۳۶۰۰+x^{۲}}\Rightarrow x=۲۴\sqrt{۵}\simeq ۵۳/۶۷$$

x	۰		$۲۴\sqrt{۵}$		۲۰۰
$t'(x)$		−		+	
$t(x)$	$۹۶\frac{۲}{۳}$	↘	$\frac{۲۰۰}{۳}+۱۰\sqrt{۵}$	↗	$\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۳۶۰۰}\simeq ۱۰۴/۴$

اگر $x = ۲۴\sqrt{۵} \simeq ۵۳ / ۶۷$ باشد.آروین در کمترین زمان ممکن به ایستگاه خواهد رسید.