فصل چهارم

مشتق

- درس اول : آشنایی با مفهوم مشتق
- درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی
- درس سوم: آهنگ تغییر

گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

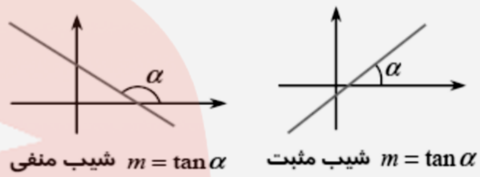
بارم فصل٤:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور /دی
۳ تا صفحه ۷٦	۵	۵

فصل ۴ درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق

یادآوری شیب خط:

*شیب خط، تانژانت زاویه ای است که خط با جهت مثبت محورxها می سازد.

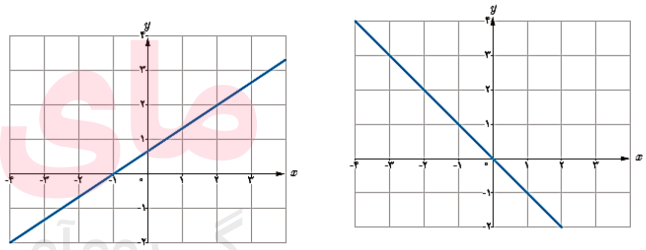


* برای به دست آوردن شیب و معادله خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad y = m(x - x_1) + y_1$$

(فعالیت ۱ص ۶۶)

① شیب هر یک از خط های داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که کدام یک مثبت و کدام یک منفی است؟



خط مماس بر منحنی:

خط مماس دارای شرایط زیر است:

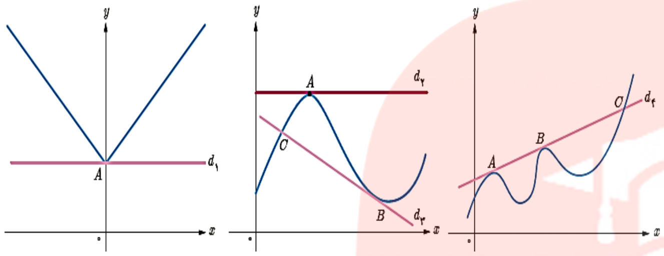
۱.منحنی در نقطه تماس باخط ، تیز و گوشه دار نباشد.

۲. منحنی در نقطه تماس باخط ، توخالی نباشد.(منحنی پیوسته باشد)

۳. منحنی در نقطه تماس باخط ، فقط دریک نقطه مشترک باشد.(مماس قائم نداشته باشد)

(مثال۱ص ۶۷)

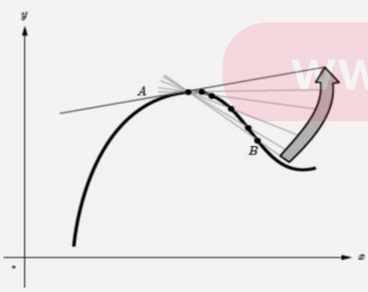
خط های d_1 تا d_4را درنظربگیرید و خط های مماس را مشخص کنید.



شیب خط مماس بر منحنی:

*در نمودار تابع $y = f(x)$ نقطه $A(a, f(a))$ را روی منحنی در نظر می گیریم .خط هایی که از A به نقاط دیگر منحنی وصل می کنیم را یک خط قاطع می نامیم.هرچه نقطه Bبه Aنزدیک تر باشد، خط قاطع AB به خط مماس شبیه تر می شود

*نزدیک شدن نقطهA به نقطه B ، مثل مفهوم میل کردن در حد است .بنابراین خط مماس ، حد خط های قاطع است به شرطی که $B \to A$ میل کند



*شیب خط مماس همان حد شیب خط قاطع است وقتی که $B \to A$ میل می کند.

*مشتق هم همان شیب خط مماس است

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

***شیب خط مماس مورب(مایل):**

۱)اگر خط مماس با جهت مثبت محور x ها زاویه تند بسازد، شیب مثبت است و هر چه خط عمودی تر شود شیبش بیشتر می شود

۲)اگر خط مماس با جهت مثبت محور xها زاویه باز بسازد، شیب منفی است و هر چه خط عمودی تر شود شیبش کمتر می شود

***شیب خط مماس قائم(موازی محور y ها):**

اگر خط با جهت مثبت محور xها زاویه قائمه (90°) بسازد، شیب تعریف نشده است

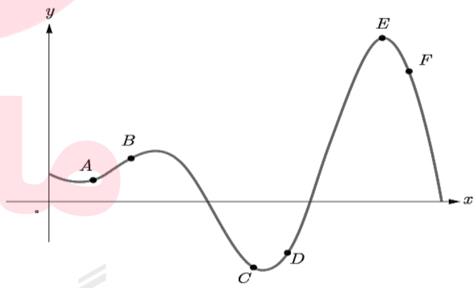
***شیب خط مماس افقی(موازی محور x ها):**

اگر خط با جهت مثبت محور xها زاویه نیم صفحه (180°) بسازد، شیب صفراست

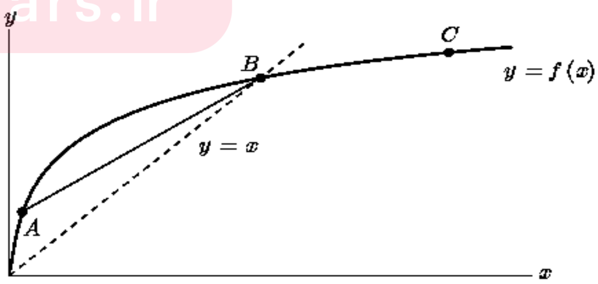
(تمرین ۲و۳و۴و۵و۷ص ۷۵)

② نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

نقطه	شیب
	-۳
	-۱
	۰
	$\frac{1}{2}$
	۱
	۲



③ برای نمودار $y=f(x)$ در شکل زیر شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را از کوچک‌ترین به بزرگ‌ترین مرتب کنید.



الف) شیب نمودار در نقطه A

ب) شیب نمودار در نقطه B

پ) شیب نمودار در نقطه C

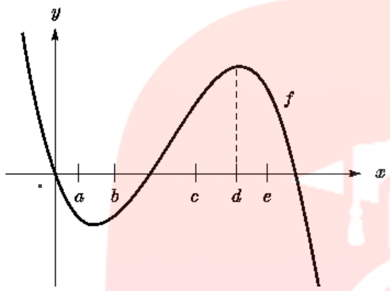
ت) شیب خط AB

ث) شیب خط $y=2$

ج) شیب خط $y=x$

شیب‌های داده شده از «الف» تا «ج» را به ترتیب m_1 و m_2 و ... و m_6 در نظر بگیرید.

④ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a,b,c,d و e را با مشتق‌های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f'(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵
	-۲

⑦ نقاط A,B,C,D,E و F را روی منحنی زیر در نظر می‌گیریم. در مورد شیب منحنی در این نقاط کدام گزاره درست و کدام یک نادرست است؟

الف) شیب منحنی در همه این نقاط مثبت است.

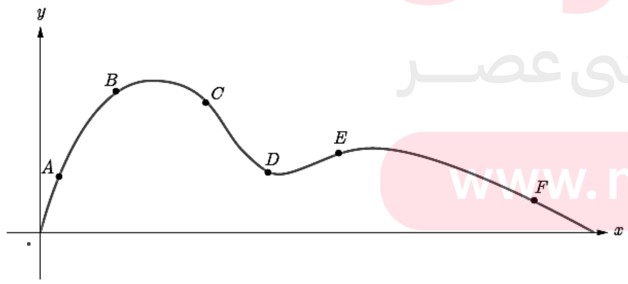
ب) $m_A < m_B$ (شیب خط مماس بر منحنی در نقطه A را با m_A نمایش داده‌ایم)

پ) $m_E < m_B < m_A$

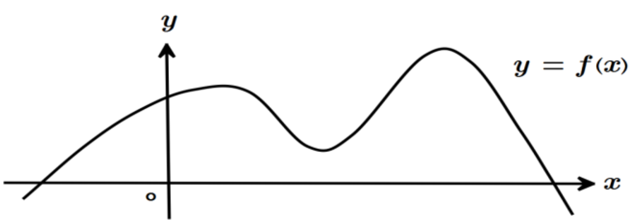
ت) شیب منحنی در نقاط D,F و C منفی است.

ث) $m_F < m_D < m_C$

ج) $m_C < m_D < m_F < m_E < m_B < m_A$



⑤ نقاطی مانند A,B,C,D,E,F و G را روی نمودار $y=f(x)$ مشخص کنید به طوری که :



مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

الف) A، نقطه‌ای روی نمودار است که شیب خط مماس بر نمودار در آن منفی است.

ب) B نقطه ای روی نمودار تابع است که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی است.

پ) C نقطه ای روی نمودار است که مقدار تابع در آنجا صفر است ولی مقدار مشتق در آن مثبت است.

ت) D نقطه‌ای روی منحنی است که مشتق در آنجا صفر است.

ث) نقاط E و F نقاط متفاوتی روی منحنی هستند که مشتق یکسان دارند.

ج) G نقطه‌ای روی منحنی است که مقدار تابع در آنجا مثبت ولی مقدار مشتق منفی است.

تعریف مشتق تابع f در نقطه a:

*مشتق تابع f در نقطه a که آن را با $f'(a)$ نشان می دهیم برابراست با شیب خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ مقدار آن را از رابطه های زیر می یابیم:

$$* \; f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

*در موقعیت های مختلف، ممکن است یکی از این دو روش بر دیگری به دلیل ساده تر بودن محاسبات برتری داشته باشد.

* حدهای تعریف مشتق همیشه دارای ابهام $\frac{۰}{۰}$ است و باید آن را رفع ابهام کنیم.

(مثال ص ۷۲)

مشتق تابع $f(x)=-x^۲+۱۰x$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x=۳$ به دست آورید.

☑حل:

مقدار تابع: $f(۳)=-۳^۲+۱۰(۳)=-۹+۳۰=۲۱$

مشتق تابع: $f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{-x^۲+۱۰x-۲۱}{x-۳}\xrightarrow{x=۳}\frac{۰}{۰}$$

رفع ابهام: $\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(-x+۷)}{\cancel{x-۳}}=\lim_{x\to ۳}(-x+۷)=۴$

$\rightarrow \boxed{f'(۳)=۴}$

(مثال ص ۷۳)

اگر $f(x)=x^۲$، $f'(۳)$ را به دو روش به‌دست آورید.

☑حل: روش اول:

مقدار تابع: $f(۳)=۳^۲=۹$

مشتق: $f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\frac{۰}{۰}$

رفع ابهام: $\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{x-۳}}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$

$\rightarrow \boxed{f'(۳)=۶}$

روش دوم:

$$\begin{cases} f(۳)=۳^۲=۹ \\ f(۳+h)=(۳+h)^۲=h^۲+۶h+۹ \end{cases}$$

مشتق: $f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h\cancel{+۹}\cancel{-۹}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۶h}{h}=\frac{۰}{۰}$$

رفع ابهام: $\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{h}(h+۶)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to ۰}(h+۶)=۶$

$\rightarrow \boxed{f'(۳)=۶}$

(تمرین ۶ ص ۷۶)

⑥ اگر $f(x)=x^۳-۲$، $f'(-۱)$ را به‌دست آورید.

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

معادله خط مماس بر منحنی:

*معادله خط مماس بر منحنی شبیه معادله خط می باشد بنابراین:

$$y = m\left(x - x_1\right) + y$$

$$\underset{\substack{\text{شیب مماس}\\\text{(مشتق)}}}{f'(a)}\left(\underset{\substack{\text{طول}\\\text{نقطه}}}{x - a}\right) + \underset{\substack{\text{عرض}\\\text{نقطه}}}{f(a)} = y$$

(مثال ص ۷۲)

معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A\left(2, f(2)\right)$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

☑حل:

ابتدا باید شیب مماس که همان مشتق تابع است را بیابیم.

مقدار تابع: $f(2) = -2^2 + 10(2) = -4 + 20 = 16$

مشتق تابع: $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x - 2} \xrightarrow{x=2} \dfrac{0}{0}$

رفع ابهام: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(-x+8)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x \to 2}(-x+8) = 6$

$\rightarrow \boxed{f'(2) = 6}$

حالا با توجه به شیب (6) و نقطه $(2,16)$ معادله خط مماس را می نویسیم:

$y = 6(x-2) + 16 \rightarrow \boxed{y = 6x + 4}$

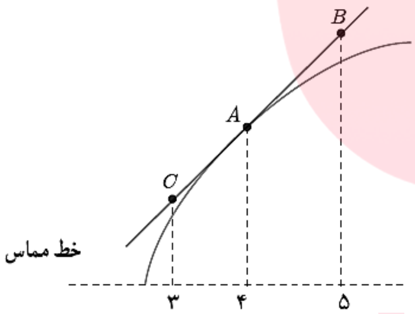
(کار در کلاس ص۷۲)

معادله خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 3$ را در نقطه‌ای به طول ۲- بنویسید.

(تمرین۱ و۸ص ۷۵)

① اگر $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$، $f'(2)$ را به دست آورید و معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.

⑧ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم : $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$ با توجه به شکل مختصات نقاط B, A و C را بیابید.



☑حل:

$f(4) = 25 \rightarrow A(4, 25)$

$f'(4) = 1/5$

$AC \rightarrow 1/5 = \dfrac{y_c - 25}{3 - 4} \rightarrow y_c = 23/5$

$AB \rightarrow 1/5 = \dfrac{y_B - 25}{5 - 4} \rightarrow y_B = 26/5$

$B\left|\begin{matrix}5\\26/5\end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix}3\\23/5\end{matrix}\right.$

فصل ٤ درس ٢: مشتق پذیری و پیوستگی

مشتق پذیری تابع:

*مشتق همان شیب خط مماس است پس اگر تابع در یک نقطه شرایط خط مماس (درس ۱) را داشت می گوییم تابع در آن نقطه مشتق پذیر است.

*برای آنکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

۱.تابع پیوسته باشد

۲. مشتق چپ و راست موجود و برابر باشد(عددباشد)

مشتق چپ و مشتق راست:

*مشتق چپ: همان شیب نیم مماس چپ در یک نقطه است. که به صورت زیر نمایش می دهیم:

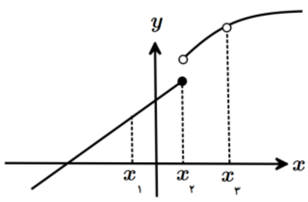
$$f'_-(a) == \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

*مشتق راست: همان شیب نیم مماس راست در یک نقطه است. که به صورت زیر نمایش می دهیم:

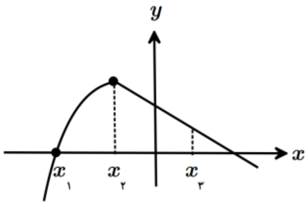
$$f'_+(a) == \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(کار در کلاس ص۸۲)

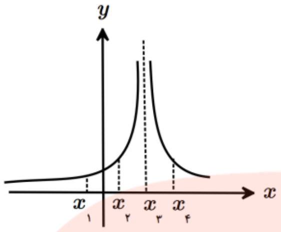
در شکل های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق‌پذیر نیست.

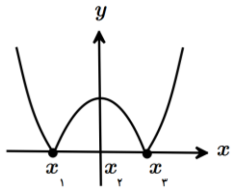


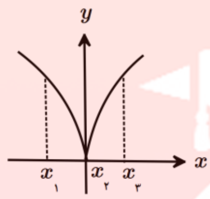
☑حل: نقاط x_2 , x_3 ، زیرا در این نقاط ناپیوسته است.

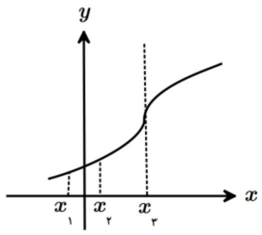


☑حل: نقطه x_3، زیرا نقطه گوشه ای است









☑حل: نقاط x_2 , x_3 ، زیرا مماس قائم دارد.

(تمرین ۴ ص ۹۰)

④ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن :

الف) در یک نقطه برابر صفر شود.	ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.
پ) در تمام نقاط مثبت باشد	ت) در تمام نقاط یکسان باشد.
ث) در تمام نقاط منفی باشد.	

مای درس — گروه آموزشی مای درس — www.my-dars.ir

مشتق پذیر نبودن تابع به دلیل ناپیوستگی :

اگر تابع در $x=a$ پیوسته نباشد، مشتق هم ندارد (چون نمی توانیم مماس رسم کنیم).بنابراین هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است توابع ناپیوسته مثل:

۱.توابع چند ضابطه ای در نقاط مرزی دامنه

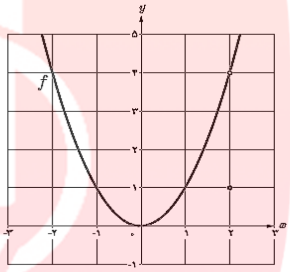
۲.توابع $f(x)=[x]$ در نقاط صحیح

۳.توابع $f(x)=\sqrt{x}$ درصفر

(فعالیت ص۷۷)

با استفاده از تعریف مشتق ،مشتق‌پذیری تابع f را در نقطه $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\neq ۲\\ ۱ & x=۲\end{cases}$$



☑حل:

$f(۲)=۱$

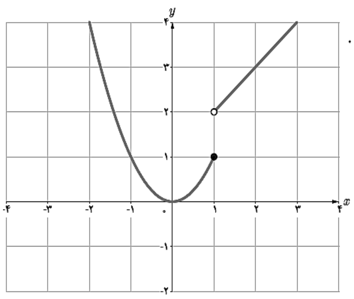
$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}\begin{cases}\lim_{x\to ۲^-}\dfrac{x^۲-۱}{x-۲}=\dfrac{۳}{۰^-}=-\infty\\[2ex] \lim_{x\to ۲^+}\dfrac{x^۲-۱}{x-۲}=\dfrac{۳}{۰^+}=+\infty\end{cases}\rightarrow$$

$f'(۲)=$ وجود ندارد

(کار در کلاس ص۷۸)

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع g را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq ۱\\ x+۱ & x>۱\end{cases}$$



(تمرین ۶ و۱۳ص ۹۱)

⑥ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲+۳ & x\geq ۱\\ ۲x & x<۱\end{cases}$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.

⑬ اگر $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq ۰\\ x & x>۰\end{cases}$ نشان دهید $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ موجودند ولی $f'(۰)$ موجود نیست.

☑حل:

$$f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=۰$$

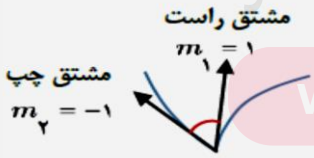
$$f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۰}{x-۰}=۱$$

$f'(۰)=$ وجود ندارد

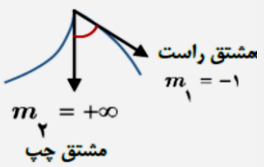
مشتق پذیر نبودن تابع به دلیل داشتن گوشه یا مماس قائم:

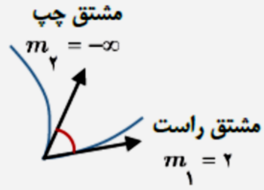
* هر تابع مشتق پذیر، پیوسته است ولی هر تابع پیوسته، مشتق پذیر نیست.یعنی توابعی وجود دارند که پیوسته اند ولی مشتق پذیر نیستند. و مشتق چپ و راست آنها به صورت زیر است:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند(نقطه گوشه ای)

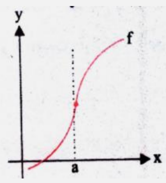


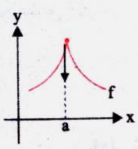
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه ای)





پ) هر دو نامتناهی باشند.





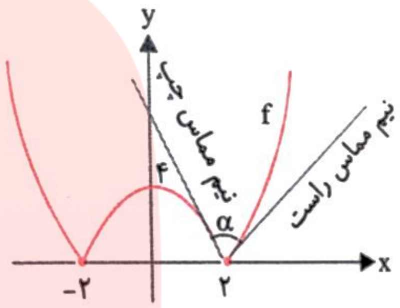
مای درس
گـــروه آمـــوزشی عصـــر
www.my-dars.ir

*تمام ریشه های داخل قدر مطلق نقاط شکستگی (گوشه ای، زاوای دار) تابعند، بنابراین برای تعیین تعدادنقاط مشتق ناپذیریاید تعدادریشه های ساده داخل قدر مطلق را مشخص کنیم.در نتیجه باید قدر مطلق را حذف و مشتق گیری کنیم.

(تمرین ۸ص ۹۱)

⑧اگر $f(x)=\left|x^{۲}-۴\right|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری f را در نقاط به طول‌های ۲ و ۲- بررسی کنید.

☑حل:



$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=۴$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=-۴$$

$f'(۲)=$ وجود ندارد

$$f'_+(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^+}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=-۴$$

$$f'_-(-۲)=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{f(x)-f(-۲)}{x+۲}=\lim_{x\to (-۲)^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=۴$$

$f'(-۲)=$ وجود ندارد

(مثال ص ۷۹)

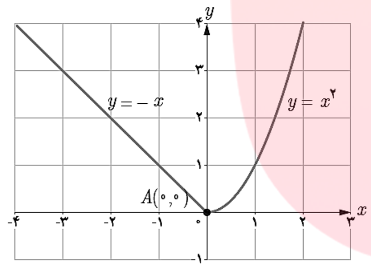
مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$ را در نقطه $x=۱$ بررسی کنید.معادله نیم مماس های راست و چپ در $x=۱$ را بنویسید.

(کار در کلاس ص۷۹)

نشان دهید که مشتق تابع $f(x)=\left|x^{۲}-۱\right|$ در $x=-۱$ موجود نیست. معادله نیم مماس‌های راست و چپ را بنویسید.

(تمرین ۲ ص ۹۰)

②با محاسبه مشتق راست و چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق‌پذیر نیستند.

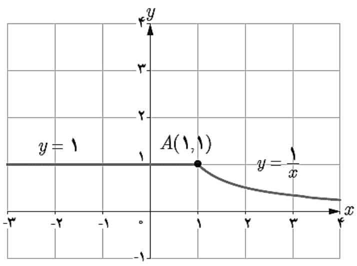


☑حل:

$A(۰,۰)$

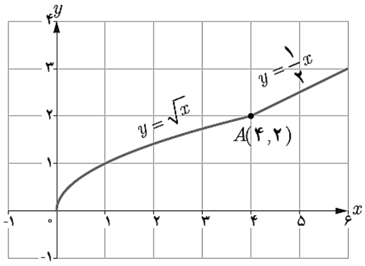
$$\begin{cases} f'_-(۰)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{-x-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^-}(-۱)=-۱ \\ f'_+(۰)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰^+} x=۰ \end{cases}$$

$f'(۰)=$ وجود ندارد



(ب)

مای درس گروه آموزشی www.my-dars.ir



(پ)

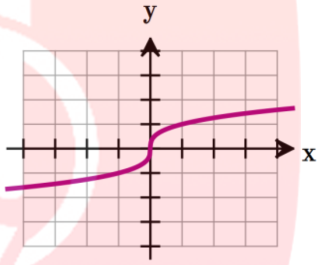
(مثال ص ۸۰)

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ را در نقطه $x=0$ بررسی کنید.

☑حل:

$f'(0)=+\infty$

مماس قائم دارد پس مشتق پذیر نیست



$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$$

(تمرین۹ ص ۹۱)

⑨ مشتق تابع $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ را به‌دست آورده و مشخص کنید در چه نقطه‌ای مماس قائم دارد؟

(تمرین۱ص ۹۰)

①دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نباشند.

دامنه مشتق:

اگر $y=f(x)$ تابعی حقیقی باشد،آنگاه تابع مشتق به صورت زیرتعریف می شود:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ومجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آن ها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

$$D_{f'}=D_f-\{\text{نقاط مشتق ناپذیر}\}$$

(فعالیت ص ۸۲)

اگر $f(x)=x^2$،

الف) تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.

ب) نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

(مثال ص ۸۴)

اگر $f(x)=\frac{1}{x}$،

الف)نمودار f را رسم کنید.

ب)تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید.

پ) $f'(3)$ را با استفاده از تابع مشتق وسپس تعریف مشتق بیابید

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

(کار در کلاس ص ۸۴)

اگر $f(x)=\begin{cases}5x & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$

الف) دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید

ب) ضابطه f' را به‌دست آورید.

پ)نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

(تمرین ۳ ص ۹۰)

③تابع $f(x)=\begin{cases}5x-4 & x<0\\ x^2 & 0\leq x\leq 3\\ x+6 & x>3\end{cases}$ داده شده است .

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار تابع f بگویید که چرا $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند؟

پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

محاسبه مشتق بدون استفاده از تعریف مشتق (قواعد مشتق):

۱. مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f(x)=c \to f'(x)=0$$

۲. توان را در ضریب ضرب و یکی از توان کم می کنیم

$$f(x)=ax^n \to f'(x)=nax^{n-1}$$

۳.(مشتق زیر رادیکال) ÷ (رادیکال × ۲)

$$f(x)=\sqrt{ax+b} \to f'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

۴. $\dfrac{\text{مشتق زیر رادیکال}}{3\times\sqrt[3]{(\text{زیر رادیکال})^2}}$

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \to f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۵. مشتق اولی ± مشتق دومی

$$f(x)=f\pm g \to f'(x)=f'\pm g'$$

۶.ضریب در مشتق ضرب می شود.

$$f(x)=kf(x) \to f'(x)=kf'(x)$$

۷.مشتق اولی در دومی+مشتق دومی در اولی

$$f(x)=f.g \to f'(x)=f'.g+g'.f$$

۸.(مشتق صورت در مخرج − مشتق مخرج در صورت) ÷ مخرج به توان ۲

$$f(x)=\frac{f}{g} \to f'(x)=\frac{f'.g-g'.f}{g^2}$$

(مثال ص۸۵ و۸۶ و۸۷)

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{-2}{5}$$

$$f(x)=7$$

$$f(x)=x^2$$

$$f(x)=x^3$$

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^4$$

$$g(x)=x^5+4x^3-\sqrt{2}x+1$$

$$h(x)=\left(2x^3+1\right)\left(-x^2+7x-2\right)$$

$$t(x)=\frac{x^2-4}{3x+1}$$

(کار در کلاس ص۸۷و تمرین ۱۴ ص۹۲)

① مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$

ب) $g(x)=\sqrt{x}\,(3x^2+5)$

پ) $h(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1}$

ب) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$

ت) $f(x)=\dfrac{9x-2}{\sqrt{x}}$

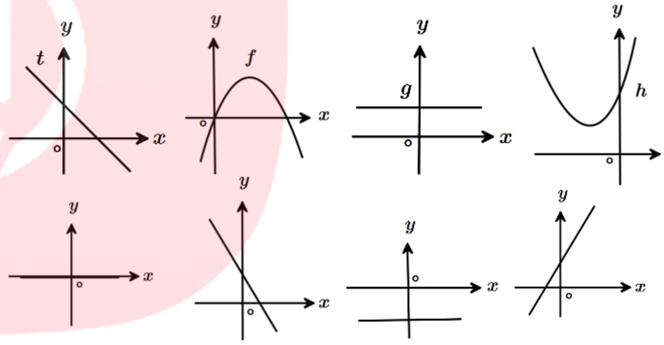
ث) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

② اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$ ، $f'(۲)=۵$ ، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

(تمرین ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ ص ۹۱ و ۹۲)

⑩ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



⑦ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

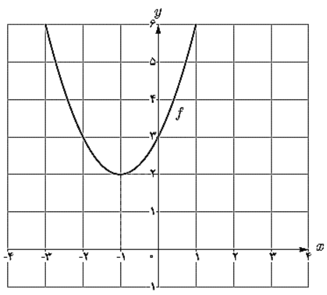
☑حل:

این مسئله بازپاسخ است، یکی از جواب ها می تواند به صورت زیر باشد:

$$f(x)=x \ , \ g(x)=x+۱ \ , \ h(x)=x+۲$$

⑤ الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$f'(۳)$ و $f'(۰)$ و $f'(-۱)$ و $f'(۲)$

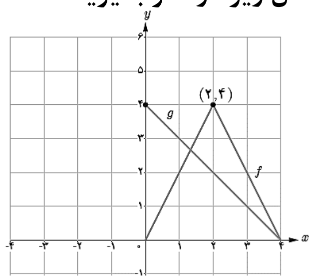


ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x)=x^۲+۲x+۳$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

⑫ اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مطلوب است، $(f+g)'(۱)$ و $(۳f+۲g)'(۱)$

⑪ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.



الف) اگر $h(x)=f(x).g(x)$ مطلوب است $h'(۱)$ ، $h'(۲)$ و $h'(۳)$

ب) اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(۱)$ ، $k'(۲)$ و $k'(۳)$

☑حل:

الف)

$$h'(x)=f'(x)\,g(x)+g'(x)\,f(x)$$

$$h'(۱)=۲(۳)+(-۱)\,۲=۴$$

$h'(۲)=$ وجود ندارد

$$h'(۳)=(-۲)۱+(-۱)۲=-۴$$

ب)

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

$$k'(۱)=\frac{۲(۳)-(-۱)(۲)}{۹}=\frac{۸}{۹}$$

$k'(۲)=$ وجود ندارد

$$k'(۳)=\frac{(-۲)۱-(-۱)۲}{۱}=۰$$

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

مشتق تابع مرکب- قاعده زنجیری:

*قاعده زنجیری (یعنی شروع از داخلی ترین تابع و مثل زنجیر، مشتق ها را در هم ضرب می کنیم)

*رابطه مشتق تابع fog :

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$$

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)$$

(مثال وکار در کلاس ص۸۸ و تمرین ۱۴ ص ۹۲)

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $h(x)=(x^2+3x+1)^7$

☑حل:

$$h'(x)=(2x+3)(7)(x^2+3x+1)^6$$

۲) $y=\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$

☑حل:

$$\frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2}.5\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4=5\left(\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}\right)\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$$

۳) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$

۴) $g(x)=\left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

۵) $f(x)=(3x^2-4)(2x-5)^3$

مشتق پذیری روی یک بازه:

*تابع f روی بازه (a,b) مشتق‌پذیر است هرگاه در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.

*تابع f روی بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه f در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد ودر نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

*اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق‌پذیر باشد، گوییم f روی بازه $(-\infty,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

(کار در کلاس ص ۸۹)

مشتق‌پذیری روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

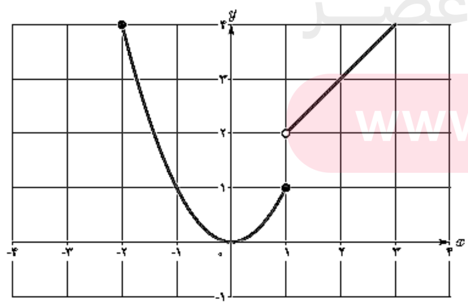
تابع f روی بازه $[a,b)$ مشتق‌پذیر است هرگاه ....

تابع f روی بازه $(a,b]$ مشتق‌پذیر است هرگاه ....

(مثال ص ۸۹)

اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & -2\le x\le 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-2,1]$، $(1,+\infty)$ و $[1,2]$ بررسی کنید.

☑حل:



*تابع در بازه $[-2,1]$ مشتق پذیر و مشتق آن $2x$ است

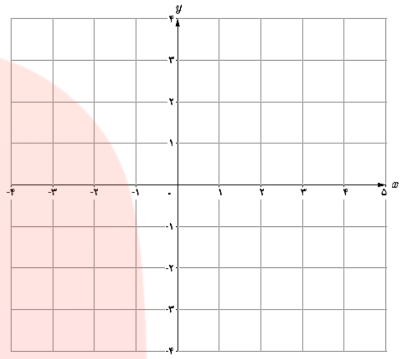
* تابع در بازه $(1,+\infty)$ مشتق پذیر و مشتق آن ۱ است

*تابع در بازه $[1,2]$ مشتق پذیر نیست زیرا در $x=1$ پیوسته نیست و مشتق ندارد

مای درس گروه آموزشی عصر www.my-dars.ir

(کار در کلاس ص ۸۹)

اگر $f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1,1]$، $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.



مشتق مرتبه دوم:

* از تابع $y=f\left(x\right)$:

۱.اگریک بار مشتق بگیریم ،مشتق مرتبه اول به دست می آید و داریم: $y'=f'\left(x\right)$ و می خوانیم اف پریم.

۲.اگردو بار مشتق بگیریم،مشتق مرتبه دوم به دست می آید و داریم: $y''=f''\left(x\right)$ و می خوانیم اف زگوند.

(مثال ص ۹۰ و تمرین ۱۵ ص ۹۲)

در تابع $f\left(x\right)=3x^4+2x^2-1$ حاصل $f''\left(x\right)$ را بیابید.

☑حل:

$$y'=12x^3+4x \quad , \quad y''=36x^2+4$$

⑮اگر $f(x)=5x^3-4x^2-3x$، مقدار $f''(-1)$ را به‌دست آورید.

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

فصل ٤ درس ۳: آهنگ تغییر

آهنگ تغییر متوسط :

* آهنگ تغییر متوسط با شیب خط قاطع برابر است و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

آهنگ تغییر لحظه ای :

* آهنگ تغییرلحظه ای با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابراست و رابطه آن به صورت زیر است:

$$\text{آهنگ تغییرلحظه ای} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(تمرین ص۱۰۰ و۹۹)

④ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ است. در کدام لحظه سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,5]$ با هم برابرند؟

☑حل:

$$f'(t)=2t-1 \to 2t-1=\frac{f(5)-f(0)}{5-0}$$

$$\to 2t-1=\frac{30-10}{5}=4 \to t=2/5s$$

⑦یک توده باکتری پس از tساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t^3$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در بازه زمانی $3 \le t \le 4$ چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t=3$ چقدر است؟

⑧ گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V=40(1-\frac{t}{100})^2$ به‌دست آید:

الف) آهنگ تغییر متوسط حجم مایع در بازه زمانی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[0,100]$ می‌شود؟

① جدول زیر درجه حرارت T (سانتی‌گراد) را در شهری از ساعت ۸ تا ۱۸ در یک روز نشان می‌دهد.

ساعت h	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
درجه حرارت T	۱۱	۱۳	۱۴	۱۷	۱۹	۱۸	۱۷	۱۵	۱۳	۱۰	۹

آهنگ تغییر متوسط درجه حرارت نسبت به زمان را :

مای درس
گروه آموزشی عصر
www.my-dars.ir

الف) ازساعت ۸ تا ساعت ۱۲ به‌دست آورید.

☑حل:

$$\frac{T(12)-T(8)}{12-8}=\frac{19-11}{4}=2C/h$$

ب) از ساعت ۱۲ تا ساعت ۱۸ به‌دست آورید.

☑حل:

$$\frac{T(18)-T(12)}{18-12}=\frac{9-19}{6}=-1/67C/h$$

پ) پاسخ‌ها را تفسیر کنید.

☑حل:

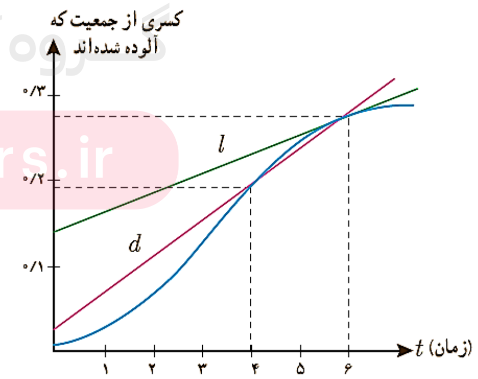
از صبح ساعت ۸ تا ۱۲ درجه حرارت با سرعت متوسط ۲ سانتی گراد بر ساعت در حال افزایش است و از ساعت ۱۲ تا ۱۸درجه حرارت با سرعت متوسط ۱/۶۷− سانتی گراد بر ساعت در حال کاهش می باشد.

② کسری از جمعیت یک شهر که به وسیله یک ویروس آلوده شده‌اند بر حسب زمان (هفته) در نمودار زیر نشان داده شده است.

الف) شیب‌های خطوط l و d چه چیزهایی را نشان می‌دهند.

ب) گسترش آلودگی در کدام‌یک از زمان‌های $t=1$, $t=2$ یا $t=3$ بیشتر است؟

پ) قسمت ب را برای $t=4$, $t=5$ و $t=6$ بررسی کنید.



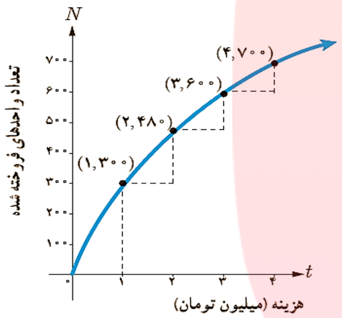
☑حل:

الف)شیب خط l سرعت آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در پایان هفته ششم(سرعت لحظه ای در $t=6$)و شیب خط d سرعت متوسط آلوده شدن کسری از جمعیت شهر در بین هفته های چهارم تا ششم(آهنگ تغییر متوسط در بین لحظات ۴ تا ۶ هفته) را نشان می دهد.

ب) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان های $t=1,\ t=3$ در حال افزایش است.

پ) با توجه به شیب خط گسترش آلودگی در زمان های $t=6\ ,\ t=4$ در حال کاهش است.

③ نمودار روبه‌رو نمایش میزان فروش تعداد نوعی کالا (N) پس از صرف t میلیون تومان هزینه برای تبلیغ است.



الف) آهنگ تغییر N برحسب t را وقتی از ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ۲ تا ۳و ۳ تا ۴ تغییر می‌کند به‌دست آورید.

☑حل:

$$\frac{N(1)-N(0)}{1-0}=\frac{300-0}{1}=300$$

$$\frac{N(4)-N(3)}{4-3}=\frac{700-600}{1}=100$$

$$\frac{N(2)-N(1)}{2-1}=\frac{480-300}{1}=180$$

ب) به نظر شما چرا آهنگ تغییرات، وقتی که مقادیر t افزایش می‌یابند، در حال کاهش است؟

☑حل:

با توجه به شیب خطوط قاطع که در حال کم شدن است بنابراین آهنگ تغییر درحال کاهش می باشد.
هزینه های تبلیغات تا یک اندازه مشخص در فروش کالا اثرگذار است .افزایش بیش ازحد هزینه تأثیر بسزایی در میزان فروش ندارد.

مای درس — گروه آموزشی عصر — www.my-dars.ir

⑥ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) آهنگ تغییر متوسط تابعی مانند f در بازه $[۰,۱]$ همیشه کمتر از شیب آن منحنی در نقطه است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن، همواره صعودی است.

پ) تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$

⑤ توپی از یک پُل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان دهنده فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. براساس جدول کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه، است نشان دهد؟

ثانیه s t	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
متر m $f(t)$	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

الف) $۱/۲۳\ m/s$　　ب) $۱۴/۹۱\ m/s$

پ) $۱۱/۵\ m/s$　　ت) $۱۶/۰۳\ m/s$