# فصل سوم

## حد بی نهایت و حد در بی نهایت

❖ درس اول : حد بی نهایت

❖ درس دوم: حد در بی نهایت



بارم فصل ۳:

| نوبت اول | نوبت دوم | شهریور /دی |
|---|---|---|
| ۵ | ۲ | ۲ |

# فصل ۳ درس ۱: حد بی‌نهایت

## بخش پذیری چند جمله‌ای ها بر $(x-a)$:

$f(x)$ مقسوم | $x-a$ مقسوم علیه

$Q(x)$ خارج قسمت

$R$ باقی مانده

رابطه تقسیم $\to f(x)=(x-a)\times Q(x)+R$

※دررابطه تقسیم اگر به جای $x$ بگذاریم $a$، داریم:

$$f(a)=\underbrace{(a-a)\times Q(a)}_{0}+R\to \boxed{f(a)=R}$$

※بنابراین برای به دست آوردن باقی مانده تقسیم بدون انجام تقسیم ابتدا مقسوم علیه را مساوی صفر قرار می دهیم ومقدار به دست آمده را در مقسوم به جای $x$ گذاشته و حاصل را به دست می آوریم

※نتیجه:اگر $f(a)=0$ آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$بخش پذیر است.

(تمرین ۱ص ۵۷)

①الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=2x^3+x^2+1$ بر دو جمله‌ای $x+1$ بخش‌پذیر است.

ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها(تجزیه)بنویسید.

☑حل:

$x+1=0\to x=-1$

$f(-1)=2(-1)^3-(-1)^2+1=-2+1+1=0\to \boxed{R=0}$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^3}+x^2+1 & x+1 \\ \hline
\cancel{-2x^3}-2x^2 & 2x^2-x+1 \\ \hline
\cancel{-x^2}+1 & \\
\cancel{x^2}+x & \\ \hline
\cancel{x}+\cancel{1} & \\
\cancel{-x}\ \cancel{-1} & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

$f(x)=(x+1)(2x^2-x+1)$

(کار در کلاس۱و۳ ص۵۱)

①الف) نشان دهید چندجمله‌ای $f(x)=3x^2-5x-2$ بر دو جمله‌ای $(x-2)$ بخش‌پذیر است.

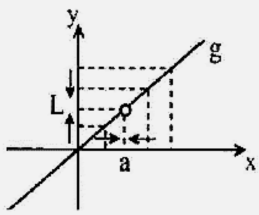
ب) به کمک تقسیم، $f(x)$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌ها بنویسید.

③ نشان دهید چند جمله‌ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است.

※یادآوری مفهوم حد:

※حد یعنی نزدیک شدن بسیار زیاد به یک عدد، که به آن «میل کردن»می گوییم .

※ به عبارتی حد یعنی وقتی مقدار $x$ به $a$ نزدیک می شود (میل می کند) مقدار $y$ به چه عددی نزدیک می شود.(حد یعنی رفتار $y$ تابع در مجاورت نقطه $a$)که به صورت $\lim_{x\to a} g(x)=l$ می نویسیم .




$x$از سمت راست به $a$ نزدیک می شود. $x\to a^+$

$x$از سمت چپ به $a$ نزدیک می شود. $x\to a^-$

$x$از هردو سمت راست و چپ به $a$ نزدیک می شود $x\to a$

※در هر سه مورد، $x$ به $a$ نزدیک می شود ولی به آن نمی رسد.

※شرایط وجود حداین است که تابع در چپ وراست $a$ تعریف شده باشد و حد چپ و راست موجود و برابر باشد.

*حد تابع $\lim_{x\to a} g(x)=l$ به مقدار تابع $f(a)$ اصلا بستگی ندارد.

*برای تعیین حدتابع از روی نمودار، ابتدا روی محور $x$ها یک نقطه در سمت چپ و یک نقطه در سمت راست نقطه $a$ انتخاب کرده و از آنها خطی عمود خارج می کنیم تا نمودار را قطع کند آنگاه نقاط را به محور $y$ ها عمود و عرض نقطه را (حدودی) می خوانیم اگر عددها یکسان بود آنگاه تابع حد دارد.

## حد توابع کسری:

* برای پیدا کردن حد یک کسر، ابتدا به جای $x$ مقدار $a$ را قرار می دهیم که یکی از حالت های زیر به وجود می آید:

۱. $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}\neq 0}$ ۲. $\frac{0}{0}$ ۳. $\frac{\text{عدد}\neq 0}{0}$ ۴. $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{\text{عدد}}{\infty}$

۱. $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}\neq 0}$

اگربعد از جای گذاری مقدار $a$ در $x$،حالت $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}\neq 0}$ را داشته باشیم آنگاه حاصل حد با همین عدد گذاری به دست می آید.

**(مثال ص۵۱)**

مقدار $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}$ را محاسبه کنید

☑حل:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-3x+2}{x+1}=\frac{25-15+2}{5+1}=\frac{12}{6}=2$$

۲. $\frac{0}{0}$

اگربعد از جای گذاری مقدار $a$ در $x$،حالت $\frac{0}{0}$ (حالت مبهم) را داشته باشیم آنگاه برای به دست آوردن حاصل حد باید به یکی از ۳ روش زیر، رفع ابهام کنیم یعنی عامل صفر کننده $(x-a)$ را از صورت و مخرج پیدا و سپس حذف کنیم و از تابع ساده شده حد بگیریم:

الف) رفع ابهام با استفاده ازتجزیه( فاکتور گیری ، اتحادها)

ب) رفع ابهام با استفاده ازتقسیم

ج) رفع ابهام توابع رادیکالی با استفاده ازضرب در مزدوج یا چاق و لاغر

اتحاد مزدوج: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

## الف) رفع ابهام با استفاده ازتجزیه( فاکتور گیری ، اتحادها)

**(مثال ص۵۱)**

مقدار $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$ را محاسبه کنید

☑حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{1-1}{1+1-2}=\frac{0}{0}$$

$x\to 1\Rightarrow (x-1)$ عامل صفر کننده

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overset{\text{مزدوج}}{x^2-1}}{\underset{\text{جمله مشترک}}{x^2+x-2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

**(کاردرکلاس الف ص۵۳)**

مقدار $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x^2+3x}$ را محاسبه کنید

## ب) رفع ابهام با استفاده ازتقسیم

اگر به کمک فاکتور و اتحاد نتوانیم تجزیه کنیم از تقسیم کمک می گیریم.

**(مثال ص۵۲)**

مقدار $\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را محاسبه کنید

یا

حد تابع $f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}$ را در نقطه $x=-2$ درصورت وجود محاسبه کنید.

☑حل:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^3+3x^2+4}{x^3+8}\xrightarrow{x=-2}\frac{0}{0}$$

$x\to -2 \Rightarrow (x+2)$ عامل صفر کننده

$$\lim_{x\to -2}\frac{\overbrace{2x^3+3x^2+4}^{\text{تقسیم}}}{\underbrace{x^3+8}_{\text{مکعب مجموع(چاق و لاغر)}}}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(2x^2-x+2)}{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}=\frac{8+2+2}{4+4+4}=1$$

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{2x^3}+3x^2+4 & x+2 \\ \hline
-\cancel{2x^3}-4x^2 & 2x^2-x+2 \\
\cancel{-x^2}+4 & \\
\cancel{x^2}+2x & \\
\cancel{2x}+\cancel{4} & \\
-\cancel{2x}-\cancel{4} & \\
0 &
\end{array}$$

$$2x^3+3x^2+4=(x+2)(2x^2-x+2)$$

**(کاردرکلاس ب ص ۵۳)**

مقدار $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-4x+1}{2x^2+x-1}$ را محاسبه کنید

**(تمرین ۲ ص ۵۷)**

② حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-x}{4x^2-1}$

ب) $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25}$

پ) $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^3+4x^2+x+4}$

## ج) رفع ابهام توابع رادیکالی با استفاده ازضرب در مزدوج یا چاق و لاغر

اگر عبارت رادیکالی با فرجه ۲ در صورت یا مخرج داشتیم آن را در مزدوجش ضرب می کنیم واگر عبارت رادیکالی با فرجه ۳ در صورت یا مخرج داشتیم آن را در چاق یا لاغرش ضرب می کنیم .

**(مثال ص ۵۲)**

۱)حد تابع $g(x)=\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ را در نقطه به طول $x=5$ درصورت وجود محاسبه کنید.

☑حل:

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}=\frac{0}{0}\longrightarrow x\to 5\Rightarrow \overset{\text{عامل صفر کننده}}{(x-5)}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}\times\overbrace{\frac{2+\sqrt{x-1}}{2+\sqrt{x-1}}}^{\text{ضرب در مزدوج}}=\lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(2+\sqrt{x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{-\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x-5)}(2+\sqrt{x-1})}=\frac{-1}{2+2}=\frac{-1}{4}$$

۲)حد تابع $h(x)=\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}$ را در $x=8$ درصورت وجود محاسبه کنید.

☑حل:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{0}{0}\to x\to 8\Rightarrow \overset{\text{عامل صفر کننده}}{(x-8)}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\overset{\text{فاکتور}}{x^2-8x}}{\sqrt[3]{x}-2}\times\underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}}_{\text{ضرب در چاقش}}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{x\cancel{(x-8)}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8(4+4+4)=96$$

**(کاردرکلاس ص ۵۳)**

**حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.**

ت) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ث) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}$

ج) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}$

**(تمرین ۳ص ۵۷)**

**③ حدود زیر را در صورت وجود، به‌دست آورید.**

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$

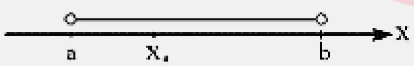
ب) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$

پ) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2x+16}{\sqrt[3]{x}+2}$

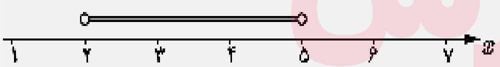
## همسایگی و انواع آن:

***تعریف همسایگی:**

**همسایگی عددی مثل $x_0$، یک بازه باز $(a,b)$ است.**




**به طورمثال، همسایگی عدد ۳ بازه $(2,5)$ می باشد**




**البته بیشمار همسایگی اطراف عدد ۳ داریم مثل بازه های**

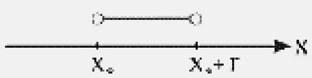
$(2,5),(2,4),(0,4),(1,4),(2/5,3/5),...$

***انواع همسایگی:**

**۱.همسایگی راست ۲.همسایگی چپ ۳.همسایگی محذوف**

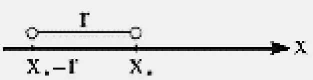
**۱.همسایگی راست:**

**همسایگی راست عددی مثل $x_0$، یک بازه باز $(x_0, x_0+r)$ است .**

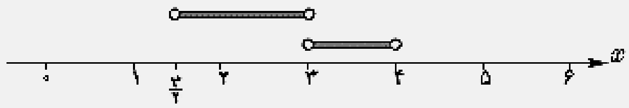



**۲.همسایگی چپ:**

**همسایگی چپ عددی مثل $x_0$، یک بازه باز $(x_0+r, x_0)$ است .**

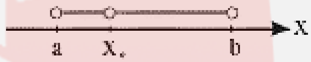


به طورمثال، همسایگی راست عدد ۳ بازه $(3,4)$ و همسایگی چپ عدد ۳ بازه $\left(\frac{3}{2},3\right)$ می باشد

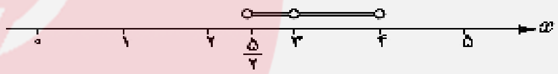


۳.همسایگی محذوف

همسایگی محذوف عددی مثل $x_0$، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ است یعنی حذف $x_0$ از بازه $(a,b)$



به طورمثال، همسایگی محذوف عدد ۳ مجموعه $\left(\frac{5}{2},4\right)-\{3\}$ می باشد



## حدنامتناهی:

*می دانیم که شرط وجود حد اینست که حد چپ و راست موجود و برابر باشد.

*حد $+\infty, -\infty$ اعدادحقیقی نیستند و یک نماد محسوب می شوند حال اگر جواب حدی، مساوی بی نهایت $(\infty)$ شود، می گوییم آن حد ، نامتناهی است. وتابع در آن نقطه حد ندارد

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

و از $+\infty, -\infty$ به خاطر این استفاده می کنیم که بگوییم $f(x)$ از هر مقدار مثبتی بزرگ تر $(+\infty)$ یا از هر مقدار منفی کوچکتر $(-\infty)$ می شود

***مفهوم رابطه** $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$:

به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که $x$ به قدر کافی به $a$ نزدیک اختیار شودو تابع درهمسایگی محذوف $a$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$:

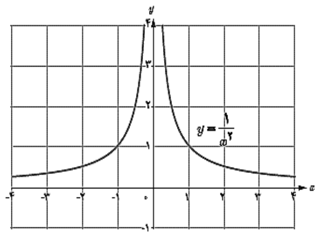
به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد به شرطی که $x$ به قدر کافی به $a$ نزدیک اختیار شودو تابع درهمسایگی محذوف $a$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$:

به این معناست که می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که $x$ با مقادیر بزرگ تر از $a$ به قدر کافی به $a$ نزدیک اختیار شود.

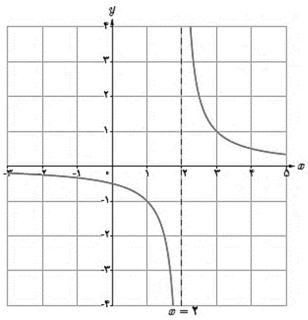
## محاسبه حدهای نامتناهی دو طرفه از روی شکل:

**(مثال ص ۵۴ و۵۶)**



حد چپ و راست هر دو $+\infty$

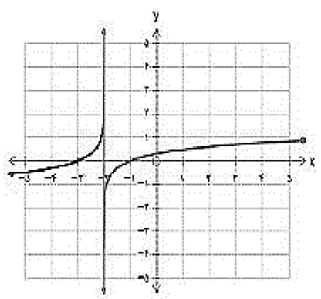
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$



حد راست $+\infty$ حد چپ $-\infty$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty$$



حدراست $-\infty$ حدچپ $+\infty$

$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to (-2)^-} f(x) = +\infty$$

**(تمرین ص ۵۷)**

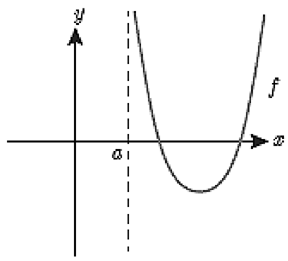
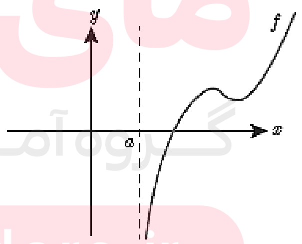
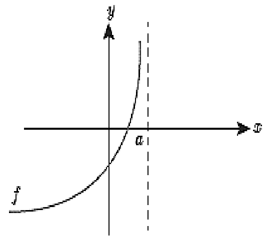
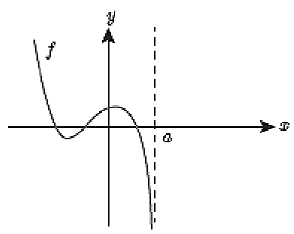
5 الف) عبارت $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید

☑ حل:
یعنی می توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که $x$ با مقادیر کوچکتر از ۲ به ۲ نزدیک اختیار شود.

ب) عبارت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = -\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.

پ) نمودار تابعی مانند $f$ را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟

### محاسبه حدهای نامتناهی یک طرفه از روی شکل: (ص ۵۵)

| حد راست $+\infty$ | حدراست $-\infty$ |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$  | $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$  |
| حدچپ $+\infty$ | حد چپ $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$  | $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$  |

### محاسبه حد نامتناهی از روی ضابطه:

۳. $\dfrac{\text{عدد}\neq 0}{0}$

اگربعد از جای گذاری مقدار $a$ در $x$، حالت $\dfrac{\text{عدد}\neq 0}{0}$ را داشته باشیم آنگاه حاصل حد ، $\infty$ است .

*توجه: در اینجا مخرج صفر نمی شود بلکه حد صفر دارد.

برای علامت $\infty$ به علامت صورت و مخرج توجه می کنیم :

$$\frac{\text{عددمثبت}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عددمثبت}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عددمنفی}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{\text{عددمنفی}}{0^-} = +\infty$$

*توجه: برای علامت صفر مخرج ، باید مخرج را تعیین علامت کنیم.

**(کاردرکلاس او تمرین۴ ص ۵۷)**

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۵^-} \dfrac{۲x}{x-۵} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to ۵^-} \frac{۲x}{x-۵} = \frac{۱۰}{۰^-} = -\infty$$

۲) $\lim\limits_{x\to ۵^+} \dfrac{۲x}{x-۵}$

۳) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \dfrac{۱}{x}$

۴) $\lim\limits_{x\to ۱^-} \dfrac{۱}{x-۱}$

۵) $\lim\limits_{x\to (-۲)^-} \dfrac{-۳x}{x^۲-۴} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴} = \frac{۶}{۰^+} = +\infty$$

۶) $\lim_{x\to 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

۷) $\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^4} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^4} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

چون کل مخرج توان زوج دارد پس $0^+$ است

۸) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x+1}{(2x+1)^2}$

۹) $\lim_{x\to -6} \frac{9}{(x+6)^2}$

۱۰) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2}$

۱۱) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x =$

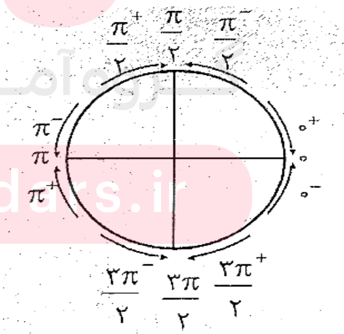
☑ حل:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

با توجه به دایره مثلثاتی ،

cos در ربع اول مثبت است

پس $0^+$ است




۱۲) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$

۱۳) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

۱۴) $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sin^2 x}$

۱۵) $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} =$

☑ حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

چون مخرج قدر مطلق داردپس $0^+$ است

۱۶) $\lim_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|}$

***یادآوری:**

$$\lim_{x\to a} [\underset{\downarrow}{x}] \xrightarrow{n<x<n+1} n$$

$x \notin Z$

$$\lim_{x\to a} [\underset{\downarrow}{x}] \to \begin{cases} x \to a^+ \xrightarrow{\text{حد}} a \\ x \to a^- \xrightarrow{\text{حد}} a-1 \\ x \to a \xrightarrow{\text{حد}} \times \end{cases}$$

$x \in Z$

۱۷) $\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3}$

☑ حل:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{2-3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} + \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} [x] = 2$$

۱۸) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|}$

۱۹) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|}$

# فصل ۳ درس ۲: حد در بی نهایت

## حد در بی نهایت:

*حد تابع وقتی $x \to \infty$، به یکی از دو صورت زیر است:

۱) صفر یا عددی غیر صفراست.

۲) $+\infty$ یا $-\infty$ است( حد وجود ندارد)

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ :

به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به $L$ نزدیک کرد به شرطی که $x$ به قدر کافی بزرگ اختیار شود.و تابع در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ :

به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می توان به $L$ نزدیک کرد به شرطی که $x$ به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود. وتابع در بازه $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ :

به این معناست که $f(x)$ را می توان از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد به شرطی که $x$ به قدر کافی بزرگ اختیار شود.و تابع در بازه $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد.

***مفهوم رابطه** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ :

به این معناست که $f(x)$ را می توان از هر عدد منفی دلخواهی کوچک ترکرد به شرطی که $x$ به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود. وتابع در بازه $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد.

*رابطه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ :

به این معناست که........................

*رابطه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ :

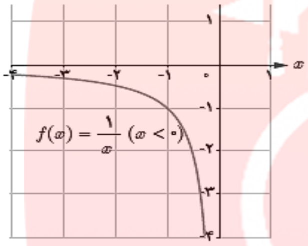
به این معناست که........................

## محاسبه حد در بی نهایت از روی شکل:

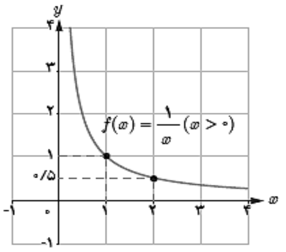
*وقتی تابع در $x \to \infty$ حد دارد نمودار آن در بی نهایت به خط افقی $y = L$ میل می کند

(مثال ص ۵۸ و۵۹ و۶۱)

با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بیابید.

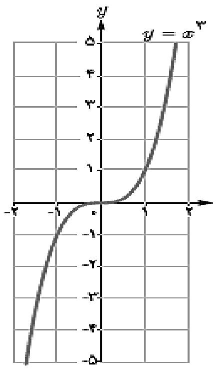



$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} =$



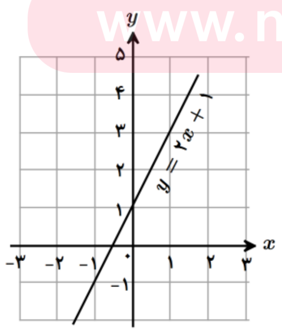

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳ =$



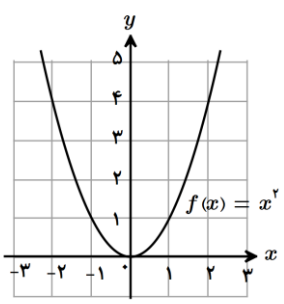

(کار در کلاس ص ۶۲)

با توجه به نمودار هر تابع، طرف دوم تساوی‌ها را بنویسید.



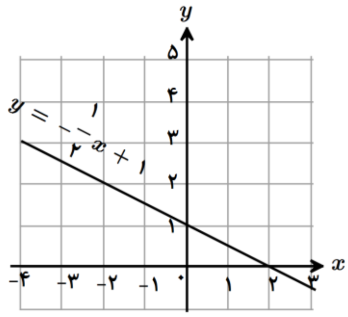

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} (۲x+۱) = ........$

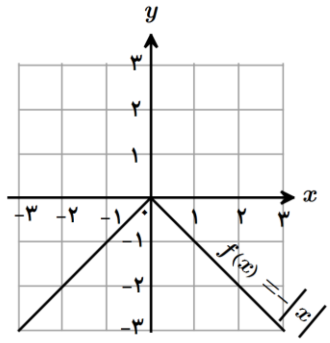
$\lim\limits_{x\to+\infty} (۲x+۱) = ....$




الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^۲ = ....$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^۲ = ....$



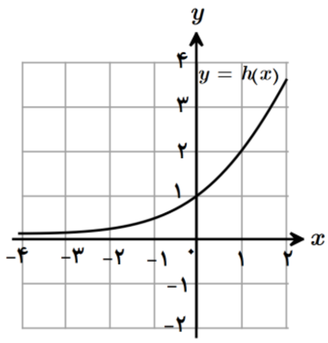



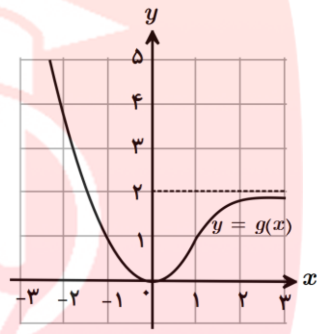

ت) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{-1}{2}x + 1) = ........$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{-1}{2}x + 1) = ........$

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ....$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ....$




ج) $\lim\limits_{x\to -\infty} h(x) = ........$

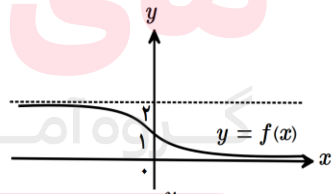
$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = ........$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = ....$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = ....$

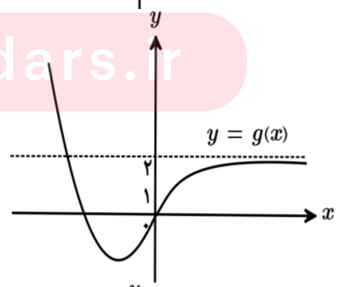
**(تمرین ۲و۳ص۶۴)**

**② با توجه به نمودار توابع، حدود خواسته شده را بنویسید.**



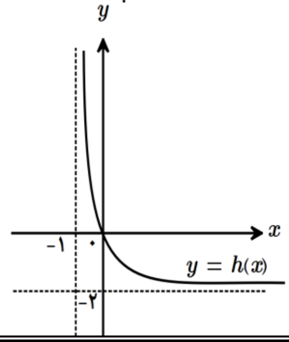

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ....$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ....$




$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = ....$

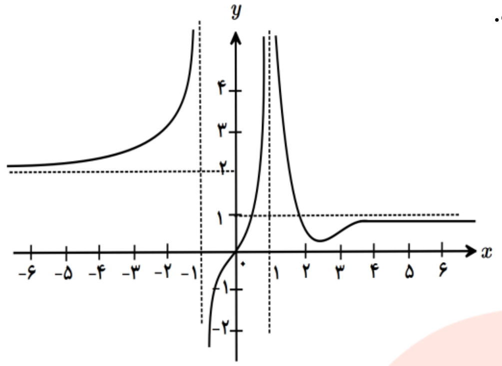
$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = ....$




$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = ....$

$\lim\limits_{x\to (-1)^+} h(x) = ....$

**③ نمودار تابع $f$ به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید.**



الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

ث)

**(تمرین ۱ص۶۳)**

**① نمودار هر یک از تابع‌های زیر را رسم کنید و سپس حدود خواسته شده را به‌دست آورید.**

الف)

$f(x) = \frac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

ب)

$$g(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=$

**(تمرین۵ص۶۴)**

⑤ الف) هر یک از رابطه‌های زیربه چه معنا هستند؟

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

ب) نمودار تابعی مانند $f$ را رسم کنید که هر دو ویژگی الف را داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

***محاسبه حد در بی نهایت از روی ضابطه:***

۴. $\dfrac{\text{عدد}}{\infty}$ و $\dfrac{\infty}{\infty}$

*** قضیه ۱:**

اگر $n$ عدد طبیعی باشد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

***قاعده پرتوان در توابع چند جمله ای:**

وقتی $x\to\infty$ است می توانیم به جای کل عبارت بزرگترین توان $x$ را با ضریبش نگه داریم و بقیه را نادیده بگیریم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} ax^n$$

*** قضیه ۲:**

اگر $n$ عدد طبیعی و $a$ عدد حقیقی غیر صفرباشد:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (\text{مثبت } a)\\ -\infty & (\text{منفی } a)\end{cases}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}+\infty & (\text{زوج و } a \text{ مثبت } n)\\ -\infty & (\text{زوج و } a \text{ منفی } n)\\ -\infty & (\text{فرد و } a \text{ مثبت } n)\\ +\infty & (\text{فرد و } a \text{ منفی } n)\end{cases}$

***قاعده پرتوان در توابع کسری:**

وقتی $x\to\infty$ است می توانیم در صورت و مخرج به جای کل عبارت بزرگترین توان $x$ را با ضریبش نگه داریم و بقیه را نادیده بگیریم. آنگاه:

الف)اگر درجه صورت و مخرج برابر باشد حد داریم و حد، عددی غیر صفر است

ب) اگر درجه صورت ازمخرج بیشتر باشد حد نداریم یعنی حاصل $-\infty$ یا $+\infty$ می شود

ج)اگر درجه مخرج ازصورت بیشتر باشد حد داریم و حد، عدد صفر است

**(کار در کلاس ومثال ص ۶۰و۶۳تمرین ۴ ص۶۴)**

حدود زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}$

☑حل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2-4x+1}{3x^2+5x-6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^2}{3x^2}=\frac{7}{3}$$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x-1}$

۳) $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1-5t^2}{t^2+3t}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-5x+4}{7x^3-11x^2-6x}$

۵) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{3x+1}$

۶) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+5x-3}$

۷) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}$

۸) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2-3x}$

۹) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{2x-3}$

۱۰) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x+4}{x^3+x-8}$

۱۱) $\lim\limits_{x\to-\infty} (9+\dfrac{7}{x^3})$

۱۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4}{x}-5}$

۱۳) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-3+5x^2\right)$

۱۴) $\lim\limits_{x\to+\infty} (-\dfrac{1}{2}x^3+7x^2-6)$

۱۵) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x}{3-x}$

۱۶) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{4}$

۱۷) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2x^3+4x^2-5x-9\right)$

۱۸) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$

۱۹) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5-6x^3-x}{x^2-5x+1}$

**(کار در کلاس ۲ص۶۰)**

**②الف) تابعی مثال بزنید که حد آن در $+\infty$ برابر $(-1)$ باشد.**

**ب) تابعی مثال بزنید که حد آن در $-\infty$ برابر ۱۰۰ باشد.**