فصل دوم

مثلثات

- درس اول : تناوب و تانژانت
- درس دوم: معادلات مثلثاتی

بارم فصل ۲:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۵	۲	۳

فصل ۲ درس ۱: تناوب و تانژانت

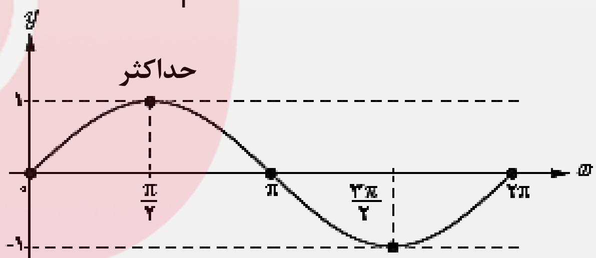
تابع مثلثاتی:

هر تابع شامل نسبت های مثلثاتی را تابع مثلثاتی می گوییم که ساده ترین آن $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ می باشد.

ویژگی های تابع با ضابطه های $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$:

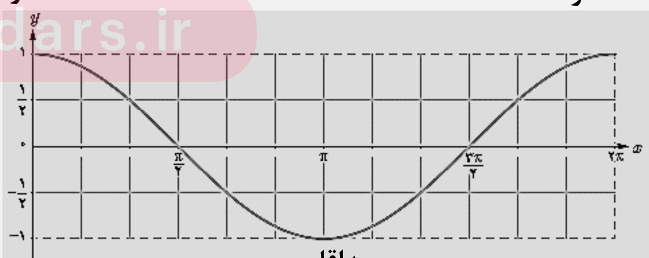
*نمودار تابع $f(x)=\sin x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	1	0	-1	0
تغییرات	↗	↘	↘	↗	



*نمودار تابع $f(x)=\cos x$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1
تغییرات	↘	↘	↗	↗	



*هر دوتابع متناوب هستند چون در فواصل معینی نمودار آن تکرارمی شود.طول هر یک از این فاصله را دوره تناوب می گوییم و با حرف T نمایش می دهیم

*دورهٔ تناوب‌تابع: $T=2\pi$

*تعریف ریاضی تابع متناوب:

تابع f را متناوب می نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته

$$f(x\pm T)=f(x)$$

باشیم:

$$1)\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$$
$$2)\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$$

کوچک ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دورهٔ تناوب f می نامیم

*ماکزیمم و مینیمم تابع: $\max=1 \quad , \quad \min=-1$

*دامنه و برد تابع: $R_f=[-1,1] \quad , \quad D_f=\mathbb{R}$

ویژگی های تابع با ضابطه های $f(x)=a\sin bx+c$ و $f(x)=a\cos bx+c$:

*ضریب a و مقدار c روی ماکزیمم و مینیمم تابع تاثیر می گذارد

*ضریب b روی دوره تناوب تابع تاثیر می گذارد

*دورهٔ تناوب تابع: $T=\dfrac{2\pi}{|b|}$

توجه:دوره تناوب باید مثبت باشد بنابراین از قدر مطلق استفاده می کنیم.

*ماکزیمم و مینیمم تابع:

$$\max=|a|+c \quad , \quad \min=-|a|+c$$

*مقدار a و c:

$$\left.\begin{array}{l}\max=|a|+c\\ \min=-|a|+c\end{array}\right\}\rightarrow 2c=\max+\min$$

$$\rightarrow c=\frac{\max+\min}{2} \quad , \quad |a|=\frac{\max-\min}{2}$$

نوشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب با داشتن ضابطه:

(مثال ص ۳۵ و تمرین ۱ ص ۴۰)

دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = ۳\sin(۲x) - ۲$

☑حل:

$$y = ۳\sin(۲x) - ۲ \begin{cases} a = ۳ \\ b = ۲ \\ c = -۲ \end{cases}$$

$$\max = |a| + c \rightarrow \max = |۳| - ۲ = ۱$$

$$\min = -|a| + c \rightarrow \min = -|۳| - ۲ = -۵$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$

ب) $y = -\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

پ) $y = \pi\sin(-x) + ۱$

ت) $y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$

پ) $y = -\pi\sin(\frac{x}{۲}) - ۲$

ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$

نوشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب با داشتن نمودار:

*تشخیص نمودار سینوس و کسینوس:

اگر محور y ها از اکسترمم تابع(ماکزیمم یا مینیمم تابع) رد شده باشد،نمودارکسینوس است،در غیر اینصورت نمودار سینوس است

* a, b چون قدر مطلق دارند ، پس می توانند مثبت یا منفی باشند

*علامت a:

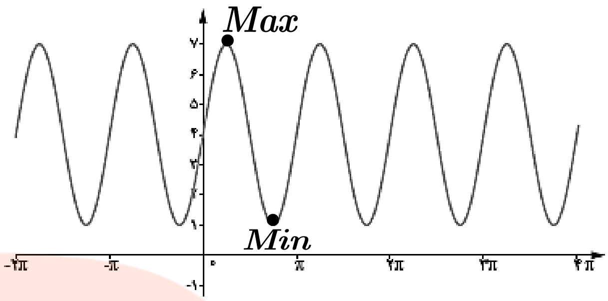
در نمودار سینوس و کسینوس اگر ابتدا ماکزیمم داشتیم a مثبت است و اگر ابتدا مینیمم داشتیم a منفی است.

*علامت b:

مثبت یا منفی بودن b در کسینوس بی تاثیر است زیرا کسینوس منفی را می خورد ولی در سینوس اگر ابتدا ماکزیمم داشتیم a, b هم علامتند و اگر ابتدا مینیمم داشتیم a, b هم علامت نیستند.یعنی اگر a را منفی بگیریم b باید مثبت باشد

(مثال ص ۳۵ وتمرین ۴ ص ۴۱)

ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



☑حل:

محور yها از اکسترمم تابع(ماکزیمم یا مینیمم تابع) رد نشده است ،نمودارسینوس است و چون ابتدا ماکزیمم آمده ، پس a,b هم علامتند.

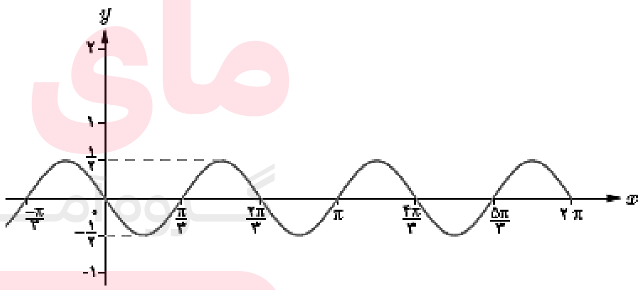
$$\max = ۷ \ , \ \min = ۱ \ , \ T = \pi$$

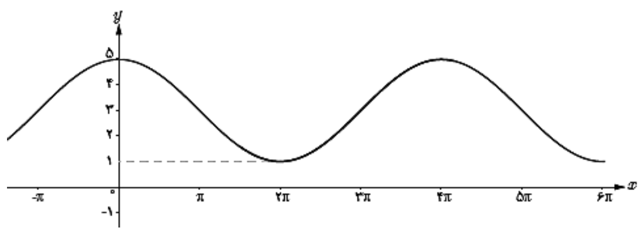
$$|a| = \frac{\max - \min}{۲} = \frac{۷-۱}{۲} = ۳$$

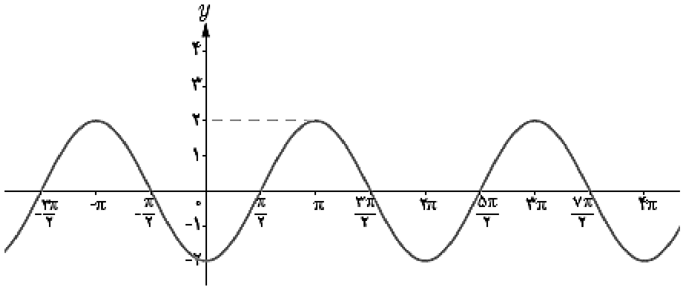
$$c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{۷+۱}{۲} = ۴$$

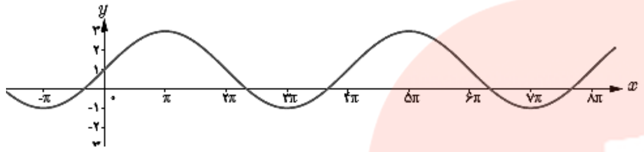
$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \to |b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$$

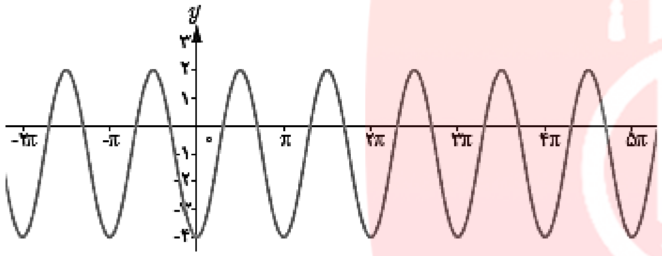
$$y = a\sin bx + c \to \boxed{y = ۳\sin(۲x) + ۴}$$









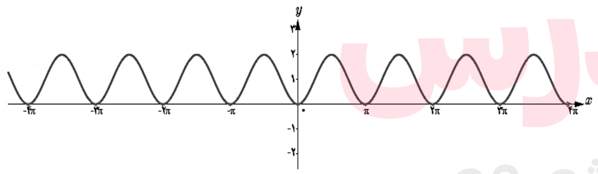


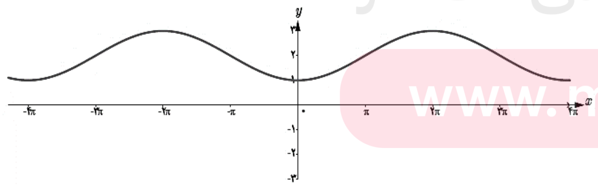
(تمرین ۲ ص ۴۰)

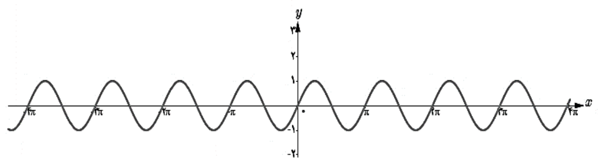
②هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

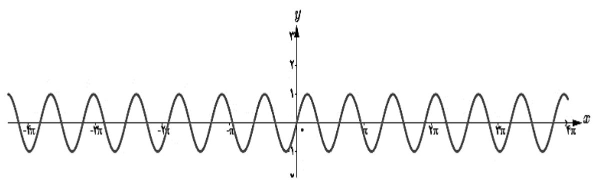
الف) $y = \sin \pi x$ ب) $y = ۲ - \cos \frac{۱}{۲}x$

پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

نوشتن ضابطه با داشتن مقادیر ماکزیمم و مینیمم ودوره تناوب:

(تمرین ۳ ص ۴۱)

③ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T=\pi \quad , \quad \max=۳ \quad , \quad \min=-۳$

☑حل:

در سوال قید نکرده ضابطه تابع سینوس یا کسینوس ، بنابراین ضابطه هر کدام بنویسیم درست است.

a,b چون قدر مطلق دارند ، پس می توانند مثبت یا منفی باشند که در اینجا ما هر دو را مثبت فرض می کنیم.

$$|a|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳$$

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{T}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$$

$$y=a\sin bx+c\rightarrow \boxed{y=۳\sin(۲x)}$$

یا

$$y=a\cos bx+c\rightarrow \boxed{y=۳\cos(۲x)}$$

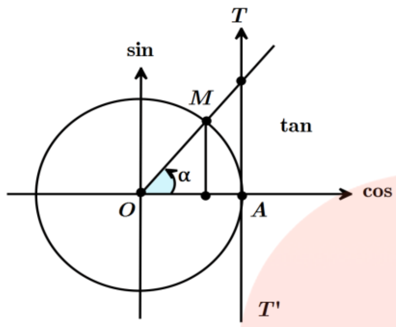
ب) $T=۳ \quad , \quad \max=۹ \quad , \quad \min=۳$

پ) $T=۴\pi \quad , \quad \max=-۱ \quad , \quad \min=-۷$

ت) $T=\frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max=۱ \quad , \quad \min=-۱$

تانژانت:

(فعالیت ص ۳۷)



*محور تانژانت بر دایره مثلثاتی مماس و موازی محورسینوس و عمود بر محور کسینوس است .

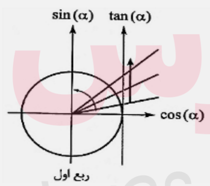
*برای پیدا کردن تانژانت هر زاویه ،ضلع آن را امتداد می دهیم تا محور تانژانت را قطع کند.سپس فاصله آن از مبدا تابع تانژانت یعنی A را به دست می آوریم که در بالا مثبت و در پایین منفی است.

تغییرات تانژانت:

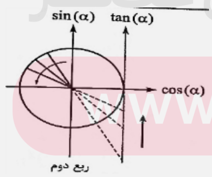
(کاردرکلاس ص ۳۸)

با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند.

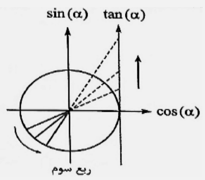
با افزایش α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\tan\alpha$ از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.



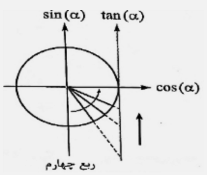
با افزایش α از $\frac{\pi}{۲}$ تا π، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.



با افزایش α از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$، مقدار $\tan\alpha$ از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.



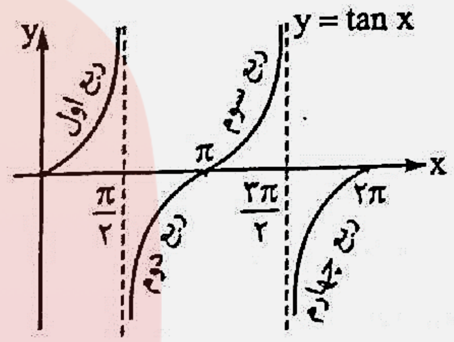
با افزایش α از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π ، مقدار $\tan\alpha$ از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.



تابع تانژانت:

*نمودار تابع $f(x)=\tan x$:

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	۰	ت	۰	ت	۰
تغییرات	$\nearrow$ $+\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$ $+\infty$	$\nearrow$	



*دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\tan x$: $T=\pi$

*دامنه و برد تابع:

تابع تانژانت درنقاطی که مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$ هست تعریف نشده است زیرا در $\left(x=k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{مثل}} \frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ این نقاط مقدار $\cos x$ صفر می شود و $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ معنی ندارد .بنابراین دامنه وبردتابع به صورت زیر است:

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}, k\in\mathbb{Z}\right\} \quad , \quad R_f=\mathbb{R}$$

*تابع تانژانت در بازه هایی مثل زیر و هر زیر مجموعه ای از این بازه ها اکیدا صعودی است.

$$\left(۰,\frac{\pi}{۲}\right),\left(\frac{\pi}{۲},\pi\right),\left(\pi,\frac{۳\pi}{۲}\right),\left(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi\right)$$

(کاردرکلاس ص ۳۹)

صعودی یا نزولی بودن تابع $y=\tan x$ را در مجموعهٔ $[۰,۲\pi]-\left\{\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right\}$ بررسی کنید.

(تمرین ۵ص ۴۰)

⑤کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است.

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

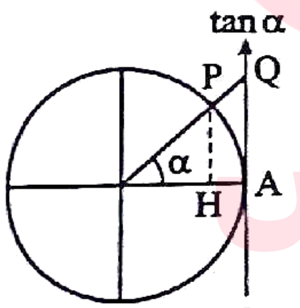
مقایسه $\sin\alpha$ **و** $\tan\alpha$**:**

(تمرین ۶ص ۴۰)

⑥ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$

☑حل:



ربع۱و۳ $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} ۰<\alpha<\frac{\pi}{۲} \\ \pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲} \end{array}\right. \Rightarrow \sin\alpha<\tan\alpha$

ربع ۲و۴ $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi \\ \frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi \end{array}\right. \Rightarrow \sin\alpha>\tan\alpha$

در کل دایره مثلثاتی $\longrightarrow |\sin\alpha|<|\tan\alpha|$

فصل ۲ درس ۲: معادلات مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی زوایای دو برابر کمان:

*مقدار نسبت مثلثاتی برخی زوایای غیر معروف مثل $(15^\circ, 22/5^\circ, ...)$ را می توان به کمک زوایای معروف مثل $(30^\circ, 45^\circ, ...)$ به دست آورد.

*وقتی کمان دوبرابر یا نصف می شود مقدار سینوس یا کسینوس دوبرابر یا نصف نمی شود .مثلاً $\cos 15^\circ$ را به کمک مقدار معلوم $\cos 30^\circ$ می توان یافت اما نه با نصف کردن.

بنابراین از روابط زیر کمک می گیریم:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

(مثال ص ۴۳)

مقدار $\cos 15^\circ$ و $\sin 15^\circ$ را بیابید.

☑حل:

$$\cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -2\sin^2 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

(۱۵° در ربع اول است پس سینوس مثبت است .)

$$\sin 30^\circ = 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\cos 15^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cos 15^\circ \Rightarrow \boxed{\cos 15^\circ = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$$

(۱۵° در ربع اول است پس کسینوس مثبت است.)

(تمرین ۲و۱ ص۴۵)

② نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

① فرض کنید $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

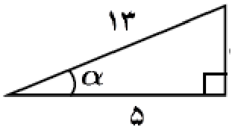
الف) $\cos 2\alpha$

☑حل:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \boxed{-\frac{119}{169}}$$

ب) $\sin 2\alpha$



• $\boxed{12}$

با توجه به شکل:

$$\cos\alpha = \frac{5}{13} \ , \ \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

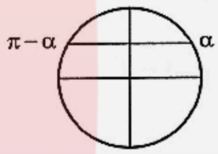
$$\sin 2\alpha = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \boxed{\frac{120}{169}}$$

معادلات مثلثاتی:

*معادله ای که در آن اطلاعاتی از نسبت های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.

*در معادله مثلثاتی وقتی مقدار سینوس $\left(\sin x = a\right)$ و کسینوس $\left(\cos x = a\right)$ را پیدا کردیم بایدجواب زاویه $\left(x\right)$ را بنویسیم . این معادله وقتی جواب دارد که $\left(-1 \le a \le 1\right)$ باشد.

* دو زاویه مکمل $\left(\alpha , \pi - \alpha\right)$ سینوس هایشان باهم برابر است مثل: $\left(\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}\right), \left(30^\circ , 180^\circ - 30^\circ\right)$



*اگر معادله به صورت $\boxed{\sin x = a}$ باشد :

$$\sin x = a \to \sin x = \sin\alpha \to \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

(مثال ص ۴۴)

معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ را حل کنید.

☑حل:

$$\sin x = \frac{1}{2} \to \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \to \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

*اگر معادله به صورت $\boxed{\sin x = -a}$ باشد :

$$\sin x = -a \to \sin x = \left(-\alpha\right)$$

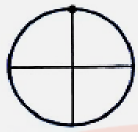
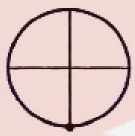
(مثال ص ۴۵)

معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

☑حل:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \to \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \to \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

*حالت های خاص:

$\sin x = 0 \to x = k\pi$	
$\sin x = 1 \to x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	
$\sin x = -1 \to x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	

(کار در کلاس ص۴۵)

الف) معادله $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

☑حل:

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \to 2\sin x = \sqrt{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \to \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب) معادله $4\sin x + \sqrt{8} = 0$ را حل کنید.

* اگردو سینوس با هم برابرشوند ، می توانیم جواب های کلی معادله را بنویسیم ولازم نیست برای سینوس حتما یک عدد مشخصی به دست آید

(مثال ص ۴۶و تمرین ۳(الف) ص۴۸)

معادله $\sin 2x=\sin 3x$ را حل کنید.

☑حل:

$$\sin 2x=\sin 3x \to \begin{cases} 2x=2k\pi+3x \to x=-2k\pi \\ 2x=2k\pi+\pi-3x \to x=\dfrac{2k\pi+\pi}{5} \end{cases}$$

الف)معادله $\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$ را حل کنید.

(مثال ص ۴۷)

معادله $2\sin 3x-\sqrt{2}=0$ را حل کنید.

☑حل:

$$2\sin 3x-\sqrt{2}=0 \to 2\sin 3x=\sqrt{2}$$

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2} \to \sin 3x=\sin\frac{\pi}{4} \to$$

$$\begin{cases} 3x=2k\pi+\dfrac{\pi}{4} \to x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{12} \\ 3x=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{4} \to x=\dfrac{2k\pi+\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12} \end{cases}$$

(تمرین ۴ص۴۸)

④ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌مترمربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟

☑حل:

$$s=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$$

$$3=\frac{1}{2}\times 2\times 6\sin\alpha \to \sin\alpha=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

در مثلث $0<\alpha<180^\circ$ است.بنابراین با توجه به $\sin\alpha=\frac{1}{2}$ داریم: $\alpha=30^\circ,\alpha=150^\circ$

یعنی دو مثلث با این خاصیت ها می‌توان ساخت.

(مثال ص ۴۷)

یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت ۱۶ m/s بـرای هم‌تیمی خـود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (برحسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d=\frac{v^2\sin 2\theta}{10}$$

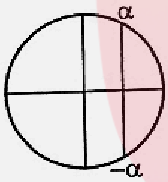
☑حل:

$$12/8=\frac{(16)^2\sin 2\theta}{10}$$

$$\sin 2\theta=\frac{12/8\times 10}{256} \to \sin 2\theta=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 2\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{6} \to \theta=k\pi+\dfrac{\pi}{12} \\ 2\theta=2k\pi+\pi-\dfrac{\pi}{6} \to \theta=\dfrac{k\pi+\pi}{2}-\dfrac{\pi}{12} \end{cases}$$

※ دو زاویه قرینه $(\alpha,-\alpha)$ کسینوس هایشان باهم برابر است .



※اگر معادله به صورت $\boxed{\cos x=a}$ باشد:

$$\cos x=a \to \cos x=\cos\alpha \to \begin{cases} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi-\alpha \end{cases}$$

(مثال ص ۴۶)

معادله $\cos x=\frac{1}{2}$ را حل کنید.کدام جوابها در بازه $[-3\pi,\pi]$ می باشند.

☑حل:

$$\cos x=\frac{1}{2} \to \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \to x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

به kاعداد صحیح می دهیم و جواب ها در بازه $[-3\pi,\pi]$ را می یابیم .طبق جدول جوابها برابر است با : $-2\pi\pm\frac{\pi}{3}$ و $\pm\frac{\pi}{3}$

k	-2	-1	0	1
$2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$	× $-4\pi\pm\frac{\pi}{3}$	✓ $-2\pi\pm\frac{\pi}{3}$	✓ $\pm\frac{\pi}{3}$	× $2\pi\pm\frac{\pi}{3}$

*اگر معادله به صورت $\boxed{\cos x = -a}$ باشد:

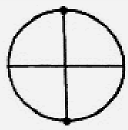
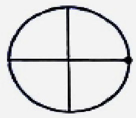
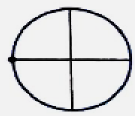
باید زاویه مربوط به مقدار مثبت را از π کم کنیم

$$\cos x = -a \to \cos x = \cos\left(\pi - \alpha\right)$$

مثال:

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \to \cos x = \cos\underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right)}_{\frac{۲\pi}{۳}} \to \underline{x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}}$$

*حالت های خاص:

	$\cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$
	$\cos x = ۱ \to x = ۲k\pi$
	$\cos x = -۱ \to x = ۲k\pi + \pi$

(مثال ص ۴۸)

معادله $\cos x\left(۲\cos x - ۹\right) = ۵$ را حل کنید.

☑حل:

$$\cos x\left(۲\cos x - ۹\right) = ۵ \to$$

$$۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱۲۱}$$

$$\cos x = -\frac{۱}{۲} \to \cos x = \cos\underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right)}_{\frac{۲\pi}{۳}} \to \underline{x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}}$$

$\cos x = ۵ \to$ غیر قابل قبول ، زیرا باید $\left(-۱ \le a \le ۱\right)$

(تمرین ۳(ب) ص۴۸)

ب)معادله $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

☑حل:

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱}$$

$$۲\cos^۲ x \cancel{-۱} - \cos x \cancel{+۱} = ۰ \to$$

$$۲\cos^۲ x - \cos x = ۰ \xrightarrow{\text{فاکتور}} \cos x\left(۲\cos x - ۱\right) = ۰$$

$$\to \begin{cases} \cos x = ۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} \underline{x = k\pi + \frac{\pi}{۲}} \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \to \cos x = \frac{۱}{۲} \to \\ \cos x = \cos\frac{\pi}{۳} \to \underline{x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}} \end{cases}$$

* اگردو کسینوس با هم برابرشوند ، می توانیم جواب های کلی معادله را بنویسیم ولازم نیست برای کسینوس حتما یک عدد مشخصی به دست آید

(تمرین ۳(پ) ص۴۸)

پ)معادله $\cos x = \cos ۲x$ را حل کنید.

☑حل:

$$\cos x = \cos ۲x \to \begin{cases} x = ۲k\pi + ۲x \to \underline{x = -۲k\pi} \\ x = ۲k\pi - ۲x \to \underline{x = \frac{۲k\pi}{۳}} \end{cases}$$

*در حل معادلات مثلثاتی باید نسبتها را به یک نسبت تبدیل کنیم

(تمرین ۳(ت و ث) ص۴۸)

ت)معادله $\cos ۲x - ۳\sin x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

ث) معادله $\cos^۲ x - \sin x = \frac{۱}{۴}$ را حل کنید.

(مثال ص ۴۷)

معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ **را حل کنید.**

☑**حل:**

دو طرف در ۲ ضرب می شود:

$$\underbrace{2\sin x\cos x}_{\downarrow}=2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\to \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow \underline{x=k\pi+\frac{\pi}{6}} \\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\underline{\frac{2k\pi+\pi}{2}-\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

*در حل معادلات مثلثاتی میتوانیم از زوایای متمم کمک بگیریم و دو طرف را به یک نسبت تبدیل کنیم

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

(تمرین ۳(ج) ص۴۸)

③ج)**معادله** $\sin x-\cos 2x=0$ **را حل کنید.**

☑**حل:**

الف) روش اول:

$$\sin x=\cos 2x\xrightarrow{\cos 2x=1-2\sin^2 x}$$

$$\sin x-\left(1-2\sin^2 x\right)=0\to 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$\to\begin{cases} \sin x=-1\to \underline{x=2k\pi-\frac{\pi}{2}} \\ \sin x=-\frac{1}{2}\to \begin{cases} \underline{x=2k\pi+\frac{\pi}{6}} \\ \underline{x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}} \end{cases} \end{cases}$$

ب) روش دوم:

$$\sin x=\cos 2x\xrightarrow{\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 2x\to 2x=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-x\to x=\underline{\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}} \\ 2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}+x\to \underline{x=2k\pi-\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$