فصل اول

تابع

- درس اول : توابع چند جمله ای- توابع صعودی و نزولی
- درس دوم: ترکیب توابع
- درس سوم: تابع وارون

بارم فصل ۱:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۷	۲	۳

فصل ۱ درس ۱: توابع چند جمله ای- توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله ای:

*توابعی را که نمایش جبری آنها، چند جمله ای های جبری از یک متغیر هستند، توابع چند جمله ای می نامیم.

*دامنه توابع چند جمله ای $(\mathbb{R})$است.

*بزرگترین توان متغیر در یک چند جمله‌ای، درجهٔ چند جمله‌ای خواهد بود.

چند جمله ای از درجه n:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

$(a_n\neq 0),\ n\to$ عدد صحیح نامنفی

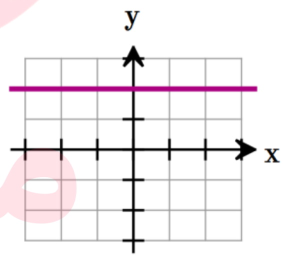
چند جمله ای درجه ۰:

تابع ثابت: $f(x)=b \qquad \to R=\{b\}$

مثال:

$f(x)=2$

$R=\{2\}$



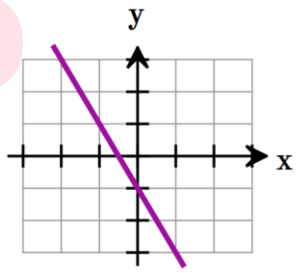
چند جمله ای درجه ۱:

تابع خطی: $f(x)=ax+b \qquad \to R=\mathbb{R}$

مثال:

$f(x)=-2x-1$

$R=\mathbb{R}$



چند جمله ای درجه ۲:

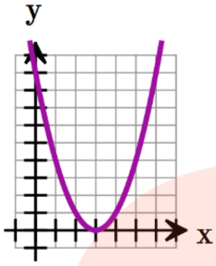
تابع درجه۲: $f(x)=ax^2+bx+c$

$\to R=\left(-\infty,\frac{-\Delta}{4a}\right),\left(\frac{-\Delta}{4a},+\infty\right)$

مثال:

$f(x)=x^2-6x+9$

$R=[0,+\infty)$



چند جمله ای درجه ۳:

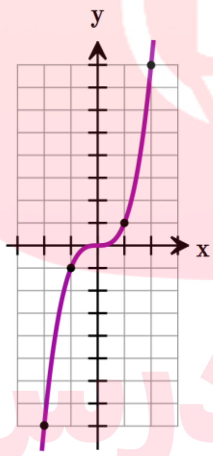
تابع درجه۳: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \to R=\mathbb{R}$

مثال:

$f(x)=x^3$

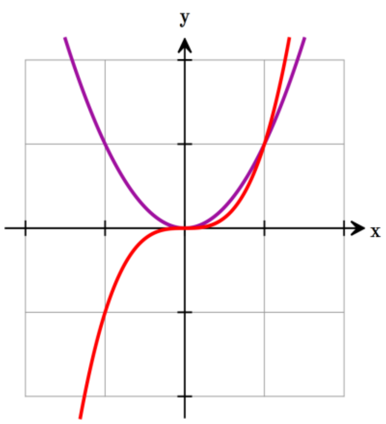
$R=\mathbb{R}$

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8



(فعالیت ص ۴)

آیا برای x های نامنفی، نمودار $y=x^3$ بالای نمودار $y=x^2$ قرار دارد؟



☑حل:

خیر ،

برای مقادیربین ۰ و۱

نمودار x^3 پایین

نمودار x^2 است

برای مقادیربزرگتر از ۱

نمودار x^3 بالای نمودار

x^2 است

مراحل رسم توابع به کمک انتقال:

*تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$y = af\left(bx + c\right) + d$$

۱) a,d روی عرض نقاط $\left(y\right)$ تاثیر مستقیم دارند و انتقال به صورت آسانسوری است

*اگر $a > ۱$ باشد نمودار انبساط عمودی یافته.

*اگر $۰ < a < ۱$ باشد نمودارانقباض عمودی یافته.

۲) b,c روی طول نقاط $\left(x\right)$ تاثیرمعکوس دارند و انتقال قطاری است.

*اگر $b > ۱$ باشد نمودار انقباض افقی یافته.

*اگر $۰ < b < ۱$ باشد نمودار انبساط افقی یافته.

اولویت ها:

*اول $\left(x\right)$ یا $\left(y\right)$ فرقی ندارددولی:

۱) در $\left(x\right)$ ها اول c سپس b

۲)در $\left(y\right)$ ها اول a سپس d

رسم توابع درجه ۳:

*برای رسم توابع درجه ۳ از نقطه یابی یا قوانین انتقال کمک می گیریم

(فعالیت ص۴و تمرین۱ ص۱۰)

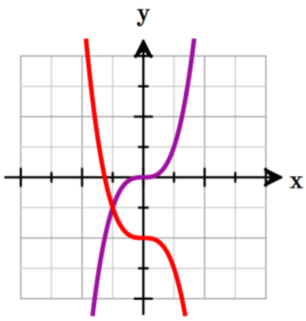
نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

۱) $y = -x^۳ - ۲$

☑حل: $\boxed{D = \mathbb{R}\ ,\ R = \mathbb{R}}$

روش اول: رسم به کمک انتقال:

نمودار $f\left(x\right) = x^۳$ را نسبت به محور x قرینه ، سپس ۲واحد به پایین منتقل می کنیم

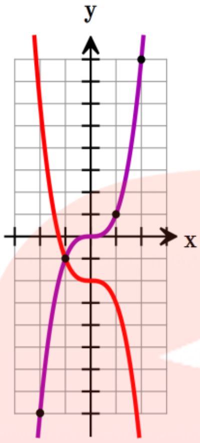


روش دوم: رسم به کمک نقطه یابی:

ابتدا جدول نقاط را رسم می کنیم سپس نقاط را روی محور مشخص و به هم وصل می کنیم.

در جدول نقاط y ها را قرینه و منهای ۲ می کنیم

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۸	-۱	۰	۱	۸

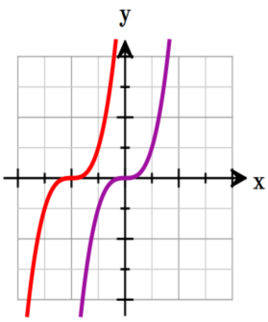


۲) $y = \left(x + ۲\right)^۳$

☑حل:

$\boxed{D = \mathbb{R}\ ,\ R = \mathbb{R}}$

نمودار $f\left(x\right) = x^۳$ را ۲ واحد به چپ منتقل می کنیم



۳) $y = -\left(x - ۲\right)^۳$

۴) $y = \left(x - ۱\right)^۳ - ۱$

۵) $y = \left(x + ۲\right)^۳ - ۲$

(کاردرکلاس ص۵)

ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

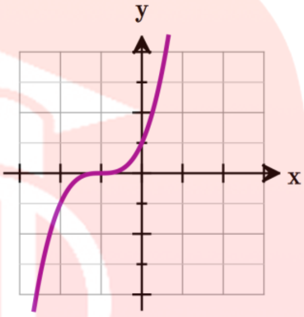
الف) $y=(x-1)^3+2$ ب) $y=(x-2)^3$

پ) $y=-x^3+1$ ت) $y=(x+1)^3-1$

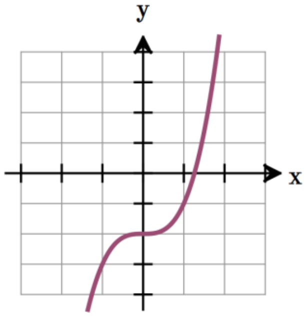
ث) $y=-x^3$ ج) $y=(x+1)^3$

چ) $y=x^3+1$ ح) $y=-x^3-1$

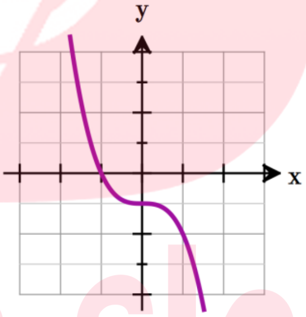
خ) $y=x^3-2$



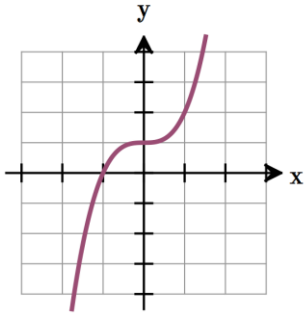
(۱)



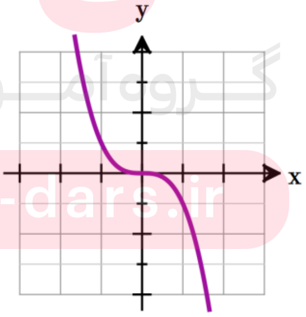
(۲)



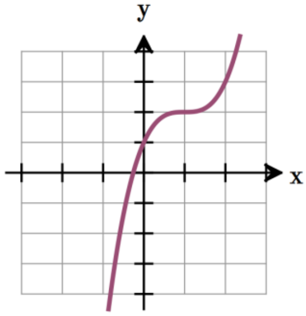
(۳)



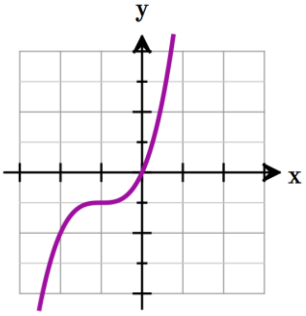
(۴)



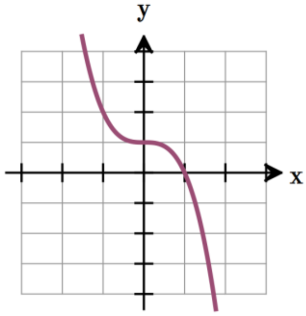
(۵)



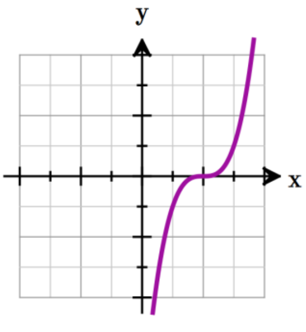
(۶)



(۷)



(۸)



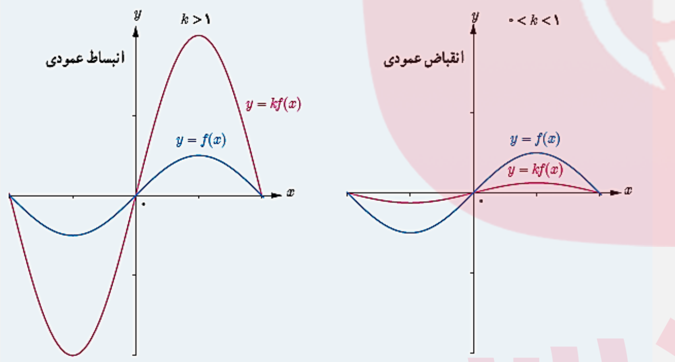
(۹)

تبدیل نمودار توابع:

۱) رسم نمودار توابع $y=kf(x)$:

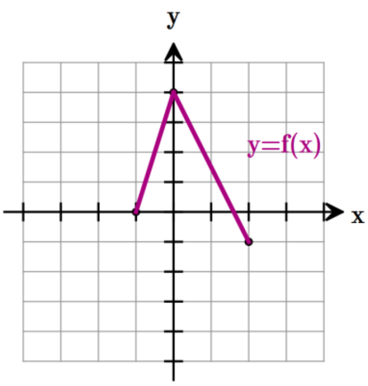
*برای رسم نمودارتابع $y=kf(x)$ کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در k ضرب کنیم

*دامنه تابع با ضابطه $y=kf(x)$ همان دامنه تابع $y=f(x)$ است ، اما برد آنها لزوما یکسان نیست



(مثال ص ۱۵)

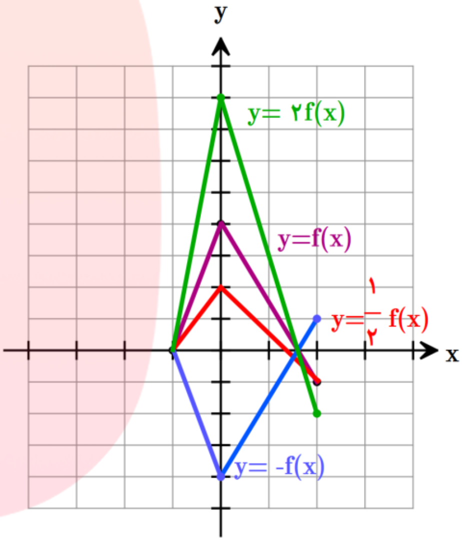
اگر نمودار $f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(x)$ ، $y=-f(x)$ ، $y=2f(x)$ را رسم کنید



☑حل:

در این سوال دامنه تغییری نمی کند فقط برد تغییر می کند.

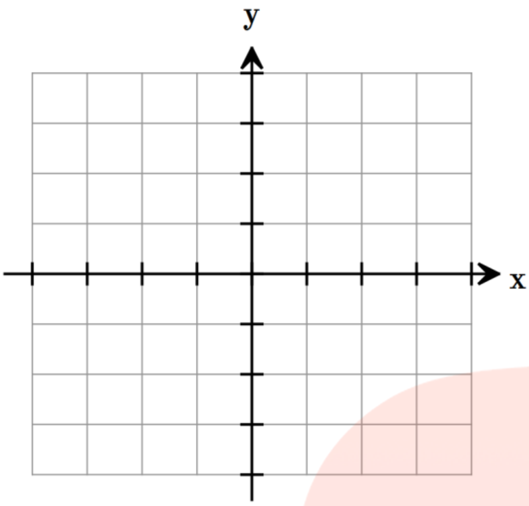
x	-۱	۰	۲	$D=[-۱,۲]$
y	۰	۴	-۱	$R=[-۱,۴]$
$y\times\frac{۱}{۲}$	۰	۲	$-\frac{۱}{۲}$	$R=\left[-\frac{۱}{۲},۲\right]$
$y\times -۱$	۰	-۴	۱	$R=[-۴,۱]$
$y\times ۲$	۰	۸	-۲	$R=[-۲,۸]$



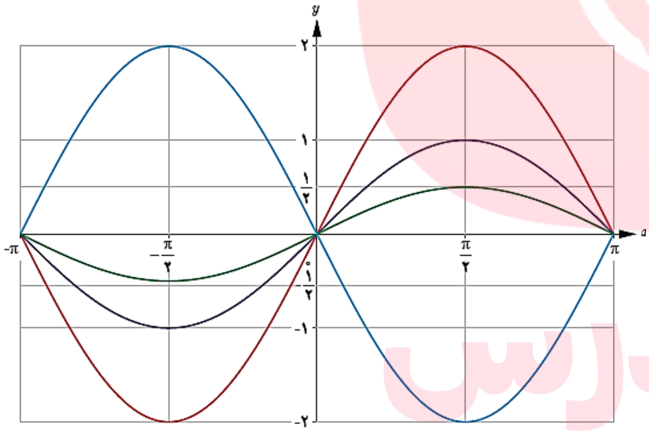
(کاردرکلاس ص ۱۶)

۱.نمودارتابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازه $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودارتوابع زیررا روی یک محوررسم کنید.

$$k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|,h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|,g(x)=-|x-۲|$$



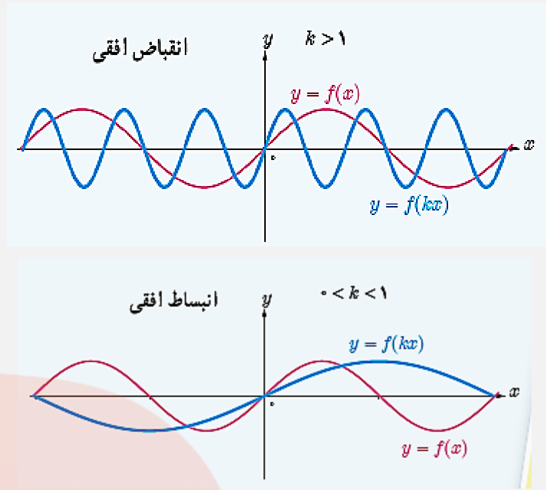
۲.در شکل زیر نمودارتوابع با ضابطه های $y=\sin x$ و $y=۲\sin x$, $y=-۲\sin x$, $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم شده است نمودار را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگرچگونه به کمک آن رسم شده است . دامنه وبرد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.



۲)رسم نمودار توابع $y=f(kx)$:

٭برای رسم نمودارتابع $y=f(kx)$ کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{۱}{k}$ ضرب یا به k تقسیم کنیم

٭دامنه تابع $y=f(kx)$ بادامنه تابع $y=f(x)$ الزاما یکسان نیست، اما برد $y=f(kx)$ همان برد $y=f(x)$ است



(مثال ص ۱۸)

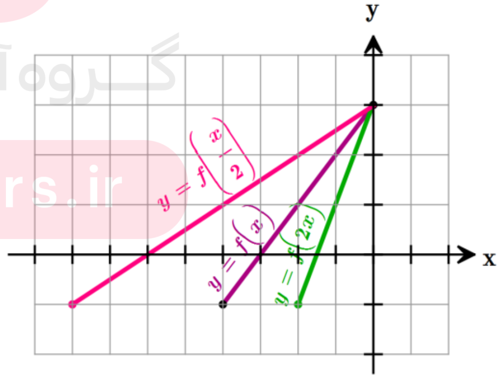
نمودارتابع $f(x)=x+3$ را با دامنه $[-4,0]$ رسم کنیدو به کمک آن نمودارتوابع زیررا روی یک محوررسم کنید.

$$y=f(2x),\ y=f\left(\frac{x}{2}\right)$$

☑حل:

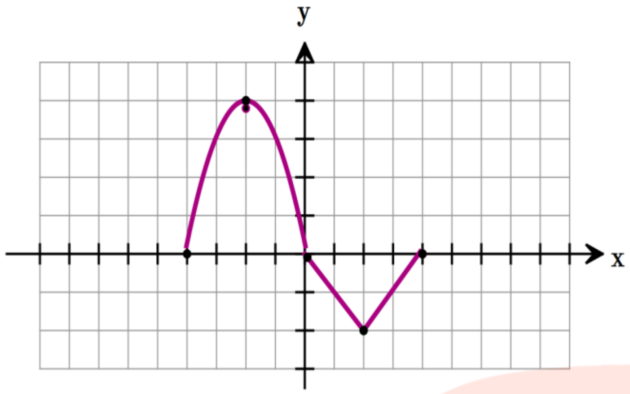
در این سوال برد تغییری نمی کند فقط دامنه تغییر می کند.

x	-4	0	$D=[-4,0]$
y	-1	3	$R=[-1,3]$
$x\times\frac{1}{2}$	-2	0	$D=[-2,0]$
$x\times 2$	-8	0	$D=[-8,0]$



(کاردرکلاس ص ۲۰)

نمودار $f(x)$ در بازه $[-4,4]$ به صورت زیر می باشد، نمودار توابع $y=f(2x)$, $y=f\left(\frac{1}{2}x\right)$ را رسم کنید.

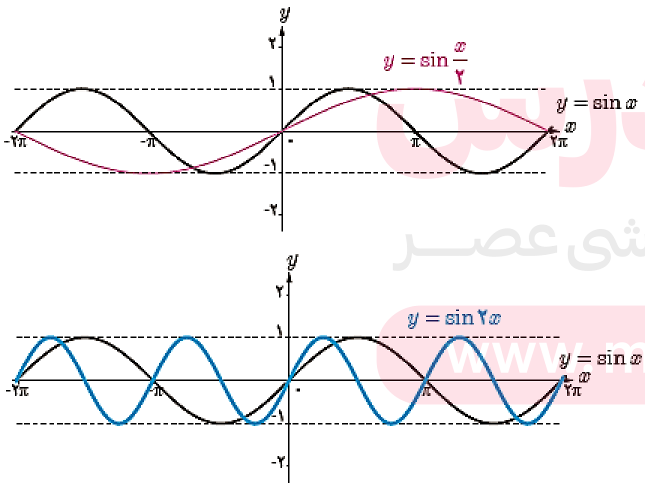


(مثال ص ۱۹)

نمودارتوابع $y=\sin\frac{x}{2}$, $y=\sin 2x$ به کمک نمودارتابع $y=\sin x$ در بازه $[-2\pi,2\pi]$ رسم کنید

☑حل:

در این سوال برد تغییری نمی کند فقط دامنه تغییر می کند.



(تمرین ۱۰و۱۱و۱۲ص ۲۳)

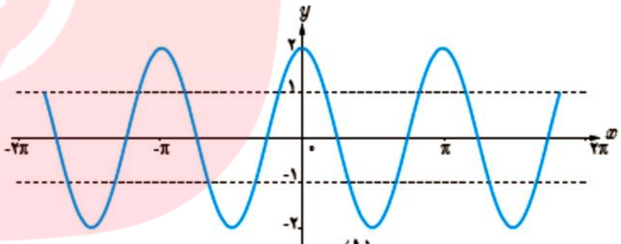
(۱۱) نمودارتابع $y=\sin x$ را در بازه $[-\pi,\pi]$ رسم کنیدو به کمک آن نمودارتوابع زیررا رسم کنید.

$$y=-\sin 2x-1\ ,\ y=2\sin\left(\frac{-1}{3}x\right)$$

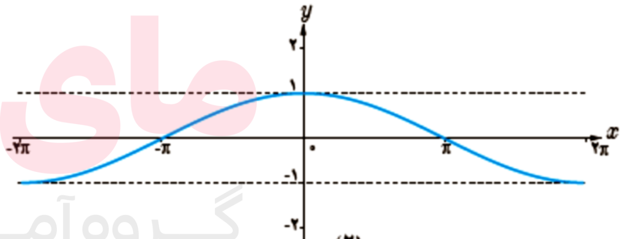
⑩ با استفاده از نمودار $y = \cos x$ ، ضابطه هرنمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ب) $y = ۲\cos ۲x$

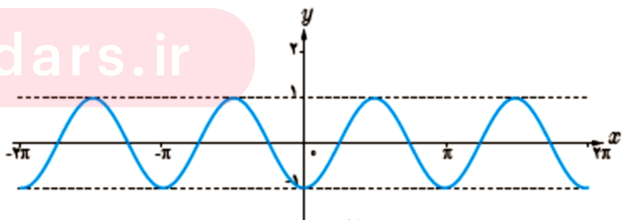
پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$ ت) $y = -\cos ۲x$



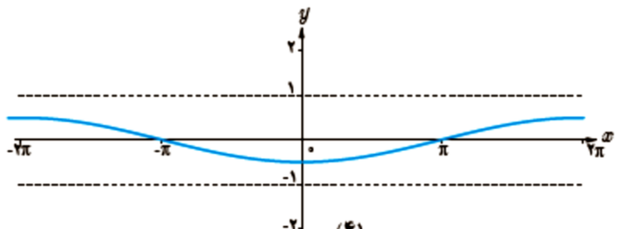
(۱)



(۲)



(۳)

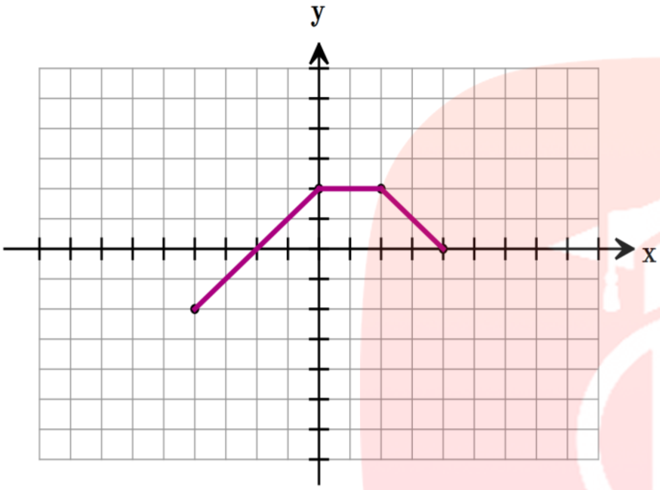


(۴)

⑫ اگر نمودار $f\left(x\right)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید

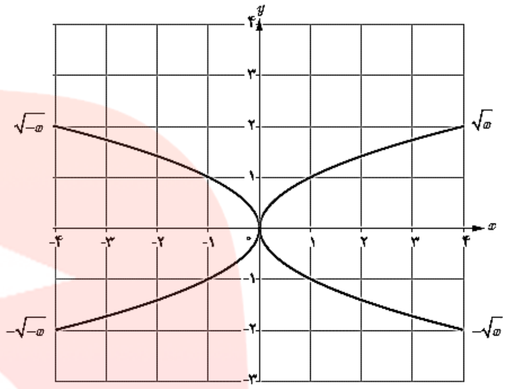
$۱)y = \frac{۱}{۲}f\left(۲x\right) - ۱$ $۲)y = -f\left(-x\right) + ۲$

$۳)y = ۲f\left(x - ۱\right) - ۳$ $۴)y = ۲f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$



(کاردرکلاس ص ۱۹)

نمودارتوابع $y=\sqrt{-x}\,,y=-\sqrt{x}\,,y=-\sqrt{-x}$ به کمک آن نمودارتابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده است دامنه و برد توابع را بنویسید.



۳)رسم نمودار $y=\left|f\left(x\right)\right|$:

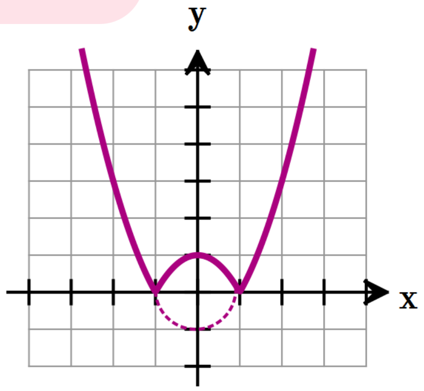
*نمودار $y=f\left(x\right)$ را رسم می کنیم و قسمت هایی را که منفی و زیر محور xاست را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم زیرا قدر مطلق ،مقادیر منفی را مثبت می کند

(مثال ص ۱۷)

نمودار تابع $y=\left|x^{2}-1\right|$ را رسم کنید.

☑حل:

ابتدا نمودار $x^{2}-1$ را که یک سهمی است رسم می کنیم سپس قسمت های منفی را نسبت به محور x قرینه می کنیم

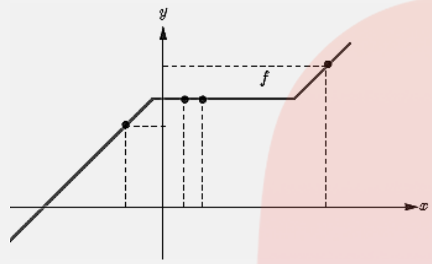


توابع صعودی و توابع نزولی:

*وقتی x در دامنه تابع افزایش می یابد تغییرات تابع(رفتار) به صورت زیر بررسی می شود:

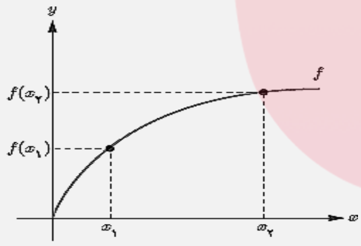
الف)تابع صعودی: تابعی که با افزایش xمقدار y یا افزایش می یابد یا ثابت می ماند.

$$x_{1},x_{2}\in D_{f}:x_{1}<x_{2}\Rightarrow f\left(x_{1}\right)\leq f\left(x_{2}\right)$$



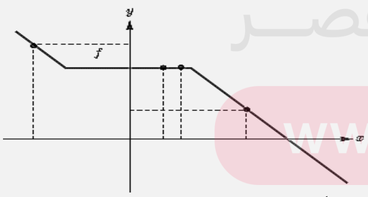
ب) تابع اکیداً صعودی: تابعی که با افزایش xمقدار yهم افزایش می یابد

$$x_{1},x_{2}\in D_{f}:x_{1}<x_{2}\Rightarrow f\left(x_{1}\right)<f\left(x_{2}\right)$$



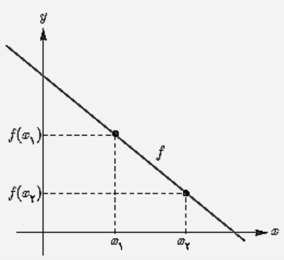
پ)تابع نزولی: تابعی که با افزایش xمقدار y یا کاهش می یابد یا ثابت می ماند.

$$x_{1},x_{2}\in D_{f}:x_{1}<x_{2}\Rightarrow f\left(x_{1}\right)\geq f\left(x_{2}\right)$$



ت) تابع اکیداً نزولی: تابعی که با افزایش xمقدار y کاهش می یابد

$$x_{1},x_{2}\in D_{f}:x_{1}<x_{2}\Rightarrow f\left(x_{1}\right)>f\left(x_{2}\right)$$



نکات توابع صعودی و توابع نزولی:

***تابع ثابت** در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می شود.

***تابع یکنوا :** اگرتابع در بازه ای صعودی یا نزولی باشد،گوییم تابع یکنواست

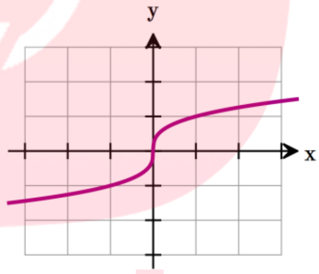
*** تابع اکیداً یکنوا:** اگرتابع در بازه ای اکیداً صعودی(یا اکیداً نزولی) باشد،گوییم تابع اکیدا یکنواست مثل تابع خطی درجه ۳،تابع نمایی و لگاریتمی

*توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستنداما عکس آن درست نیست.

*اگر تابعی اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد(اکیداً یکنوا)حتماًیک به یک (y تکراری نداریم) نیز هست.

(فعالیت ص۱۰)

باتوجه به نمودار:



الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟

ب) این تابع یک به یک است؟

پ) آیا تابعی وجود دارد که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی یک به یک نباشد؟

☑حل:

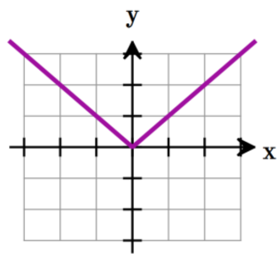
الف) اکیدا صعودی

ب) بله

پ) خیر

*** تابع غیر یکنوا:** تابعی که نه صعودی و نه نزولی است یعنی در بعضی بازه ها صعودی(اکیداً صعودی) و در بعضی بازه ها نزولی(اکیداً نزولی) است

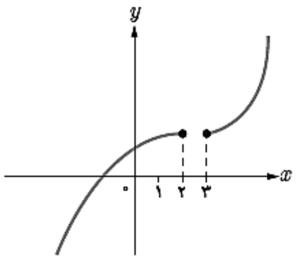
(مثال ص ۸) $y = |x|$



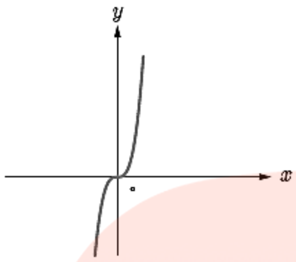
اکیداً نزولی	$(-\infty, 0]$
اکیداً صعودی	$[0, +\infty)$
غیر یکنوا	$(-\infty, +\infty)$

(کاردرکلاس ص۸)

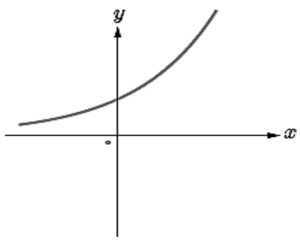
هر کدام از توابع زیر در چه بازه هایی اکیداً صعودی و در چه بازه هایی اکیداً نزولی هستند؟



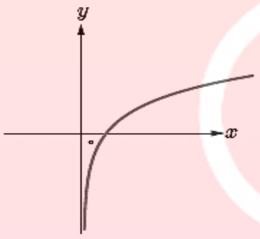
(الف)



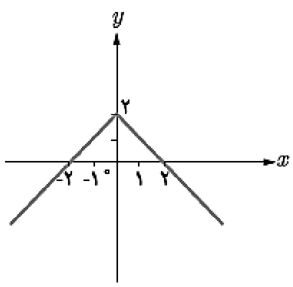
(ب)



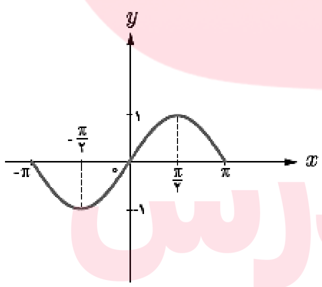
(ت)



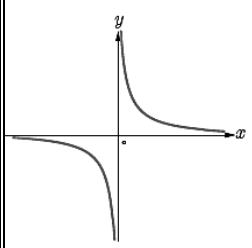
(ث)



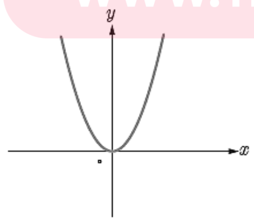
(ج)



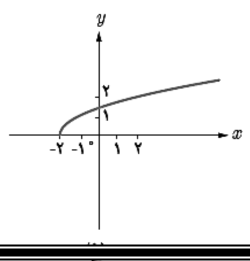
(ح)



(چ)

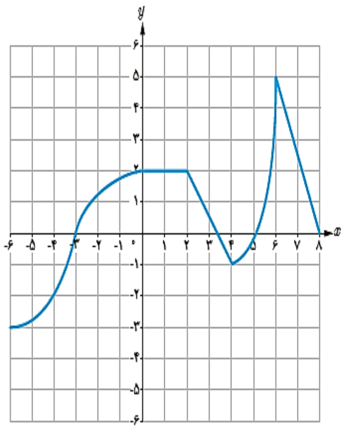


(پ)



(تمرین ۳ ص ۱۰)

با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟

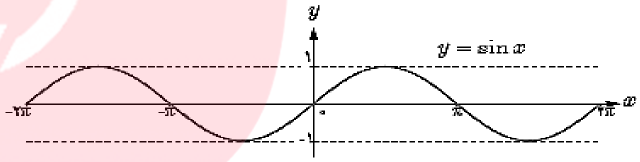


☑حل:

صعودی	$[-6,0]$
ثابت	$[0,2]$
نزولی	$[2,4]$
صعودی	$[4,6]$
نزولی	$[6,8]$

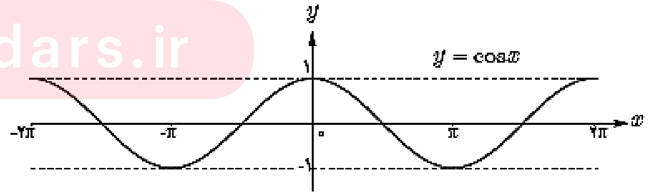
(کاردرکلاس ص ۹)

صعودی یا نزولی بودن نمودارتوابع زیر را در بازه های مشخص شده تعیین کنید.



x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$
$y=\sin x$				

$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
صعودی			



x	$[-2\pi,-\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2},-\pi]$	$[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2},0]$
$y=\cos x$				

$[0,\frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$[\pi,\frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$
		صعودی	

(کاردرکلاس ص ۹)

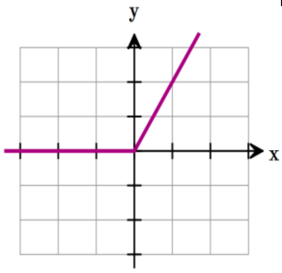
نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه هایی صعودی و در چه بازه هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{3})$ $\qquad D_f=[0,2\pi]$

ب) $g(x)=x+|x|$

☑حل:

$$y=x+|x|=\begin{cases} x+x=2x & x\geq 0 \\ x-x=0 & x<0 \end{cases}$$



ثابت	$(-\infty,0)$
اکیداَصعودی	$[0,+\infty)$
صعودی	$(-\infty,+\infty)$

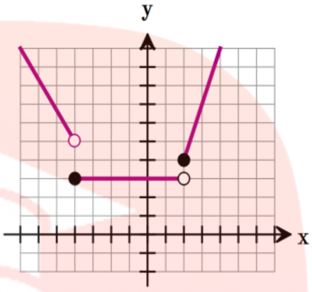
پ) $t(x)=-x^3-1$

(تمرین ۲و۴و۵و۶و۷ ص ۱۰)

② نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۲x-۳ & x<-۴\\ ۳ & -۴\le x<۲\\ ۳x-۲ & x\ge ۲\end{cases}$$

☑حل:

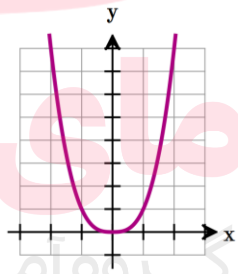


اکیداً نزولی	$(-\infty,-۴)$
ثابت	$[-۴,۲)$
اکیداً صعودی	$[۲,+\infty)$

⑤ تابع $y=x^۲\lvert x\rvert$ در بازه $(-\infty,a]$ نزولی است ، حداکثر مقدار a را به دست آورید.

☑حل:

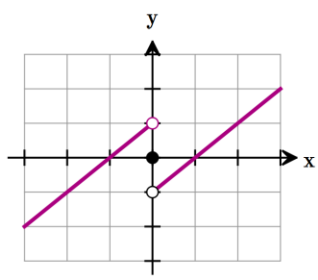
$$y=x^۲\lvert x\rvert=\begin{cases}x^۳ & x>۰\\ -x^۳ & x\le ۰\end{cases}$$

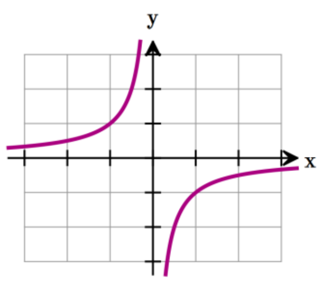


$(-\infty,a]\rightarrow a=۰$

⑦ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه های $(-\infty,۰),(۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد ولی در R اکیداً صعودی نباشد.

☑حل:

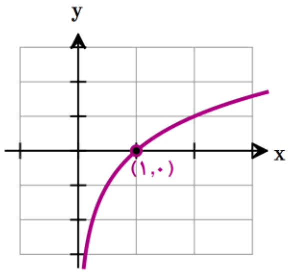




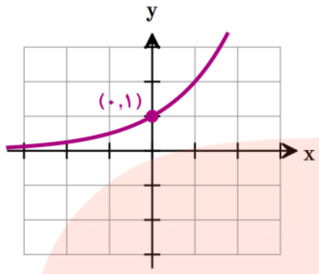
⑥ الف)تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی باشد

☑حل:

$y=\log_a x\,(a>۱)$



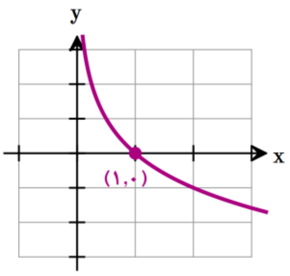
$y=a^x\,(a>۱)$



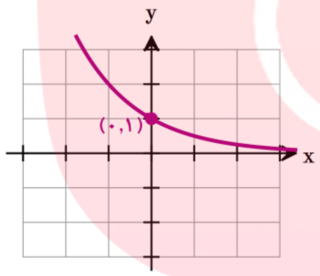
ب)تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

☑حل:

$y=\log_a x\,(۰<a<۱)$



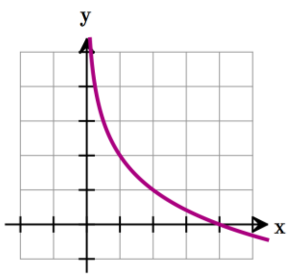
$y=a^x\,(۰<a<۱)$



④ تابع نمایی $y=۲^x-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_۲^x+۲$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

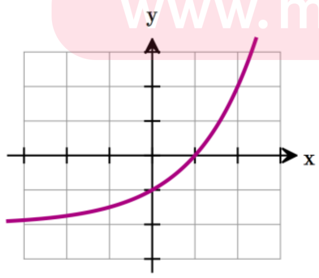
☑حل:

$y=-\log_۲^x+۲$



اکیدا نزولی

$y=۲^x-۲$



اکیدا صعودی

فصل ۱ درس ۲: ترکیب توابع

ترکیب توابع (تابع مرکب):

* تابع نوعی ماشین است که به ازای هر ورودی دقیقا یک خروجی تولید می کند $x \xrightarrow{\boxed{f}} f(x)$

*هرگاه خروجی یک تابع را به عنوان ورودی تابع دیگر استفاده کنیم در واقع دو تابع را باهم ترکیب کرده ایم.

۱) تابع fog:

$$x \xrightarrow{\boxed{g}} g(x) \xrightarrow{\boxed{f}} f\big(g(x)\big)$$

۲) تابع gof:

$$x \xrightarrow{\boxed{f}} f(x) \xrightarrow{\boxed{g}} g\big(f(x)\big)$$

محاسبه تابع مرکب در زوج های مرتب:

برای راحتی کار از نمودار پیکانی کمک می گیریم

(مثال ص ۱۳)

اگر $f=\{(0,-1),(5,2),(3,5),(-2,4)\}$ و تابع $g=\{(1,2),(3,-1),(2,0),(-1,4),(5,-7)\}$

gof را بیابید.

☑حل:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 4 \\ 5 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} 0 \\ 3 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g} -7 \\ -2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g} \times \end{array}\right\} \xrightarrow{gof} \{(0,4),(5,0),(3,-7)\}$$

(تمرین ۱ ص ۲۲)

① اگر $f=\{(7,8),(5,3),(9,8),(11,4)\}$ و $g=\{(5,7),(3,5),(7,9),(9,11)\}$ ، تابع fog, gof را بیابید

محاسبه مقدار تابع مرکب از روی جدول و نمودار:

برای پیدا کردن مقدار تابع ، ابتدا مقدار x را در تابع داخلی قرار می دهیم.سپس حاصل را در تابع خارجی جایگزین می کنیم

(کاردرکلاس ص ۱۴و تمرین ۸ ص ۲۳)

با توجه به جدول های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به دست آورید.

x	$g(x)$
-۳	۸
-۲	۳
-۱	۰
۰	-۱
۱	۰
۲	۳
۳	۸

x	$f(x)$
-۳	-۷
-۲	-۵
-۱	-۳
۰	-۱
۱	۳
۲	۵
۳	۵

الف) $(f o g)(1)$

☑حل:

$$1 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} \boxed{-1}$$

یا

$$f o g(1)=f\big(g(x)\big) \xrightarrow{x=1} f\big(g(1)\big) = -1$$

ب) $(f o g)(-1)$

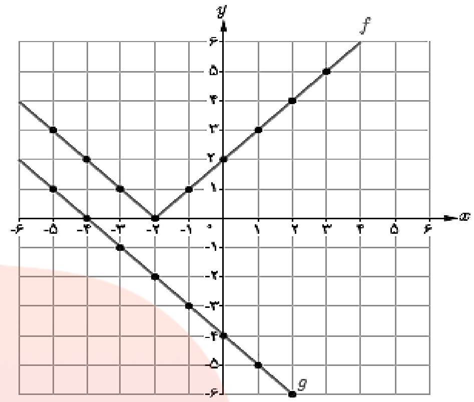
پ) $(gof)(0)$

ت) $(gog)(-2)$

ث) $(gof)(2)$

ج) $(f o f)(1)$

⑧ با توجه به نمودارهای f, g توابع مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $(f\,o\,g)(-1)$

ب) $(gof)(0)$

پ) $(f\,o\,g)(1)$

ث) $(gof)(-1)$

محاسبه توابع مرکب با استفاده از ضابطه:

اگر دوتابع $f(x), g(x)$ داشته باشیم و به جای x یکی از تابع ها، ضابطه یا مقدار تابع دیگر را قرار دهیم، می گوییم دوتابع را ترکیب کرده ایم.

تابع مرکب	ضابطه تابع	روش محاسبه
$(fog)(x)$	$f(g(x))$	در f به جای x بذار $g(x)$
$(gof)(x)$	$g(f(x))$	در g به جای x بذار $f(x)$
$(fof)(x)$	$f(f(x))$	در f به جای x بذار $f(x)$

*معمولا توابع fog, gof با هم برابر نیستند.

دامنه تابع مرکب:

*دامنه تابع مرکب fog مجموعه x هایی است که هم زمان در دو شرط زیر صدق کنند:

۱) x در دامنه g قرار داشته باشد.

۲) $g(x)$ در دامنه f قرار داشته باشد.

$$D_{fog} = \left\{ \underbrace{x \in D_g}_{1} \;/\; \underbrace{g(x) \in D_f}_{2} \right\}$$

*به طور مشابه دامنه gof هم به صورت زیر است:

$$D_{gof} = \left\{ \underbrace{x \in D_f}_{1} \;/\; \underbrace{f(x) \in D_g}_{2} \right\}$$

الف) شرط تشکیل تابع fog: $R_g \cap D_f \neq \varnothing$

ب) شرط تشکیل تابع gof: $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

*دامنه توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می آوریم نه از روی ضابطه آن.

(مثال ص ۱۴)

الف) اگر $f(x) = x - 2, g(x) = x^2 - 1$ دامنه و ضابطه ی تابع gof را بیابید

☑ حل:

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}\;,\; D_g = \mathbb{R}}$$

دامنه تابع gof:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \;/\; f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \;/\; (x-2) \in \mathbb{R}\} \xrightarrow{\cap} \mathbb{R}$$

ضابطه ی تابع gof:

$$(gof)(x) = g(f(x)) \xrightarrow[g(x)=x^2-1]{\text{در } g \text{ به جای } x \text{ بذار } f(x)} (x-2)^2 - 1$$

ب) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = 2x^2 - 1$ دامنه و ضابطه ی تابع fog, gof را بیابید

(کاردرکلاس ص۱۴)

اگر $f\left(x\right)=\frac{۲}{x-۱},g\left(x\right)=\frac{۳}{x}$ دامنه و ضابطه ی تابع fog,fof را بیابید

(تمرین ۲ ص۲۲)

② در هر قسمت دامنه و ضابطه ی تابع fog را بیابید

الف) $f(x)=x^{۲}-۵\quad ;\ g(x)=\sqrt{x+۶}$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}\ ;\ g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$

② در هر قسمت دامنه و ضابطه ی تابع gof را بیابید

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲}\quad ;\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱۶}$

ت) $f(x)=\sin x\quad ;\ g(x)=\sqrt{x}$

(تمرین ۴و۳و۵ ص۲۲)

④ الف) اگر $f\left(x\right)=x^{۲}-۴,g\left(x\right)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ آنگاه $f\,o\,g\left(۵\right)=-۲۵$

ب) برای هر دو تابع f وg که $f\neq g$ تساوی $\left(fog\right)\left(x\right)=\left(gof\right)\left(x\right)$ هیچ وقت برقرار نیست

پ) اگر $g(۴)=۷, f(۷)=۵$ آن گاه $f\,o\,g(۴)=۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}\,, g(x)=۲x-۱$ آن گاه $(f\,o\,g)(۵)=g(۲)$.

③ اگر $f(x)=۳x-۴, f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ ضابطه ی تابع $g(x)$ را بیابید

☑حل:

در f به جای x بذار $g(x)$

$$\begin{cases} f(g(x))=۳g(x)-۴ \\ f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴ \end{cases} \rightarrow$$

$$۳g(x)-۴=۳x^۲-۶x+۱۴ \rightarrow$$
$$۳g(x)=۳x^۲-۶x+۱۸ \rightarrow$$
$$g(x)=\boxed{x^۲-۲x+۶}$$

⑤ الناز می خواهد از فروشگاه بهار یک لپ تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید .این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است .همچنین این فروشگاه روزهای پنج شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می دهد .با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام یک از حالت های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب)اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

نوشتن یک تابع به صورت ترکیب دو تابع:

*همیشه دو تابع را ترکیب می کردیم و تابع مرکب می ساختیم حالا می خواهیم عکس این کار را انجام دهیم برای این کار، قسمتی از تابع مرکب (تابع مرکب را fog در نظر میگیریم) را جدا می کنیم و به عنوان تابع $g(x)$ در نظر می گیریم و در جای خالی، حرف x قرار می دهیم و تابعی که به دست می آید تابع $f(x)$ است

*ازیک تابع می توان بی شمار ، ترکیب دو تابع ساخت

(تمرین ۶و ۷ ص ۲۲)

⑦ هریک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید .

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

☑حل:

$$h(x)=\sqrt[۳]{\underbrace{\boxed{x^۲}}_{g(x)=x^۲}+۱} \Rightarrow f(x)=\sqrt[۳]{x+۱} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\sqrt[۳]{x+۱}\ ,\ \ g(x)=x^۲}$$

ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

⑥تابع $h(x)=(3x^2-4x+1)^5$ ترکیب کدام دو تابع زیر است.

الف) $f(x)=\sqrt[5]{x}\ ,\ g(x)=3x^2-4x+1$

ب) $k(x)=x^5\ ,\ l(x)=3x^2-4x+1$

معادلات توابع مرکب:

می توانیم ابتدا ضابطه مرکب را پیدا کنیم سپس معادله به دست آمده را حل کنیم و یا از مراحل زیر کمک بگیریم:

*مراحل حل معادله $(f\,o\,g)(x)=a$:

1. به دست آوردن جواب معادله $f(x)=a$
2. جواب معادله $f(x)=a$ را مساوی عبارت $g(x)$ قرار داده و معادله را حل می کنیم

*مراحل حل معادله $(g\,of)(x)=a$:

1. به دست آوردن جواب معادله $g(x)=a$
2. جواب معادله $g(x)=a$ را مساوی عبارت $f(x)$ قرار داده و معادله را حل می کنیم

(تمرین ۹ص ۲۳)

⑨ با توجه به ضابطه های توابع f,g معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

الف) $f(x)=2x-5$ ، $g(x)=x^2-3x+8$ ، $f\,o\,g(x)=7$

☑حل:

راه اول:

☑حل:

راه دوم:

$1)f(x)=7\to 2x-5=7\to x=6$

$2)g(x)=6\to x^2-3x+8=6\to$

$x^2-3x+2=0\to(x-1)(x-2)=0\to\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$

ب) $g(x)=1-2x$ ، $f(x)=3x^2+x-1$ ، $gof(x)=-5$

فصل ۱ درس ۳: تابع وارون

تابع وارون:

در نمایش زوج مرتبی یک تابع یک به یک (f)، اگر جای مولفه های اول و دوم را عوض کنیم، وارون تابع (f^{-1}) به دست می آید.

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

مثال:

وارون تابع $f=\{(۲,۱),(۵,۳),(۶,۴)\}$ را بنویسید.

☑حل:

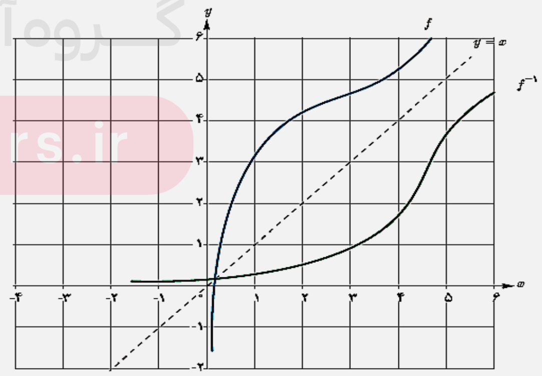
$$f^{-1}=\{(۱,۲),(۳,۵),(۴,۶)\}$$

*دامنه و برد f, f^{-1} عکس هم هستند:

$$D_f=R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f=D_{f^{-1}}$$

*نمودار تابع (f) و تابع وارون آن (f^{-1}) نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) قرینه اند.

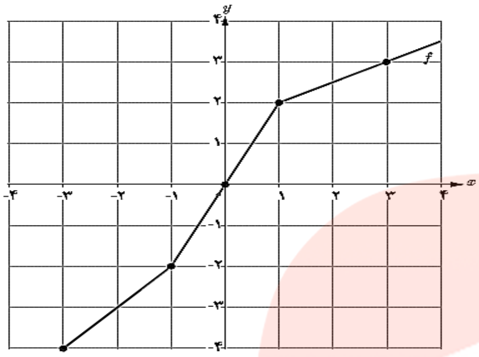
*برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است مختصات نقاطی را که روی (f) مشخص است پیدا کنیم و جای x,y را عوض کنیم و تابع وارون را رسم کنیم



(تمرین ۵ص۲۹)

⑤ از نمودار (f) برای تکمیل جدول استفاده کنید.

x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-1}(x)$	...	...	...	...



ترکیب تابع و تابع وارون:

اگر (f) تابعی وارون پذیر باشدترکیب f, f^{-1} تابعی همانی هست.

$$f(f^{-1}(x))=x \quad ; \quad x\in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x))=x \quad ; \quad x\in D_f$$

(مثال ص ۲۴)

اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ باشد حاصل $f o f^{-1}$ و $f^{-1}of$ را بیابید.

☑حل:

$$f^{-1}=\{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

$$\begin{cases}(fof^{-1})(۴)=f(f^{-1}(۴))=f(۱)=۴\\(fof^{-1})(۳)=f(f^{-1}(۳))=f(۲)=۳\\(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=f(۳)=۵\end{cases}$$

$$\rightarrow fof^{-1}=\{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(۱)=f^{-1}(f(۱))=f^{-1}(۴)=۱\\(f^{-1}of)(۲)=f^{-1}(f(۲))=f^{-1}(۳)=۲\\(f^{-1}of)(۳)=f^{-1}(f(۳))=f^{-1}(۵)=۳\end{cases}$$

$$\rightarrow f^{-1}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳)\}$$

*اگر دوتابع $f\,,g$ در شرایط زیر صدق کنند حتما یک به یک و وارون یکدیگرند.

الف) $(fog)(x)=x\ ;\ x\in D_g$

ب) $(gof)(x)=x\ ;\ x\in D_f$

(مثال ص ۲۶)

نشان دهید توابع $f(x)=3x-4, g(x)=\frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند

☑حل:

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع ،برابر تابع همانی است

$$f(g(x))=3g(x)-4=3(\frac{x+4}{3})-4=x \quad (x\in D_g)$$

$$g(f(x))=\frac{f(x)+4}{3}=\frac{3x-4+4}{3}=x \quad (x\in D_f)$$

(تمرین ۲ص۲۹)

نشان دهید توابع زیر وارون یکدیگرند

الف) $f(x)=\frac{-7}{2}x-3 \quad , \quad g(x)=-\frac{2x+6}{7}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-8} \quad , \quad g(x)=8+x^2\ ;\ x\le 0$

به دست آوردن ضابطه تابع وارون:

* اگرتابع یک به یک باشد برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون ابتدا x را بر حسب y محاسبه می کنیم (یعنی xرا تنها می کنیم)سپس جای x,y را عوض می کنیم و ضابطه $f^{-1}(x)$را می یابیم. ودامنه و برد تابع و وارون تابع را مشخص می کنیم.

*توابع خطی غیر ثابت $(\underset{a\neq 0}{y=ax+b})$ ، توابع رادیکالی و توابع گویا ،تابع یک به یک هستند.

*توابع خطی ثابت $(\underset{a=0}{y=ax+b})$، توابع سهمی وتوابع قدر مطلقی،تابع یک به یک نیستند.

(کاردرکلاس ص ۲۶)

آیاتابع $f(x)=x^3$ یک به یک است؟چرا؟

☑حل:

در نمایش مختصاتی تابع یک به یک، هر خط افقی(موازی محور x ها)، نمودار راحداکثر در یک نقطه قطع می کند به عبارتی y تکراری نداریم

(مثال و کاردر کلاس ص ۲۶و۲۷)

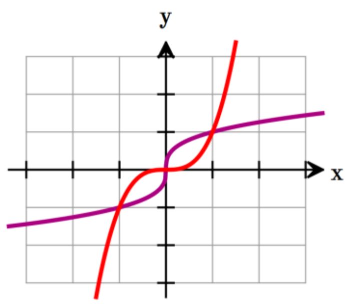
ضابطه تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید .دامنه و برد هر تابع و وارون آن رابا استفاده از نمودار مشخص کنید .

۱)$f(x)=x^3$

☑حل:

$$\underbrace{f(x)=x^3}_{D_f=R\ ,\ R_f=R}=y=x^3 \xrightarrow{\text{بر حسب } y\ \ x} x=\sqrt[3]{y}$$

$$\xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[3]{x} \rightarrow \underbrace{\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}}}_{D_{f^{-1}}=R\ ,\ R_{f^{-1}}=R}$$



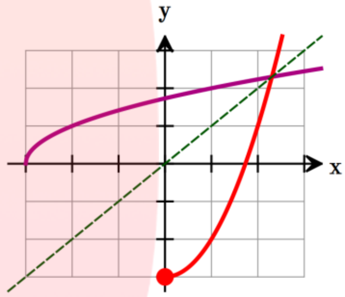
۲) $f\left(x\right)=\sqrt{x+۳}$

☑حل:

$\underbrace{f\left(x\right)=\sqrt{x+۳}}_{D_f=\left[-۳,+\infty\right)\,,\,R_f=\left[۰,+\infty\right)} \to y=\sqrt{x+۳} \xrightarrow{\text{۲طرف به توان ۲}}$

$y^۲=x+۳ \xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=y^۲-۳ \xrightarrow{x\leftrightarrow y}$

$y=x^۲-۳ \to \underbrace{\boxed{f^{-۱}\left(x\right)=x^۲-۳}}_{D_{f^{-۱}}=\left[۰,+\infty\right),\ R_{f^{-۱}}=\left[-۳,+\infty\right)}$



۳) $h\left(x\right)=x^۲+۱$

☑حل:

تابع یک به یک نیست و وارون ندارد

۴) $g\left(x\right)=۱+\sqrt{x-۲}$

۵) $f\left(x\right)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

(تمرین ۱ص۲۹)

ضابطه تابع وارون توابع زیر را به دست آورید

۱) $f\left(x\right)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

۵) $g\left(x\right)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

(تمرین ۳ص۲۹)

③رابطه بین درجه سانتی گراد و فارنهایت که برای اندازه گیری دما استفاده می شوند به صورت $f\left(x\right)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجه سانتی گراد و $f\left(x\right)$ میزان درجه فارنهایت است . $f^{-۱}\left(x\right)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می دهد.

وارون ترکیب دو تابع:

*اگر ترکیب دوتابع را وارون کنیم ،تک تک تابع ها وارون و جای آنها عوض می شود.

$$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1} \quad , \quad (gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$$

*برای پیدا کردن مقدار تابع ، ابتدا مقدار x را در تابع داخلی قرار می دهیم.سپس حاصل را در تابع خارجی جایگزین می کنیم

(تمرین ۷ص۲۹)

اگر $f(x)=\frac{1}{8}x-3,g(x)=x^3$ مقادیر زیر را بدست آورید .

$1)(fog)^{-1}(5)=$

☑حل:

ابتدا وارون دو تابع را می یابیم.

$$f(x)=\frac{1}{8}x-3\rightarrow y=\frac{1}{8}x-3\rightarrow y+3=\frac{1}{8}x$$

$$\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y} x=8y+24\xrightarrow{x\leftrightarrow y}$$

$$y=8x+24\rightarrow \underline{f^{-1}(x)=8x+24}$$

$$g(x)=x^3\rightarrow \underline{g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}}$$

حالا مقدار خواسته شده را می یابیم:

$$(fog)^{-1}(5)=(g^{-1}of^{-1})(5)=g^{-1}(f^{-1}(5))$$

$$\xrightarrow{f^{-1}(5)=8(5)+24=64}\sqrt[3]{64}=\boxed{4}$$

$2)(f^{-1}of^{-1})(6)=$

☑حل:

$$(f^{-1}of^{-1})(6)=f^{-1}(f^{-1}(5))$$

$$\xrightarrow{f^{-1}(5)=8(5)+24=64}8(64)+24=\boxed{600}$$

$3)(g^{-1}of^{-1})(5)=$

محدود کردن دامنه یک تابع غیریک به یک وتبدیل آن به تابع یک به یک:

*اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست .اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد.

*توابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ در هر یک از بازه های $\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right),\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]$ یک به یک است.

(مثال ص ۲۷ و۲۸ تمرین ۴ ص ۲۹)

توابع زیر یک به یک نیستند .

الف)با محدود کردن دامنه آنها توابعی یک به یک بسازید

ب) ضابطه وارون آنها را به دست آورید.

ج)توابع را رسم کنید.

$1)f(x)=x^2$

☑حل:

الف) تابع $f(x)=x^2$ را به دو تابع با دامنه های زیر محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .

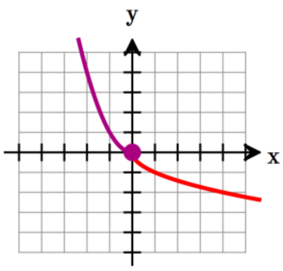
$$\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right),\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]\rightarrow[0,+\infty),(-\infty,0]$$

ب) ضابطه وارون تابع را در یکی از دامنه ها $(-\infty,0]$ به دست می آوریم

$$\xrightarrow{D_f=(-\infty,0]}\underbrace{f(x)=x^2}_{D_f=(-\infty,0]\,,\,R_f=[0,+\infty)}\rightarrow y=x^2\xrightarrow{x \text{ بر حسب } y}$$

$$x=\pm\sqrt{y}\xrightarrow{x\le 0}x=-\sqrt{y}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=-\sqrt{x}$$

$$\rightarrow \underbrace{f^{-1}(x)=-\sqrt{x}}_{D_{f^{-1}}=[0,+\infty),\,R_{f^{-1}}=(-\infty,0]}$$



۲) $h(x)=x^2-2x+2$

☑حل:

الف) تابع $h(x)=x^2-2x+2$ را به دو تابع با دامنه های زیر محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .

$$\left[\frac{-b}{2a},+\infty\right),\left(-\infty,\frac{-b}{2a}\right]\to\left[1,+\infty\right),\left(-\infty,1\right]$$

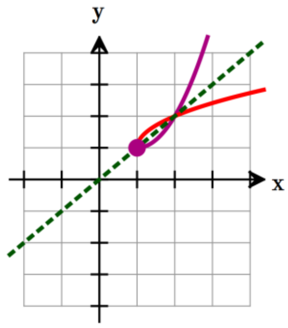
ب) ضابطه وارون تابع را در یکی از دامنه ها $[1,+\infty)$ به دست می آوریم:

$$\xrightarrow{D_h=(1,+\infty]}\underbrace{h(x)=(x-1)^2+1}_{D_h=(1,+\infty],\ R_h=[1,+\infty)}\to y=(x-1)^2+1$$

$$\xrightarrow{\text{بر حسب } x \quad y}(x-1)^2=y-1\to x-1=\pm\sqrt{y-1}$$

$$\xrightarrow{x\ge 1}x=\sqrt{y-1}+1\xrightarrow{x\leftrightarrow y}y=\sqrt{x-1}+1$$

$$\to\underbrace{\boxed{h^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1}}_{D_{h^{-1}}=[1,+\infty),\ R_{h^{-1}}=[1,+\infty)}$$



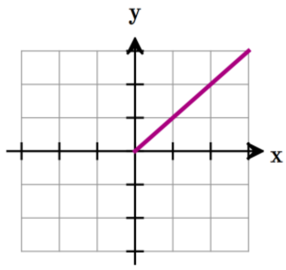
۳) $f(x)=|x|$

☑حل:

الف) تابع $f(x)=|x|$ را به دو تابع با دامنه های $[0,+\infty),(-\infty,0]$ محدود می کنیم وتابعی یک به یک می سازیم .

$$\xrightarrow{D_f=(0,+\infty]}\underbrace{f(x)=|x|}_{D_f=(0,+\infty],\ R_f=[0,+\infty)}\xrightarrow{x\ge 0}y=x$$

$$\to\underbrace{\boxed{f^{-1}(x)=x}}_{D_{f^{-1}}=(0,+\infty],\ R_{f^{-1}}=[0,+\infty)}$$



۴) $g(x)=-x^2$

۵) $h(x)=x^2+4x+3$

(تمرین ۵ ص ۲۹)

5 با محدود کردن دامنه ی تابع $f(x)=x^2-4x+5$ یک تابع یک به یک بدست آورید و دامنه و برد f و وارون آن را بدست آورید . و این دو تابع را رسم کنید.