



فصل ۱

آشنایه با منطق و استدلال ریاضی

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir



موضوع منطق علاوه بر فلسفه در ریاضیات و علوم مربوط به رایانه نیز کاربرد دارد.

گزاره: در منطق ریاضی به هر جمله خبری که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت بدهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

جمله‌های غیرخبری مانند «نام شما چیست؟» یا «لطفاً سکوت را رعایت کنید» و همچنین جمله‌های خبری که نتوانیم ارزش آن‌ها را تعیین کنیم، گزاره نیستند.

مثال ۱: کدام جمله یک گزاره است؟ ارزش هر گزاره را تعیین کنید.

الف) زودتر به خانه برگرد.

ب) بین دو عدد ۱ و ۲، فقط ۱۰ عدد گویا است.

پ) عدد $\sqrt{9}$ عددی گویا است.

ت) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

ث) معادله درجه دوم « $x^2 - 6x + 9 = 0$ » دارای دو ریشه حقیقی است.

ج) پدر علی پنج روز دیگر فوت می‌کند.

چ) آیا شما به مسافرت خواهید رفت؟

ح) میانگین و میانه انواعی از معیارهای مرکزی هستند.

پاسخ:

الف) جمله خبری نبوده و گزاره نیست.

ب) جمله خبری است ولی چون بین هر دو عدد، بیشمار عدد گویا وجود دارد پس گزاره نادرست است.

پ) جمله خبری است و چون عدد $\sqrt{9} = 3$ عددی گویا است، پس گزاره‌ای درست است.

ت) می‌دانیم که $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ، پس عبارت داده شده گزاره‌ای نادرست است.

ث) $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(9) = 0$

بنابراین معادله دارای یک ریشه مضاعف است. پس عبارت داده شده گزاره‌ای نادرست است.

- (ج) جمله خبری است ولی چون عمر انسان‌ها قابل پیش‌بینی نیست، پس نمی‌توان درستی یا نادرستی این جمله را تعیین کرد. بنابراین جمله داده شده یک گزاره نیست.
- (چ) جمله خبری نبوده و گزاره نیست.
- (ح) جمله خبری با ارزش درست است. پس گزاره‌ای درست است.

نمایش گزاره‌ها در منطق ریاضی

در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی p یا q یا r یا ... نمایش می‌دهیم. ضمناً از این به بعد، درستی یک گزاره را با نماد «د» و نادرستی آن را با نماد «ن» نشان می‌دهیم.

نقیض یک گزاره

نقیض (برعکس) گزاره p را با نماد $(\sim p)$ نمایش داده و آن را به صورت «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را نفی کنیم.

مثال ۲ نقیض هر گزاره را بیان کرده و سپس ارزش هر یک را مشخص کنید.

(الف) عدد ۲ اول است.

(ب) $5 + 6 \times 3 - 1 = 21$

(پ) $8 \times 3 - 4 > 7 \times 4 - 3$

(ت) ایران دارای ۱۰ استان است.

(ث) معیار پراکندگی که با میانه بیان می‌شود، دامنه میان چارکی نام دارد.

پاسخ

(الف) $p =$ عدد ۲ اول است: درست $\leftarrow (\sim p) =$ عدد ۲ اول نیست: نادرست

(ب) $p = (5 + 6 \times 3 - 1 = 21)$: نادرست $\leftarrow (\sim p) = (5 + 6 \times 3 - 1 \neq 21)$: درست

(پ) $p = (8 \times 3 - 4 > 7 \times 4 - 3)$: نادرست $\leftarrow (\sim p) = (8 \times 3 - 4 < 7 \times 4 - 3)$: درست

(ت) $p =$ ایران دارای ۱۰ استان است: نادرست $\leftarrow (\sim p) =$ ایران دارای ۱۰ استان نیست: درست

(ث) $p =$ معیار پراکندگی که با میانه بیان می‌شود، دامنه میان چارکی نام دارد: درست

$(\sim p) =$ معیار پراکندگی که با میانه بیان می‌شود، دامنه میان چارکی نام ندارد: نادرست

تست نقیض گزاره « a منفی است»، برابر کدام گزینه است؟

- (۱) a مثبت است. (۲) a منفی نیست. (۳) گزینه‌های ۱ و ۲ صحیح هستند. (۴) هیچ‌کدام

پاسخ گزینه ۲

a مثبت یا صفر است $\rightarrow a =$ منفی نیست $\rightarrow (\sim p) = a$ منفی است $\rightarrow p =$

بنابراین گزینه «۱» چون صفر بودن a را لحاظ نمی‌کند نادرست است.

تست نقیض گزاره «قد علی از محمد بزرگ‌تر است»، برابر کدام گزینه است؟

(۱) قد علی از محمد بزرگ‌تر نیست. (۲) قد علی از محمد کوچک‌تر است.

(۳) علی و محمد هم‌قد هستند. (۴) هر سه مورد

پاسخ گزینه ۱

قد علی از محمد بزرگ‌تر است $\rightarrow p =$

قد علی از محمد کوچک‌تر است یا علی هم‌قد محمد است \rightarrow قد علی از محمد بزرگ‌تر نیست $\rightarrow (\sim p) =$

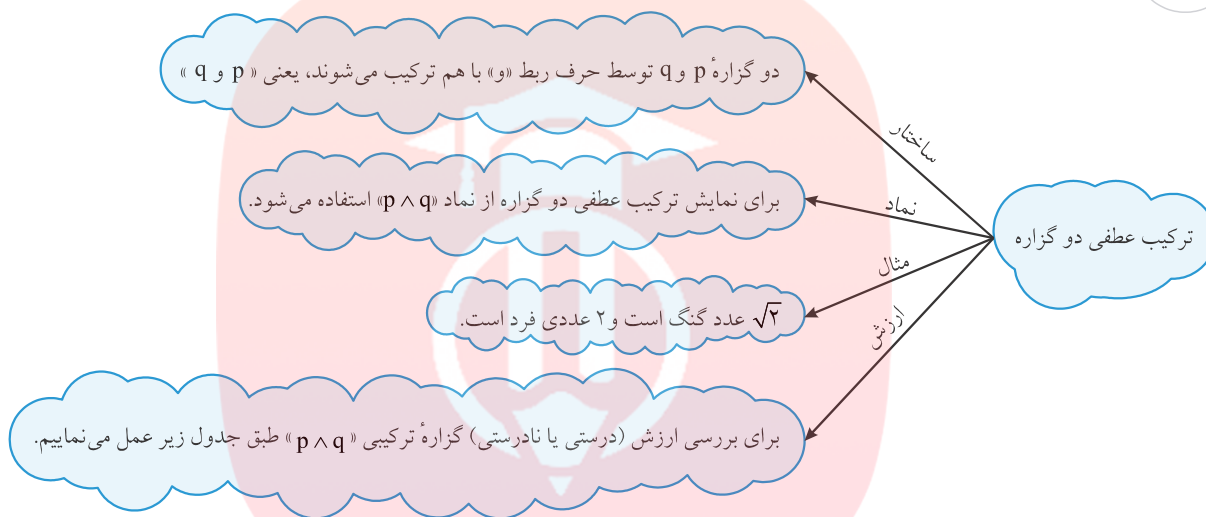
بنابراین گزینه‌های «۲» و «۳» کامل نبوده و صحیح نیستند.

ترکیب گزاره‌ها

گاهی اوقات گزاره‌ای که بیان می‌کنیم، ترکیبی از دو یا چند گزاره است که به این نوع از گزاره‌ها، گزاره‌های ترکیبی گفته می‌شود. مثلاً جمله « 2 عدد اول است و 2 عدد زوج است» از ترکیب دو گزاره « 2 عدد اول است» و « 2 عدد زوج است» توسط حرف ربط «و» ساخته شده است. در این جا تنها به بررسی ترکیب گزاره‌ها توسط 4 رابط «و»، «یا»، «شرطی» و «دو شرطی» می‌پردازیم.

توجه هر گزاره مرکب که از ترکیب دو یا بیش تراز دو گزاره ساده تولید می‌شود خودش یک گزاره است که باید بتوانیم ارزش آن را تعیین کنیم.

بررسی انواع ترکیب گزاره‌ها



| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | ن |

« $p \wedge q$ » تنها زمانی درست است که هم p و هم q درست باشند (در بقیه موارد حتی در صورت وجود یک گزاره نادرست، گزاره « $p \wedge q$ » نادرست خواهد بود)

مثال ۲ اگر p گزاره‌ای است q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

الف) $(p \wedge q) \wedge r$ ب) $((\sim p) \wedge q) \wedge r$ پ) $(p \wedge (\sim q)) \wedge r$

پاسخ

می‌دانیم که:

دلخواه: r q : $\sim q \rightarrow q$ n : $p \rightarrow (\sim p)$

الف) $n = \text{دلخواه} \wedge n = (n) \wedge \text{دلخواه} = (d \wedge n) \wedge r = (p \wedge q) \wedge r$

ب) $n = \text{دلخواه} \wedge n = (n) \wedge \text{دلخواه} = (n \wedge n) \wedge r = ((\sim p) \wedge q) \wedge r$

پ) $؟ = \text{دلخواه} \wedge (d) = \text{دلخواه} \wedge (d \wedge d) = (p \wedge (\sim p)) \wedge r$

جواب این قسمت بستگی به درستی یا نادرستی گزاره دلخواه r دارد، چون اگر r درست باشد حاصل «درست» خواهد بود و اگر r نادرست باشد حاصل «نادرست» خواهد بود.

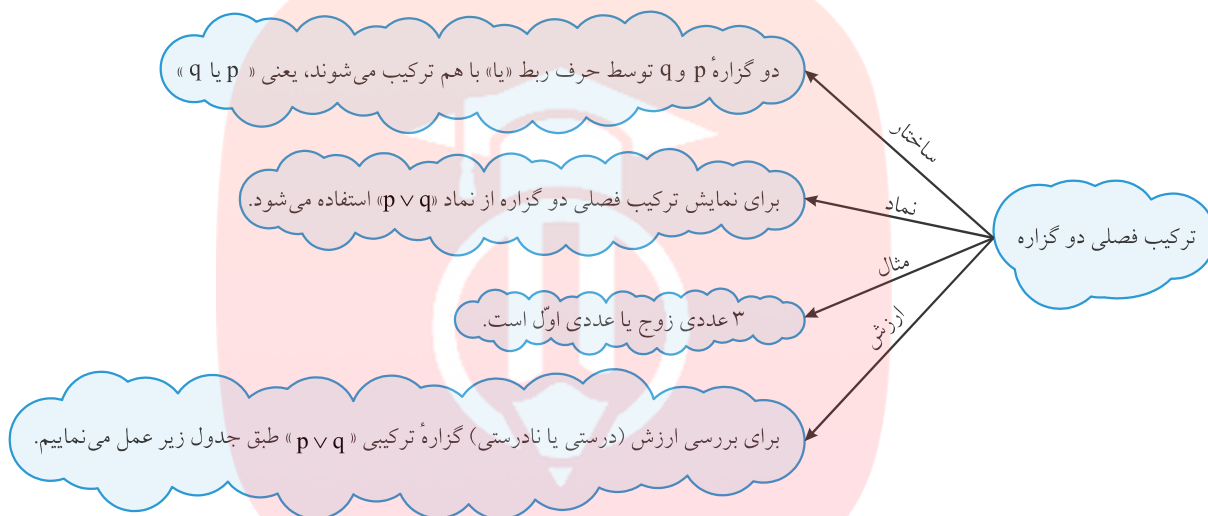
تست اگر گزاره ترکیبی «آبان ۳۰ روز دارد و» نادرست باشد، کدام عبارت در جای خالی نمی‌تواند قرار بگیرد؟

(۱) عددی اول است. (۲) $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

(۳) $\sqrt{36}$ عددی گویا است. (۴) $7 > 8$

پاسخ گزینه ۳

گزاره «آبان ۳۰ روز دارد» درست است، پس زمانی ترکیب عطفی دو گزاره نادرست خواهد بود که گزاره دوم نادرست باشد. در میان گزینه‌ها تنها گزینه «۳» درست است (گویا $\sqrt{36} = 6 = 6$) و نمی‌تواند در جای خالی قرار بگیرد.



| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|------------|
| د | د | د |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | ن |

« $p \vee q$ » تنها زمانی نادرست است که هم p و هم q نادرست باشند (در بقیه موارد حتی در صورت وجود یک گزاره درست، گزاره « $p \vee q$ » درست خواهد بود).

تست اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست خواهد بود؟

(الف) $((\sim q) \vee p) \vee (\sim p)$ (ب) $(p \vee r) \wedge (\sim q)$ (پ) $(\sim q) \wedge r \vee p$ (۴) هیچ کدام

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱

پاسخ گزینه ۳

می‌دانیم که: دلخواه: r $\sim q \rightarrow \sim q$ $\sim p \rightarrow \sim p$

(الف) $((\sim q) \vee p) \vee (\sim p) = (د \vee د) \vee (ن) = (د) \vee (ن) = د$

(ب) $(p \vee r) \wedge (\sim q) = (د \vee دلخواه) \wedge (د) = (د) \wedge (د) = د$

(پ) $((\sim q) \wedge r) \vee p = (د \wedge دلخواه) \vee د = د$ (وابسته به r بوده و معلوم نیست)

توجه شود که در گزاره « $p \vee q$ » وقتی یکی از گزاره‌ها درست باشد، درستی یا نادرستی گزاره دیگر مهم نیست و حاصل گزاره ترکیبی « $p \vee q$ » درست خواهد بود.

هرگاه بخواهیم از گزاره p گزاره q را نتیجه بگیریم از نماد « \Rightarrow » استفاده کرده و می‌نویسیم « $p \Rightarrow q$ » و آن را به یکی از سه صورت زیر می‌خوانیم:
 ۱- اگر p آن‌گاه q
 ۲- p نتیجه می‌دهد q را
 ۳- q از p نتیجه می‌شود
 در گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ »، p را مقدم و q را تالی می‌نامیم.
 برای بررسی ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره شرطی « $p \Rightarrow q$ » طبق جدول زیر عمل می‌نماییم.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | د |
| ن | ن | د |

« $p \Rightarrow q$ » تنها زمانی نادرست است که مقدم یعنی p درست بوده ولی تالی یعنی q نادرست باشد. به عبارت دیگر نتیجه‌ای نادرست از یک گزاره درست، دارای ارزش نادرست است. در بقیه موارد ارزش « $p \Rightarrow q$ » درست است.

اگر مقدم گزاره شرطی یعنی p، نادرست باشد همواره « $p \Rightarrow q$ » دارای ارزش درست بوده و به درستی یا نادرستی q بستگی ندارد. در این حالت گوییم که گزاره شرطی به انتفای مقدم دارای ارزش درست است.

مثال ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر ۵ زوج است آن‌گاه $\sqrt{3}$ عددی گویا است.

ب) اگر شهریور ۳۱ روز دارد آن‌گاه یک هفته، شش روز دارد.

پ) اگر $1 = 4 \times 1 - 3 \times (\sqrt{2})^2$ است آن‌گاه $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)$ است.

پاسخ
الف)

$$\left. \begin{array}{l} \text{ن: } p = 5 \text{ زوج است} \\ \text{ن: } q = \sqrt{3} \text{ عددی گویا است} \end{array} \right\} \rightarrow p \Rightarrow q = \text{ن} \Rightarrow \text{د} = \text{د}$$

ب)

$$\left. \begin{array}{l} \text{د: } p = 31 \text{ شهریور روز دارد} \\ \text{ن: } q = \text{یک هفته شش روز دارد} \end{array} \right\} \rightarrow p \Rightarrow q = \text{د} \Rightarrow \text{ن} = \text{ن}$$

پ)

$$\left. \begin{array}{l} \text{ن: } p = \{(\sqrt{2})^2 \times 3 - 4 \times 1 = 1\} \\ \text{ن: } q = \{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 - ab + b^2)\} \end{array} \right\} \rightarrow p \Rightarrow q = \text{ن} \Rightarrow \text{د} = \text{د}$$

تست اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر دارای ارزش درست هستند؟

الف) $(p \Rightarrow q) \wedge r$ (۴) ب) $((\sim q) \wedge p) \vee r$ (۲) پ) $((\sim p) \Rightarrow q) \vee ((\sim p) \Rightarrow r)$ (۲) ت) $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim(q \Rightarrow r)$ (۴)

پاسخ گزینه ۲

می‌دانیم که:

ن: $p \Rightarrow (\sim p)$

د: $(\sim q) \Rightarrow \text{ن}$

دلخواه: r

- (الف) $n = \text{دلخواه} \wedge (n) \wedge \text{دلخواه} = (n) \wedge r = (p \Rightarrow q) \wedge r$
- (ب) $d = d \Rightarrow (d) \Rightarrow d = (d \vee \text{دلخواه}) \Rightarrow d = ((d \wedge d) \vee \text{دلخواه}) \Rightarrow p = ((\sim q) \wedge p) \vee r$
- (پ) $d = (d) \vee (d) = (\text{دلخواه} \Rightarrow n) \vee (n \Rightarrow n) = (\sim p) \Rightarrow q \vee ((\sim p) \Rightarrow r)$
- (ت) $n = n \Rightarrow (d) = \sim (d) \Rightarrow \sim (n) = \sim (d \vee n) \Rightarrow \sim (d \vee q) \Rightarrow \sim (p \vee q)$

ترکیب دوشروطی

هرگاه بخواهیم از گزاره p ، گزاره q را نتیجه بگیریم و نیز از گزاره q ، گزاره p را نتیجه بگیریم از نماد « \Leftrightarrow » استفاده کرده و می‌نویسیم « $p \Leftrightarrow q$ » و آن را به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانیم:

- p نتیجه می‌دهد q را و q نتیجه می‌دهد p را

- اگر p آن‌گاه q و اگر q آن‌گاه p

- اگر p آن‌گاه q و برعکس

- p شرط لازم و کافی است برای q

- p اگر و تنها اگر q

درواقع گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » همان گزاره « $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ » است.

هم‌ارزش بودن دو گزاره p و q را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

برای بررسی ارزش (درستی یا نادرستی) گزاره دوشروطی « $p \Leftrightarrow q$ » با توجه به ارزش گزاره‌های شرطی و عطفی، طبق جدول زیر عمل می‌نماییم:

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ |
|---|---|-------------------|-------------------|---|
| د | د | د | د | د |
| د | ن | ن | د | ن |
| ن | د | د | ن | ن |
| ن | ن | د | د | د |

($p \Leftrightarrow q$) زمانی درست است که هر دو گزاره p و q همزمان درست یا نادرست باشند. به عبارت دیگر ($p \Leftrightarrow q$) زمانی درست است که

دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند یعنی: $p \equiv q$.

مثال ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

(الف) اگر معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ دارای دو ریشه است آن‌گاه $3 \times 8 - 1 < 8 \times 3 - 1$ است و برعکس

(ب) واریانس داده‌ها برابر صفر است اگر و تنها اگر داده‌ها با یکدیگر برابر باشند.

پاسخ

(الف) در جمله داده شده عبارت «برعکس» وجود دارد پس یک گزاره دو شرطی داریم.

$$\left. \begin{array}{l} p = \text{معادله } x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ دارای دو ریشه است} \\ x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(1) > 0 \end{array} \right\} \rightarrow p: \text{د}$$

$$\left. \begin{array}{l} n: n \Leftrightarrow d \rightarrow \\ \left\{ \frac{3 \times 8 - 1 < 8 \times 3 - 1}{24} \right\} = q: \text{ن} \end{array} \right\}$$

ب) در جمله داده شده عبارت «اگر و تنها اگر» وجود دارد پس یک گزاره دو شرطی داریم:

$$\left. \begin{aligned} &= \text{واریانس داده‌ها برابر صفر است} \\ &= \text{داده‌ها با یکدیگر برابرند} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &: d \rightarrow p \Leftrightarrow q : d \\ &: d \rightarrow p : d, q \Rightarrow p : d \end{aligned}$$

توجه

درست = True $\rightarrow d = T$

نادرست = False $\rightarrow n = F$

تست اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر دارای ارزش درست هستند؟

الف) $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r$ ب) $(\sim q \wedge p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$

پ) $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ ت) $(\sim q \Rightarrow p) \vee \sim (p \wedge q)$

۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

پاسخ گزینه ۱

الف) $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee r = (n \Leftrightarrow n) \vee \text{دلخواه} = (d) \vee \text{دلخواه} = d$

ب) $(\sim q \wedge p) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p) = (d \wedge d) \Leftrightarrow (d \Rightarrow d) = (d) \Leftrightarrow (d) = d$

پ) $(\sim p \wedge \sim r) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) = (n \wedge \text{دلخواه}) \Rightarrow (n \Leftrightarrow \text{دلخواه}) = (n) \Rightarrow (\text{نامعلوم}) = d$

ت) $(\sim q \Rightarrow p) \vee \sim (p \wedge q) = (d \Rightarrow d) \vee \sim (d \wedge n) = (d) \vee \sim (n) = (d) \vee (d) = d$

۱) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ (گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می‌نامیم)

۲) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ و $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$ (قوانین دهرگان)

۳) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

۴) $(p \vee \sim p) \equiv T$ و $(p \wedge \sim p) \equiv F$ (همواره ارزش نادرست دارد) و $p \wedge \sim p$ همواره ارزش درست و $p \vee \sim p$ همواره ارزش نادرست دارد)

مثال با استفاد از جدول ارزش‌ها موارد (۳) و (۴) در نکته اخیر را ثابت کنید.

پاسخ

مورد (۳):

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee (p \wedge q)$ |
|---|---|--------------|-----------------------|
| د | د | د | د |
| د | ن | ن | د |
| ن | د | ن | ن |
| ن | ن | ن | ن |

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

مشاهده می‌شود که هر دو ستون یکسان هستند.

مورد (۴):

$(p \vee \sim p) \equiv T, (p \wedge \sim p) \equiv F$

| p | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ | $p \wedge \sim p$ |
|---|----------|-----------------|-------------------|
| د | ن | د | ن |
| ن | د | د | ن |

همواره: $(p \vee \sim p) \equiv T = d$ همواره: $(p \wedge \sim p) \equiv F$

درس دوم

استدلال ریاضی

منظور از استدلال ریاضی استفاده از ریاضی و نیز قواعد منطق گزاره‌ها در حل مسائل و همچنین اثبات یارد یک گزاره به کمک ریاضی است. اولین گام برای استدلال ریاضی این است که یک عبارت توصیفی را به زبان ریاضی بازنویسی کنیم.

مثال عبارات زیر را به صورت نماد ریاضی بازنویسی کنید.

(الف) حاصل جمع دو عدد حقیقی، پنج واحد از حاصل ضرب آن‌ها بیش تر است.

(ب) عددی را در ثلث خودش ضرب کرده و سپس بر حاصل ضرب ۱۰ واحد افزودیم. حاصل از ۴ برابر عدد بزرگ‌تر شده است.

(پ) بیست درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است. (مشابه کتاب درسی)

(ت) مجموع معکوس دو عدد از مجموع مربعات آن‌ها بزرگ‌تر است.

پاسخ

(الف) دو عدد حقیقی را x و y فرض می‌کنیم. بنابراین:

$$x + y - xy = 5$$

$$x \times \left(\frac{1}{3}x\right) + 10 > 4x \rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 4x + 10 > 0$$

$$\frac{20}{100}x = x - y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > x^2 + y^2$$

(ب) عدد مورد نظر را x فرض می‌کنیم. بنابراین:

(پ) قیمت فروش کالا را x و قیمت خرید آن را y فرض می‌کنیم. بنابراین:

(ت) دو عدد را x و y فرض می‌کنیم. بنابراین:

قیاس استثنایی

یکی از انواع قیاس بوده که در استدلال‌های ریاضی کاربرد فراوانی دارد. روش نمایش این نوع قیاس به صورت زیر است:

$$\begin{array}{ccc} p \rightarrow q & \text{با استفاده از نمادهای درس ۱} & \text{اگر الف آنگاه ب} \\ \frac{p}{\therefore q} & \leftarrow & \frac{\text{الف}}{\therefore \text{ب}} \end{array}$$

جهت آشنایی با این نوع قیاس به مثال‌های زیر توجه فرمایید:

توجه سه نقطه (∴) نماد نتیجه است.

مثال ۱

مقدمه ۱: اگر هوا ابری باشد، آنگاه باران می‌بارد. $\frac{p}{q}$

مقدمه ۲: هوا ابری است. $\frac{p}{p}$

نتیجه: باران می‌بارد. $\frac{q}{q}$

مثال ۲

مقدمه ۱: اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $\Delta = b^2 - 4ac$ بزرگ‌تر از صفر باشد، معادله دو ریشه متمایز دارد. $\frac{p}{q}$

مقدمه ۲: در معادله درجه دوم $x^2 + 5x - 1 = 0$ بزرگ‌تر از صفر است. $\frac{p}{p}$

نتیجه: معادله $x^2 + 5x - 1 = 0$ دو ریشه متمایز دارد.

مثال جاهای خالی را پر کنید.

دو خط هیچ گاه موازی و منطبق نیستند: $q \Rightarrow$ دو خط در یک نقطه متقاطع باشند: p (الف)

p :
 دو خط L_1 و L_2 هیچ گاه موازی و منطبق نیستند. \therefore

(ب) $q \Rightarrow$ عدد زوج باشد: p

عدد زوج است: p

\therefore عدد زوج است.

(الف) دو خط L_1 و L_2 در یک نقطه متقاطع هستند: p

(ب) عدد a^2 زوج است: q

$p \rightarrow q$

q

$\therefore p$

اگر در «قیاس استثنایی» در مقدمه دوم به جای p از q استفاده شود و نتیجه به دست آمده p باشد، این نتیجه نادرست بوده و این نوع استدلال را مغالطه می‌نامند. در واقع استدلال مغالطه به صورت مقابل است:

تست در کدام گزینه مغالطه رخ داده است؟

(۱) اگر تعداد کارخانه‌ها افزایش یابد، آن گاه آلودگی هوا افزایش می‌یابد.

تعداد کارخانه‌ها در تهران افزایش یافته است.
 \therefore آلودگی هوای تهران بیش تر شده است.

(۲) اگر در شهری بیماری وبا شیوع یابد، آن گاه ۱۰ درصد مردم فوت می‌کنند.

در تهران بیماری وبا شایع شده است.

\therefore در تهران ۱۰ درصد مردم فوت کرده اند.

(۳) اگر ستاره در کنکور سراسری رتبه خوبی بیاورد، آن گاه در رشته داروسازی قبول می‌شود.

ستاره در رشته داروسازی قبول شده است.

\therefore ستاره در کنکور سراسری رتبه خوبی آورده است.

(۴) اگر دو خط موازی باشند، هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

دو خط L_1 و L_2 با هم موازیند.

\therefore دو خط L_1 و L_2 هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

پاسخ گزینه ۳

در گزینه ۳ داریم:

اگر ستاره در کنکور سراسری رتبه خوبی بیاورد، آن گاه در رشته داروسازی قبول می‌شود.

q

p

ستاره در رشته داروسازی قبول شده است.

q

\therefore ستاره در کنکور سراسری رتبه خوبی آورده است.

p

مثال سه لیوان همانند شکل زیر داریم که یکی از آنها وارونه است. می‌خواهیم همه آنها در حالت درست

(رو به بالا) قرار گیرند. ولی مجاز هستیم هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است آن

را درست کنیم و برعکس) سؤال این است که آیا این کار امکان پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟

(کتاب درسی)

پاسخ

به کمک یک استدلال ریاضی نشان می‌دهیم که این کار امکان پذیر نیست.



$S =$ تعداد لیوان‌های وارونه

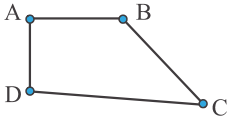
وضعیت فعلی (یک لیوان وارونه است): $S=1$

وضعیت مطلوب (هیچ لیوانی وارونه نباشد): $S=0$

حرکت مجاز: در هر بار دقیقاً دو لیوان تغییر وضعیت دهد.

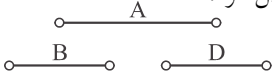
- $S-2 \rightarrow$ تعداد لیوان‌های وارونه دو تا کم می‌شود \rightarrow دو لیوان درست می‌شود
 - $S+2 \rightarrow$ تعداد لیوان‌های وارونه دو تا اضافه می‌شود \rightarrow دو لیوان وارونه می‌شود
 - $S+0 \rightarrow$ یک لیوان درست و یک لیوان وارونه می‌شود.
- حالات ممکن در هر حرکت مجاز در حالت کلی

بنابراین S همیشه به اندازه عددی زوج (یا -2 یا $+2$ یا 0) تغییر می‌یابد و هرگز از 1 به 0 کاهش نمی‌یابد.

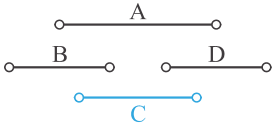


مثال بازه (a,b) نماینده نقطه A و بازه (c,d) نماینده نقطه B است. اگر دو بازه (a,b) و (c,d) اشتراک داشته باشند نقاط A و B با یک خط به هم وصل می‌شوند و در غیر این صورت هیچ‌گاه به هم متصل نمی‌شوند (منظور از بازه (a,b) تمام اعداد حقیقی بین a و b است). اثبات کنید که در شکل مقابل برای نقاط D, C, B, A هیچ بازه‌ای را نمی‌توان اختصاص داد.

پاسخ نقطه A به نقاط B و D متصل است پس بازه مربوط به نقطه A با بازه‌های مربوط به B و D اشتراک دارد ولی چون نقاط D و B اشتراک ندارند پس بازه‌های آن‌ها هیچ اشتراکی ندارند. بنابراین می‌توان بازه‌های نقاط D, B, A را به صورت مقابل فرض کرد.



حال بازه مربوط به نقطه C را باید طوری انتخاب کرد که بازه‌های نقاط D و B اشتراک داشته ولی با بازه نقطه A اشتراک نداشته باشد (C به B و D متصل است ولی به A متصل نیست). طبق شکل بالا هیچ‌گاه نمی‌توان بازه‌ای با خصوصیات ذکر شده برای C انتخاب کرد، چون اگر این بازه با بازه‌های نقاط B و D اشتراک داشته باشد، با بازه نقطه A هم اشتراک خواهد داشت (مثل شکل مقابل).



در درس ۱ مشاهده کردیم که دو گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ و $p \Rightarrow \sim q$ هم‌ارزند. در مسائل اگر اثبات درستی گزاره $p \Rightarrow q$ دشوار باشد، می‌توان به جای آن درستی گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ را اثبات کرد.

مثال ثابت کنید «اگر n^2 فرد باشد، آن‌گاه n فرد است» ($n \in \mathbb{Z}$). (مشابه کتاب درسی)

پاسخ گزاره شرطی داده شده به صورت زیر است:

n فرد است: $n^2 \Rightarrow q$

درستی این گزاره شرطی کار دشواری است. پس به جای آن، گزاره زیر را که هم‌ارز آن است اثبات می‌کنیم:

n^2 فرد نیست (زوج است): $\sim p \Rightarrow \sim q$ (زوج است)

پس باید اثبات کنیم که اگر n زوج باشد، آن‌گاه n^2 نیز زوج است.

$$n = 2k \text{ (زوج)} \rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2m = \text{زوج}$$

تذکر گاهی در یک استدلال ریاضی ممکن است دچار خطا شویم. کشف محل خطا در یک استدلال غالباً کار دشواری بوده و نیاز به دقت و مهارت دارد.

مثال در هر استدلال مشخص کنید که چه اشتباهی رخ داده است.

$$\frac{1}{x-3} + \frac{4}{x+3} = \frac{6}{x^2-9} \rightarrow \frac{x+3+4(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{6}{x^2-9} \rightarrow \frac{5x-9}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9}$$

(الف)

$$\rightarrow 5x-9=6 \rightarrow x=3$$

(ب)

$$\frac{x-3}{4-x} < 1 \rightarrow \frac{x(4-x)}{4-x} < 4-x \rightarrow x-3 < 4-x \rightarrow 2x < 7 \rightarrow x < \frac{7}{2}$$

پ) اگر طول ضلع مربعی ۳ برابر شود، مساحت آن هم سه برابر می‌شود.
ت)

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{2} = 5$$

ث)

$$0 = 0 \rightarrow 0 \times 5 = 0 \times 6 \rightarrow \frac{0 \times 5}{0} = \frac{0 \times 6}{0} \rightarrow 5 = 6$$

پاسخ

الف) اشتباه در ساده کردن مخرج‌ها از دو طرف تساوی رخ داده است. ساده کردن مخرج‌ها زمانی مجاز است که مخرج‌ها مخالف صفر باشند.

$$\frac{5x-9}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9} \xrightarrow{\text{به شرط } x^2-9 \neq 0} \frac{5x-9}{x^2-9} = \frac{6}{x^2-9} \rightarrow 5x-9=6 \rightarrow x=3$$

حالت درست:

جواب به دست آمده قبول نیست، چون با ریشه مخرج برابر است.

ب) ضرب کردن نامعادله در یک عدد زمانی درست است که از علامت آن عدد آگاه باشیم، چون اگر عدد ضرب شده منفی باشد علامت نامعادله عوض می‌شود. یعنی:

$$\begin{array}{l} c > 0 \rightarrow ac < ab \\ a < b \\ c < 0 \rightarrow ac > ab \end{array}$$

حالت درست:

$$\frac{x-3}{4-x} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x-3-4+x}{4-x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-7}{4-x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-7}{4-x} < 0 \Rightarrow \frac{2x-7}{4-x} < 0$$

$$\rightarrow \text{جواب: } x < \frac{7}{2} \cup x > 4$$

پ) اگر ضلع مربع را a فرض کنیم، با سه برابر شدن ضلع مربع ($a \rightarrow 3a$) مساحت آن ۹ برابر می‌شود.
چون:

$$S = a \times a = a^2$$

$$S' = 3a \times 3a = 9a^2 = 9S$$

ت) ساده کردن رادیکال‌ها از صورت و مخرج کسر مجاز نیست.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$$

حالت درست:

ث) تقسیم بر صفر کردن (ساده کردن صفرها از طرفین تساوی) مجاز نیست.

$$0 = 0 \rightarrow 0 \times 5 = 0 \times 6 \rightarrow \frac{0 \times 5}{0} = \frac{0 \times 6}{0}$$

نادرست



فصل ۱

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

www.my-dars.ir

۱. منطق در لغت به چه معناست؟

- ۱) نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات.
- ۲) نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.
- ۳) تشخیص استدلال درست از نادرست.
- ۴) آنچه به گفته درآمده.

۲. چه تعداد از جملات زیر صحیح می‌باشند؟

- الف) عموماً منطق را به معنی نتیجه‌گیری نیز تعبیر می‌کنند.
 ب) کاربرد منطق در تشخیص استدلال درست از نادرست است.
 پ) منطق تنها در علوم فلسفه کاربرد دارد.
- | | | | |
|-------|-------|-------|----------------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) | ۴ (۴) هیچ کدام |
|-------|-------|-------|----------------|

۳. کدام یک از جملات زیر صحیح می‌باشند؟

- الف) منطق روش درست فکر کردن است.
 ب) منطق دانان در بررسی استدلال‌ها هیچ اشتباهی نمی‌کنند.
 ت) منطق به معنی بررسی استدلال‌هاست.
 ۱) «الف» و «ب» و «ت»
 ۲) «ب» و «پ» و «ت»
 ۳) «الف» و «ت»
 ۴) «پ» و «ت»

۴. در منطق ریاضی به هر جمله که بتوانیم دقیقاً یکی از دو ارزش درست یا نادرست را به آن نسبت دهیم، یک گزاره گفته می‌شود.

- ۱) خبری
 ۲) پرسشی
 ۳) امری
 ۴) هر سه مورد

۵. کدام عبارت نادرست است؟

- ۱) در منطق ریاضی به هر جمله خبری یک گزاره گفته می‌شود.
- ۲) جملات غیر خبری گزاره محسوب نمی‌شوند.
- ۳) هر گزاره دارای یکی از دو ارزش درست یا نادرست است.
- ۴) کاربرد منطق در تشخیص استدلال درست از نادرست است.

۶. کدام گزینه در مورد عبارت «فاطمه سه روز دیگر مریض خواهد شد» درست است؟

- ۱) یک جمله خبری است.
 ۲) یک گزاره با ارزش درست است.
 ۳) یک گزاره نیست.
 ۴) گزینه‌های «۱» و «۳»

۷. کدام یک از موارد زیر یک گزاره هستند؟

- الف) شما اهل کجایی؟
 ب) علی سال آینده فوت می‌کند.
 پ) عدد $\sqrt{36}$ عددی گنگ است.
 ت) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس صفر است.
- | | | | |
|---------------|-------------|-------------|-------------|
| ۱ (الف) و «ب» | ۲ «ب» و «ت» | ۳ «پ» و «ت» | ۴ «ب» و «پ» |
|---------------|-------------|-------------|-------------|

۸. در میان عبارت‌های زیر چند گزاره با ارزش درست وجود دارد؟

- الف) کاربرد منطق در تشخیص استدلال درست از نادرست است.
 ب) بین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، فقط ۵ عدد گویا وجود دارد.
 پ) معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به شرط $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ، تنها دارای یک ریشه حقیقی است.
 ت) معدل کارنامه‌ی علی در سال آینده، بیست خواهد بود.

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| ۱ (۴) | ۲ (۳) | ۳ (۲) | ۴ (۱) |
|-------|-------|-------|-------|

۹. ارزش گزاره‌های «الف» تا «ت» به ترتیب از راست به چپ در کدام گزینه به درستی بیان شده است؟

(الف) معیار پراکندگی که با میانگین بیان می‌شود، انحراف معیار نام دارد.

(ب) ۷۵ درصد داده‌ها قبل از چارک اول قرار دارند.

(پ) رابطه $f = \{(2, x_1), (3, x_2), (2, x_3)\}$ همواره یک تابع است.

(ت) $8 \times 5 - 3 \times 1 > 9 \times 5 - 8 \times 1$

(۲) درست - نادرست - درست - نادرست

(۱) نادرست - نادرست - نادرست - نادرست

(۴) درست - نادرست - نادرست - نادرست

(۳) درست - درست - نادرست - نادرست

۱۰. در میان جملات زیر به ترتیب از راست به چپ چند عبارت گزاره نبوده و چند عبارت گزاره‌ای با ارزش نادرست است؟

(الف) میانگین و میانه انواعی از معیارهای پراکندگی هستند.

(ب) لطفاً تخته را پاک کن

(پ) $3 \times 4 - 5 \times (6 \times 2 + 1) > 6 \times 2 + 1 - 5 \times 4$

(ت) در کنکور سال آینده ستاره در رشته داروسازی قبول خواهد شد.

(۴) ۱-۲

(۳) ۲-۲

(۲) ۳-۱

(۱) ۲-۱

نقیض یک گزاره

۱۱. نقیض یک گزاره را با نماد نمایش داده و برای بیان نقیض یک گزاره کافی است فعل جمله را کنیم.

(۱) $(\sim p)$ - مثبت (۲) $(\sim p)$ - نفی (۳) $(\sim p)$ - مثبت (۴) $(\sim p)$ - نفی

۱۲. اگر گزاره $(\sim p)$ درست بوده و گزاره q نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره‌های p و $(\sim q)$ به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - نادرست (۳) درست - درست (۴) نادرست - درست

۱۳. نقیض چه تعداد از گزاره‌های زیر دارای ارزش نادرست است؟

(الف) عدد ۱۵ اول نیست. (ب) $5 - 6 \times (4 + 3 \times 1) < 6 - 5 \times (4 + 4)$

(پ) نمودار حبابی، یک نمودار چند متغیره است. (ت) مرسوم‌ترین روش گردآوری اطلاعات در علم آمار، پرسشنامه نیست.

(۴) ۱

(۳) ۲

(۲) ۳

(۱) ۴

۱۴. نقیض گزاره‌های « a مثبت است» و «قد زهرا از ستاره بزرگ‌تر است» به ترتیب از راست به چپ عبارتست از:

(۱) a منفی است - قد زهرا از ستاره کوچک‌تر است. (۲) a مثبت نیست. قد زهرا از ستاره کوچک‌تر است.

(۳) a منفی است - قد زهرا از ستاره بزرگ‌تر نیست. (۴) a مثبت نیست - قد زهرا از ستاره بزرگ‌تر نیست.

۱۵. اگر $(\sim p)$ نقیض گزاره p باشد، در چه تعداد از موارد زیر $(\sim p)$ به درستی بیان شده است؟

(الف) $a < 5 : (\sim p) \leftarrow a > 5 : p$

(ب) p : عدد ۲ زوج نیست $\leftarrow (\sim p)$: عدد ۲ زوج است.

(پ) p : وزن محمد از رضا سنگین‌تر است $\leftarrow (\sim p)$: وزن محمد از رضا سبک‌تر است.

(ت) p : پول آرمین از پول علی بیش‌تر است $\leftarrow (\sim p)$: پول آرمین از پول علی کم‌تر است یا پول آرمین برابر پول علی است.

(۴) ۳

(۳) ۴

(۲) ۱

(۱) ۲

ترکیب عطفی دو گزاره

۱۶. برای ترکیب عطفی دو گزاره p و q از حرف ربط «...» استفاده شده و آن را با نماد « $p \dots q$ » نمایش می‌دهند.

(۴) ۸ - یا

(۳) ۷ - و

(۲) ۸ - و

(۱) ۷ - و

۱۷. در کدام گزینه جدول ارزش‌ها به درستی بیان شده است؟

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| د | د | د |
| د | ن | د |
| ن | د | د |
| ن | ن | ن |

(۴)

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| د | د | د |
| ن | د | ن |
| د | ن | ن |
| ن | ن | ن |

(۳)

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| د | د | ن |
| ن | د | ن |
| د | ن | ن |
| ن | ن | د |

(۲)

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|--------------|
| د | د | د |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | د |

(۱)

۱۸. گزاره « $p \wedge q$ » زمانی درست است که ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب از راست به چپ و باشد.

(۱) درست - نادرست (۲) نادرست - درست (۳) درست - درست (۴) گزینه‌های «۲» و «۳»

۱۹. اگر گزاره‌ای با ارزش دلخواه باشد، جدول ارزش‌ها برای گزاره $(\sim q \wedge p) \wedge r$ در کدام گزینه به درستی بیان شده است؟

| p | q | $(\sim q \wedge p) \wedge r$ |
|---|---|------------------------------|
| د | د | وابسته به r |
| د | ن | د |
| ن | د | وابسته به r |
| ن | ن | د |

(۲)

| p | q | $(\sim q \wedge p) \wedge r$ |
|---|---|------------------------------|
| د | د | د |
| د | ن | وابسته به r |
| ن | د | د |
| ن | ن | وابسته به r |

(۱)

| p | q | $(\sim q \wedge p) \wedge r$ |
|---|---|------------------------------|
| د | د | ن |
| د | ن | وابسته به r |
| ن | د | ن |
| ن | ن | ن |

(۴)

| p | q | $(\sim q \wedge p) \wedge r$ |
|---|---|------------------------------|
| د | د | ن |
| د | ن | ن |
| ن | د | ن |
| ن | ن | وابسته به r |

(۳)

۲۰. اگر $(\sim p)$ و q گزاره‌های درست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، آنگاه ارزش گزاره $(\sim q \wedge p) \wedge r$ ، ... خواهد بود.

(۱) درست (۲) نادرست (۳) وابسته به r (۴) غیرقابل تعیین

۲۱. اگر $p, q, (\sim q)$ گزاره‌های نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های «الف» تا «ت» به ترتیب از راست به چپ در کدام

گزینه به درستی بیان شده است؟

الف) $(\sim(\sim p) \wedge r) \wedge (\sim(q \wedge \sim p) \wedge \sim r)$ (ب) $\sim r \wedge (\sim(p \wedge q) \wedge r)$
 پ) $((\sim q \wedge r) \wedge r) \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \wedge r)$ (ت) $((((\sim p \wedge q) \wedge \sim p) \wedge p) \wedge p) \wedge r$

(۱) نادرست - وابسته به r - نادرست (۲) نادرست - وابسته به r - نادرست
 (۳) نادرست - نادرست - درست (۴) درست - وابسته به r - نادرست

۲۲. اگر گزاره «۲ عدد اول است و» درست و گزاره «آبان ۳۰ روز دارد و» نادرست باشد، عبارت‌های مناسب برای جاهای

خالی به ترتیب از راست به چپ عبارتند از:

(۱) $3 - 3 \times 3 - 4 < 5 \times 4 - 57$ عدد اول است.

(۲) معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. میانگین از معیارهای مرکزی است.

(۳) سعید فردا مریض خواهد شد - ۵ عدد زوج است.

(۴) رابطه $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ تابع است - معیار پراکندگی که با میانه بیان می‌شود، انحراف معیار نام دارد.

۲۳. اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، چه تعداد از عبارت‌های زیر دارای ارزش درست خواهند بود؟

الف) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim r$ (ب) $\sim(\sim(\sim q) \wedge \sim r) \wedge p$
 پ) $\sim((\sim p \wedge r) \wedge \sim r) \wedge \sim q$ (ت) $\sim((q \wedge \sim r) \wedge \sim r) \wedge \sim r$

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر