

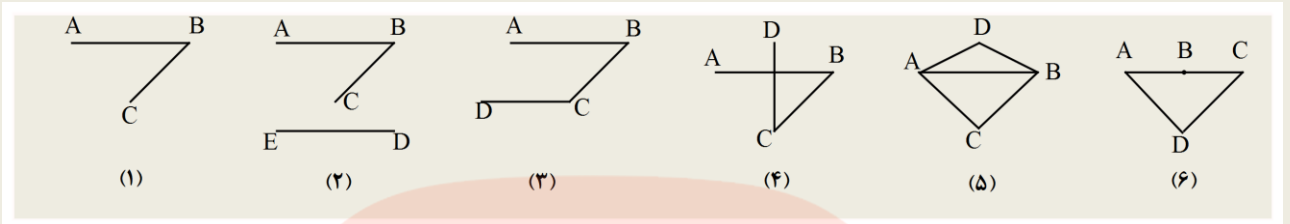
فصل سوم

چند ضلعی ها



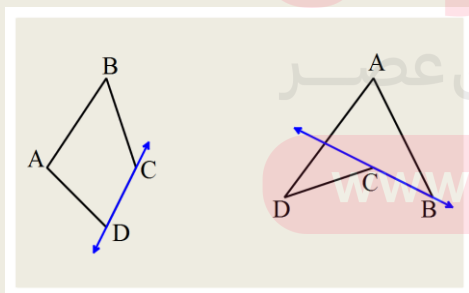
درس اول : چند ضلعی و ویژگی های آن

فعالیت : به شکل های زیر توجه کنید .



- (۱) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید حداقل ضلع داشته باشد .
- (۲) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید اضلاع باشند .
- (۳) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید اضلاع همدیگر را کند .
- (۴) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید اضلاع همدیگر را در نقاط قطع کنند .
- (۵) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید هر ضلع دقیقاً پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند .
- (۶) : چرا چند ضلعی نیست ؟ زیرا باید هیچ دو پاره خطی که انتهایی مشترک دارند روی نباشد .

تعریف چند ضلعی : شکلی شامل حداقل پاره خط که هر پاره خط پاره خط دیگر را در قطع کند و هیچ دو پاره خط با یک انتهایی مشترک ، روی نباشند .



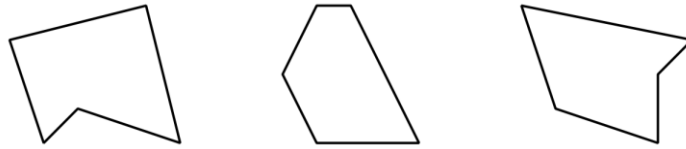
چند ضلعی محدب : چند ضلعی را محدب می گویند هرگاه وقتی

هر ضلع آن را روی خطی قرار دهیم بقیه نقاط شکل در یک طرف خط قرار بگیرند .

چند ضلعی مقعر : هر چند ضلعی که محدب نباشد را مقعر می نامند .

فعالیت : با دقت در اندازه زاویه های داخلی دو شکل محدب و مقعر ، تعریف جدیدی برای چند ضلعی محدب بنویسید .

تمرین : کدام یک از چند ضلعی های زیر محدب است ؟



قطر چند ضلعی محدب : هر پاره خطی که دو رأس غیر مجاور چند ضلعی را به هم وصل کند قطر چند ضلعی نامیده می شود .

فعالیت :

الف) از هر رأس یک n ضلعی محدب می توان $n-3$ قطر رسم کرد . چرا ؟

ب) آیا می توان گفت چون n رأس داریم و از هر رأس $n-3$ قطر رسم می شود پی تعداد تمام قطر ها $n(n-3)$ است ؟

ج) فرمول بدست آمده برای تعداد قطر در مرحله قبل را با تعداد قطر های ۴ و ۵ ضلعی محدب امتحان کنید . رابطه تعداد قطر های واقعی با تعداد قطر های حساب شده با این فرمول در چیست ؟

به نظر شما دلیل این تفاوت چیست ؟ فرمول درست را بدست آورید .

گروه آموزشی عصر

تمرین : در کدام n ضلعی محدب تعداد قطر ها و تعداد ضلع ها برابر است ؟

www.my-dars.ir

تمرین : تعداد قطر های رسم شده از یک رأس n ضلعی محدب برابر $2n-9$ است . تعداد قطر های این چند ضلعی چقدر است ؟

(راهنمایی : از هر رأس $n-3$ قطر رسم می شود)

تمرین : از به یک n ضلعی محدب یک راس بیافزاییم تعداد قطر هایش ۲۱ تا بیشتر می شود . مجموع زاویه های داخلی آن چقدر است (راهنمایی : با افزودن هر راس تعداد قطر ها $n-1$ تا بیشتر می شود)

تمرین : مجموع تعداد اضلاع و قطر های یک n ضلعی محدب برابر ۲۱ است . از هر راس آن چند پاره خط می گذرد ؟

تمرین : زاویه های داخلی یک n ضلعی منتظم ۱۵۰ درجه است . تعداد قطر های آن چقدر است ؟

چهار ضلعی های مهم و تعریف آنها :

متوازی الاضلاع : چهار ضلعی که هر دو ضلع مقابل آن موازی هستند .

مستطیل : چهار ضلعی که همه زاویه های آن قائمه هستند .

لوزی : چهار ضلعی که همه اضلاع آن با هم برابرند .

مربع : چهار ضلعی که همه اضلاع آن برابر و حداقل یک زاویه آن قائمه است .

فعالیت :

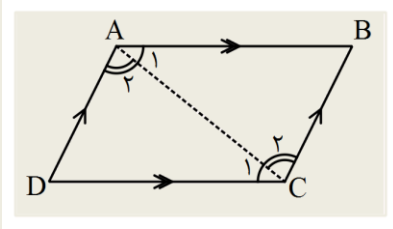
www.my-dars.ir

الف) مستطیل را به کمک متوازی الاضلاع تعریف کنید .

ب) مربع را به کمک مستطیل تعریف کنید .

ج) ثابت کنید لوزی یک متوازی الاضلاع است . (با رسم قطر ، همنهشتی و قضیه خطوط موازی)

ویژگی های متوازی الاضلاع :



قضیه ۱: در متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه هستند .

اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :

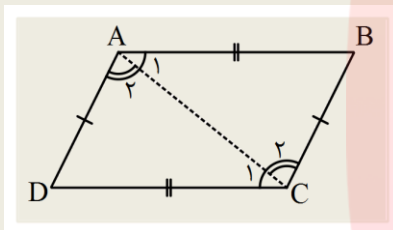
اگر AC را مورب دو خط موازی AB و DC در نظر بگیریم : $\angle 1 = \angle 2$

اگر AC را مورب دو خط موازی AD و BC در نظر بگیریم : $\angle 3 = \angle 4$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود بنا به حالت دو مثلث ایجاد شده هم نهشت هستند در نتیجه :

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهار ضلعی هر دو ضلع مقابل هم اندازه باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .

اثبات : قطر AC را رسم می کنیم :



بنا به حالت دو مثلث ایجاد شده هم نهشت هستند پس : $\angle 1 = \angle 2$ و $\angle 3 = \angle 4$

و طبق عکس قضیه خطوط موازی و

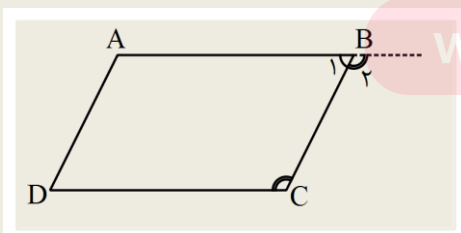
قضیه ۲: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل هستند .

اثبات : اگر BC مورب در نظر بگیریم داریم : $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

از طرفی در رأس B یک نیم صفحه داریم پس :

از دو رابطه قبل نتیجه می شود که :

عکس قضیه ۲: اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه مجاور مکمل باشند ، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است .



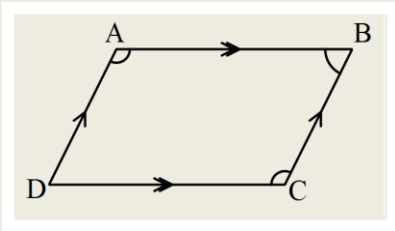
اثبات : از مکمل بودن زاویه های B و C نتیجه می شود :

از نیم صفحه راس B هم داریم :

از دو رابطه قبل نتیجه می شود :

پس $AB \parallel DC$ و به همین ترتیب از مکمل بودن زاویه های A و D نتیجه

می شود که $AD \parallel BC$.



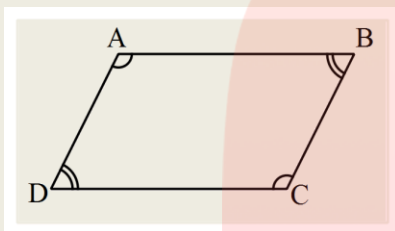
قضیه ۳: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مقابل هم اندازه هستند.

اثبات: زاویه های B و C مکمل هستند پس:

زاویه های A و B مکمل هستند پس:

از دو رابطه قبل نتیجه می شود:

عکس قضیه ۳: اگر در چهار ضلعی هر دو زاویه مقابل برابر باشند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.



اثبات: مجموع زاویه های هر چهار ضلعی درجه است.

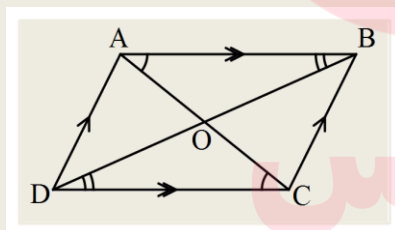
از طرفی $\hat{A} = \hat{C} = a$ و $\hat{B} = \hat{D} = b$ پس:

در نتیجه هر دو زاویه مجاور مکمل هستند و طبق عکس قضیه قبل

چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

قضیه ۴: در متوازی الاضلاع قطر ها متصف یکدیگر هستند.

اثبات:

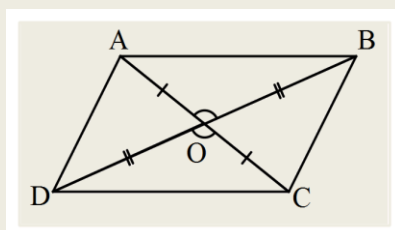


با توجه به موازی بودن AB و DC و مورب بودن قطر ها داریم:

و چون $AB=DC$ نیز است پس بنا به حالت دو مثلث و

همنهشت هستند و در نتیجه $AO=CO$ و $BO=DO$

عکس قضیه ۴: اگر در چهار ضلعی قطر ها همدیگر را نصف کنند، چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.



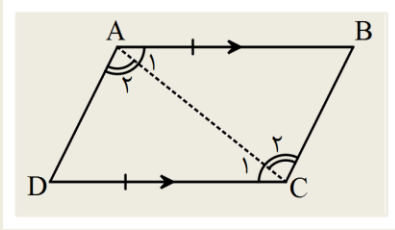
اثبات: از آنجایی که $AO=CO$ و $BO=DO$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ پس بنا به حالت

دو ضلع و زاویه بین دو مثلث ABO و DCO هم نهشت هستند و $AO=CO$

پس $AB \parallel DC$

به همین ترتیب ثابت می شود $AD \parallel BC$.

قضیه ۵: هر چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشد، متوازی الاضلاع است.



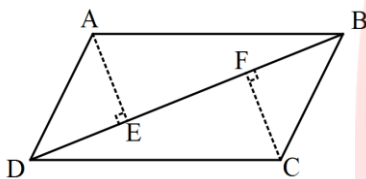
اثبات: قطر AC را رسم می کنیم:

با فرض AC به عنوان مورب داریم:

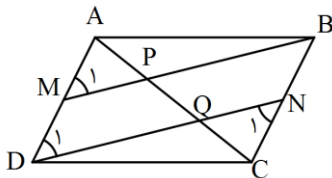
پس بنا به حالت دو مثلث همنهشت هستند و $\hat{A} = \dots$

و این یعنی $\dots \parallel \dots$

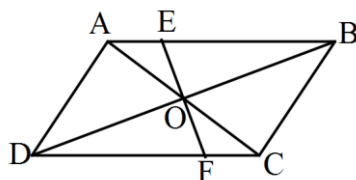
تمرین: ثابت کنید فاصله دو رأس مقابل از قطری که از دو رأس دیگر رسم شده است، برابر است.



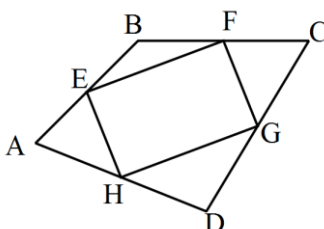
تمرین: در متوازی الاضلاع ABCD، N و M نقاط وسط اضلاع هستند. ثابت کنید $AP = PQ = QC$. (راهنمایی: از همنهشتی به برابری دو زاویه و توازی MB و DN برسید سپس از قضیه تالس استفاده کنید)



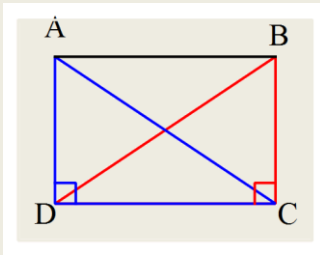
تمرین: ثابت کنید در متوازی الاضلاع محل برخورد قطر ها، نقطه وسط هر پاره خطی است که از این نقطه می گذرد و دو سر آن روی متوازی الاضلاع است. (راهنمایی: از تشابه دو مثلث AEO و FCO استفاده کنید)



تمرین: ثابت کنید اگر اوساط اضلاع یک چهار ضلعی دلخواه را به هم وصل کنیم شکل حاصل متوازی الاضلاع است.



ویژگی های خاص مستطیل :



قضیه ۱: در هر مستطیل قطر ها برابرند .

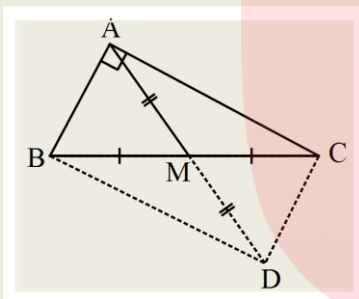
اثبات : دو مثلث ADC و BCD بنا به حالت همبخت هستند

پس :

سوال : آیا چهار ضلعی که قطر هایش برابر است الزاماً مستطیل است ؟ در صورت منفی بودن جواب ، مثال نقض بیاورید .

در مورد متوازی الاضلاعی که این خاصیت را داشته باشد چطور ؟

قضیه ۲: در مثلث قائم الزاویه ، اندازه میانه وارد بر وتر نصف اندازه وتر است .

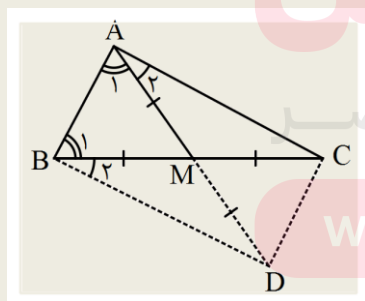


اثبات : میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم :

چهار ضلعی حاصل به دلیل متوازی الاضلاع است و

به دلیل مستطیل است . پس قطر ها برابرند و $AM = \frac{BC}{2}$

عکس قضیه ۲: اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع ، نصف اندازه آن ضلع باشد ، مثلث قائم الزاویه است .



اثبات : میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم :

چهار ضلعی حاصل متوازی الاضلاع است و زاویه های مجاور مکمل هستند

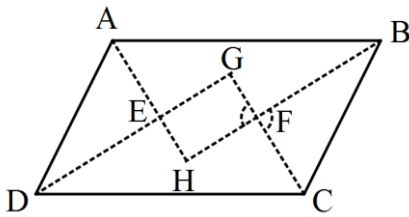
پس :

مثل های ایجاد شده همگی متساوی الساقین هستند و $\triangle AMC \cong \triangle BMD$

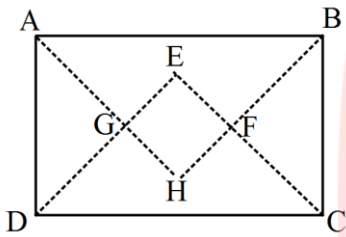
پس :

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : $\hat{A} + \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

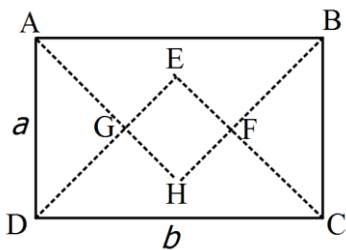
تمرین : ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمساز های داخلی یک متوازی الاضلاع مستطیل است . (راهنمایی : از مکمل بودن زاویه های مجاور B و C و مکمل بودن D و C قائمه بودن زاویه های شکل حاصل را مشخص کنید)



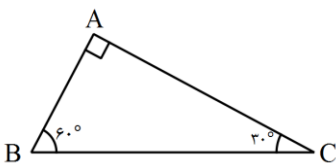
تمرین : ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمساز های داخلی یک مستطیل ، مربع است . (راهنمایی : از متساوی الساقین بودن DEC و همنهشتی AGD و BFC استفاده کنید)



تمرین : در تمرین قبل اگر طول و عرض مستطیل a و b باشد ، رابطه اندازه ضلع مربع با اندازه اضلاع مستطیل را بیابید .

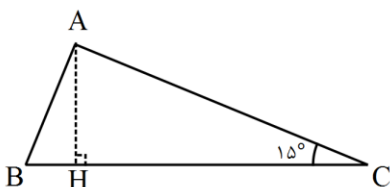


تمرین : در مثلث قائم الزاویه با زاویه 30° درجه ، اندازه ضلع مقابل به این زاویه نصف وتر است .(میانه وارد بر وتر را رسم کنید)



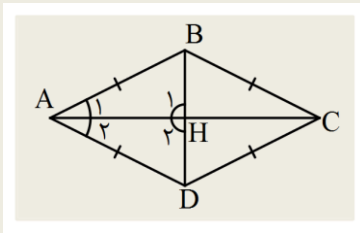
www.my-dars.ir

تمرین : در مثلث قائم الزاویه با زاویه 15° درجه ، اندازه ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است .(میانه وارد بر وتر را رسم کنید)



ویژگی های خاص لوزی :

قضیه ۱: در هر لوزی قطرهای نیمساز زاویه ها و عمود بر هم هستند .



اثبات : مثلث های ABC و ADC بنا به حالت همنهشت هستند پس :

..... و این یعنی AC نیمساز است و به همین ترتیب BD نیز نیمساز است.

در نتیجه مثلث های ABH و ADH بنا به حالت همنهشت هستند

$$\widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \text{ و}$$

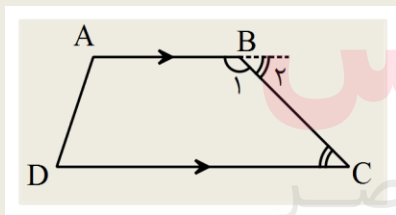
سوال : آیا چهار ضلعی که قطرهایش برهم عمودند یا نیمساز زاویه ها هستند الزاماً لوزی است ؟ در صورت منفی بودن جواب ، مثال نقض بیاورید .

در مورد متوازی الاضلاعی که این خاصیت را داشته باشد چطور ؟

دوزنقه و ویژگی های آن :

دوزنقه : چهار ضلعی که فقط دو ضلع آن موازی باشند .

قضیه ۱: در هر دوزنقه زاویه های مجاور به یک ساق مکمل هستند .

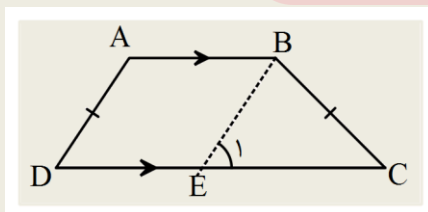


اثبات : با در نظر گرفتن مورب BC داریم :

و با توجه به نیم صفحه به راس B داریم :

در نتیجه :

قضیه ۲: در هر دوزنقه متساوی الساقین زاویه های مجاور به یک قاعده برابر هستند .



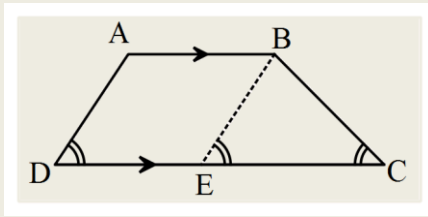
اثبات : پاره خط BE را موازی AD رسم می کنیم (یک ایده خوب) :

چهار ضلعی ABED است و BE=..... و $\widehat{D} = \dots$

BE=BC در نتیجه مثلث BCE متساوی الساقین است و $\widehat{E_1} = \dots$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : و به همین ترتیب ثابت می شود $\widehat{A} = \widehat{B}$

عکس قضیه ۲: اگر در یک دوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده برابر باشند، دوزنقه متساوی الساقین است.



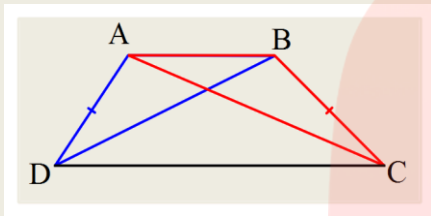
اثبات: پاره خط BE را موازی AD رسم می کنیم:

چهار ضلعی ABED است و $\widehat{D} = \dots$ و $AD = \dots$

و چون $\widehat{D} = \widehat{C}$ پس و مثلث BEC متساوی الساقین است

بنابر این $BE = BC$ و چون $AD = BE$ داریم: $AD = BC$

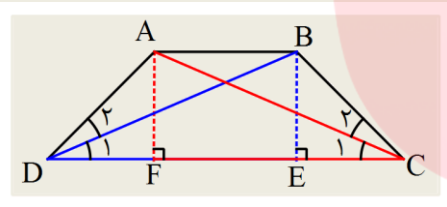
قضیه ۳: در دوزنقه متساوی الساقین اندازه قطر ها با هم برابر است.



اثبات: از آنجایی که $\widehat{A} = \widehat{B}$ دو مثلث ABC و ABD بنا به حالت

همنهشت هستند و $AC = BD$

عکس قضیه ۳: اگر در دوزنقه ای اندازه قطر ها برابر باشند، دوزنقه متساوی الساقین است.



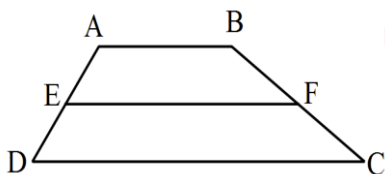
اثبات: ارتفاع های AF و BE را رسم می کنیم دو مثلث AFC و BED

بنا به حالت همنهشت هستند پس: $\widehat{D_1} = \dots$

از آنجا که $\widehat{D} = \widehat{C}$ پس $\widehat{D_1} = \dots$ در نتیجه مثلث های ABD و ABC

بنا به حالت همنهشت هستند و $AD = BC$.

تمرین: ثابت کنید در هر دوزنقه اندازه پاره خطی که وسط ساقها را به هم وصل می کند، نصف مجموع اندازه دو قاعده است.



www.my-dars.ir

درس دوم : مساحت و کاربرد آن

یاد آوری :

مساحت مستطیل : اگر طول و عرض آن a, b باشد : $S = ab$

مساحت مربع : اگر طول ضلع آن a باشد : $S = a^2$

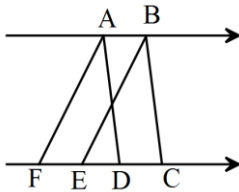
مساحت مثلث : اگر اندازه یک ضلع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد : $S = \frac{1}{2} ha$

متوازی الاضلاع : اگر اندازه یک ضلع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد : $S = ha$

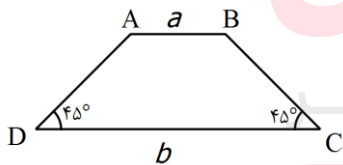
مساحت لوزی : اگر اندازه دو قطر آن m و n باشد : $S = \frac{1}{2} mn$

مساحت ذوزنقه : اگر اندازه دو قاعده a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد : $S = \frac{1}{2} (a + b) h$

تمرین : دو متوازی الاضلاع $ABCD$ و $ABEF$ بین دو خط موازی در شکل زیر رسم شده اند . اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع S باشد . مساحت دیگری بر حسب S چیست ؟ (راهنمایی : ارتفاع هر دو همان فاصله دو خط موازی است)

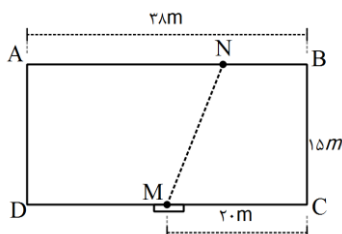


تمرین : در ذوزنقه زیر مساحت را بر حسب a و b بدست آورید . (راهنمایی : از A و B عمود هایی رسم کنید تا مثلث های کناری متساوی الساقین پدید آید)

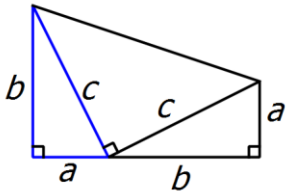


www.my-dars.ir

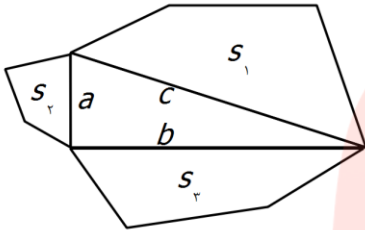
تمرین : در باغی مستطیل شکل زیر که دو برادر به یک اندازه در آن سهیم هستند فقط یک در در نقطه M وجود دارد . نقطه N را در چه قسمتی از AB قرار دهیم تا خط MN باغ را برای دو برادر به دو قسمت هم مساحت تقسیم کند تا هر دو برادر به در دسترسی داشته باشند ؟ (در واقع باید قرار داد $BN=x$ و بقیه اضلاع را بر حسب آن نوشته و مساحت دو ذوزنقه را برابر قرار داد)



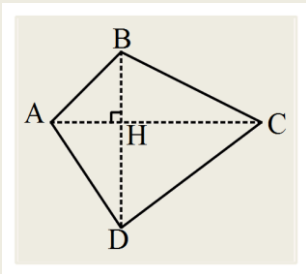
تمرین : قضیه فیثاغورس را به کمک ذوزنقه زیر اثبات کنید .



تمرین : ثابت کنید اگر سه چند ضلعی متشابه روی اضلاع مثلث قائم الزاویه رسم شود . مساحت شکل روی وتر برابر با مجموع مساحت دو شکل دیگر است .



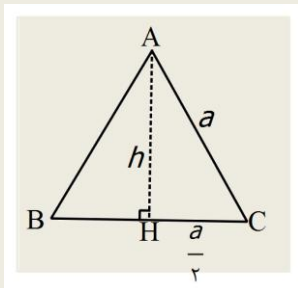
قضیه : مساحت هر چهار ضلعی که قطر های آن عمود باشند ، برابر با نصف حاصل ضرب اندازه قطر ها است .



اثبات : مساحت مثلث ABC برابر :

مساحت مثلث ADC برابر :

از جمع دو رابطه قبل مساحت کل برابر است با :



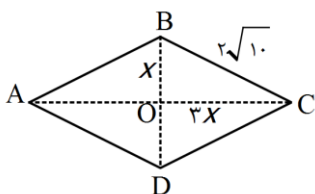
قضیه: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a برابر $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ است .

اثبات : با رابطه فیثاغورس داریم : $h =$

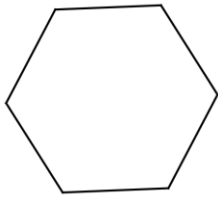
پس طبق فرمول مساحت مثلث داریم : $S =$

www.my-dars.ir

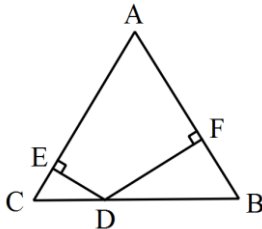
تمرین : در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{10}$ و نسبت اندازه های دو قطر $\frac{1}{3}$ است . مساحت لوزی را بیابید .



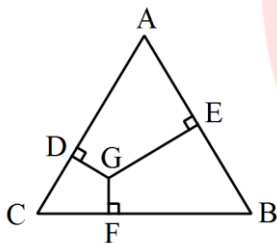
تمرین : مساحت شش ضلعی منتظم به طول ضلع a را بدست آورید .



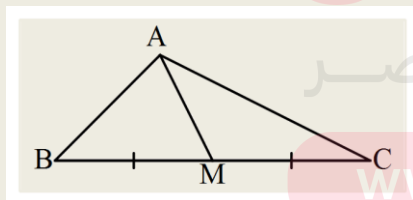
تمرین : ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از ساقها برابر با ارتفاع وارد بر ساق است .



تمرین : ثابت کنید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر با ارتفاع مثلث است .



قضیه : ثابت کنید یک میانه در هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند .

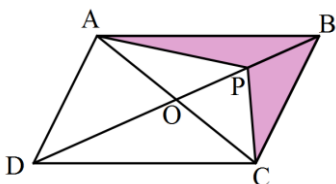


اثبات : دو مثلث ایجاد شده دارای ارتفاع مشترک با قاعده های هم اندازه هستند

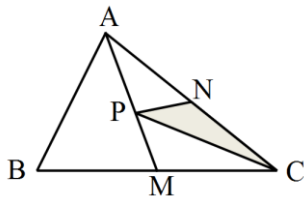
پس

www.my-dars.ir

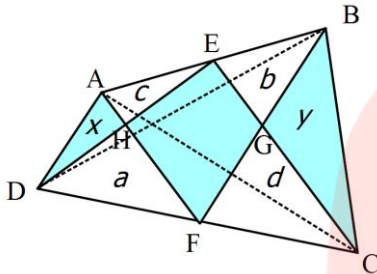
تمرین : ثابت کنید در متوازی الاضلاع زیر اگر نقطه P در مکان دلخواهی روی قطر BD باشد ، مساحت دو مثلث ABP و BPC برابر است .



تمرین : در شکل زیر M و N و P نقاط وسط اضلاع هستند . مساحت مثلث PNC چه کسری از مساحت کل است ؟



تمرین : اگر در چهار ضلعی ABCD نقاط E و F وسط اضلاع باشند ثابت کنید : $S_{EGFH} = S_{BGC} + S_{AHD}$



اثبات : با رسم قطر AC داریم : $a + x = \frac{1}{4} S_{ADC}$, $b + y = \frac{1}{4} S_{ABC}$

در نتیجه : $a + x + b + y = \frac{1}{4} S_{ABCD}$

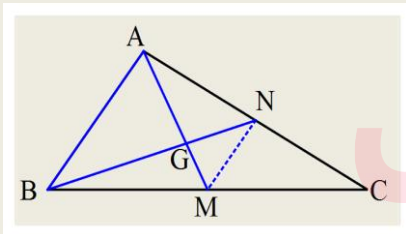
با رسم قطر BD داریم :

در نتیجه :

از مجموع تساوی های دو نتیجه قبلی داریم : $x + y + \underbrace{a + b + x + y + c + d}_e = S_{ABCD} \Rightarrow x + y = S_{ABCD} - e = S_{EGFH}$

قضیه : هر سه میانه یک مثلث در نقطه ای درون مثلث هم‌رسند. و فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع

است و فاصله آن تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است .



اثبات : با رسم دو میانه AM و BN و رسم پاره خط MN

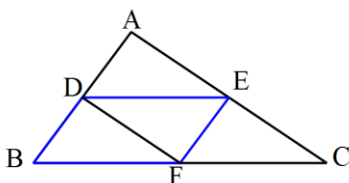
دو مثلث GMN و GBC بنا به حالت متشابه هستند

و چون $AB = 2MN$ پس $BG = \dots$ و $AM = \dots$

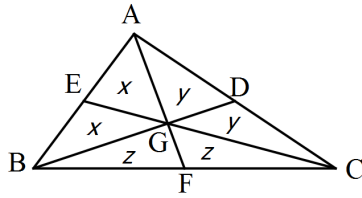
در نتیجه برای هر دو میانه دلخواه این نسبت برقرار است و لذا میانه ها هم‌رسند و

فاصله نقطه هم‌رسی تا وسط هر ضلع $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع و فاصله آن تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است .

تمرین : ثابت اگر اوساط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم ، چهار مثلث با مساحت های مساوی بدست می آید .(راهنمایی : ثابت کنید BDEF متوازی الاضلاع است و قطرش آن را به دو مثلث همنهشت تقسیم می کند و در مورد بقیه قسمت ها هم همین طور)



تمرین : ثابت کنید سه میانه یک مثلث آن را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کند .



اثبات : GD و GE و GF به ترتیب میانه های مثلث های AGC و AGB و BGC

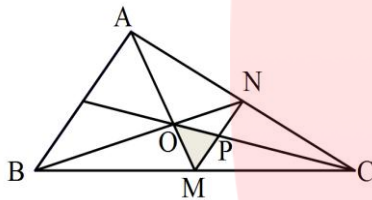
خواهند بود بنابر این مساحت های مشخص شده با هم برابرند .

از طرفی AF میانه مثلث ABC است پس $x + x + z = y + y + z \Rightarrow x = y$

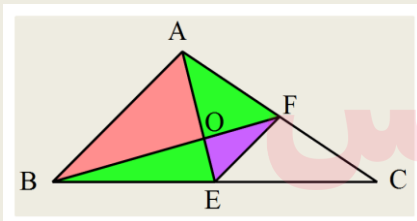
همین طور EC میانه مثلث ABC است پس

در نتیجه :

تمرین : در شکل زیر مساحت مثلث MOP چه کسری از مساحت کل است ؟ (راهنمایی : وسط اضلاع مثلث ABC را رسم می کنیم میانه های مثلث ABC میانه های مثلث ایجاد شده نیز هستند . چرا ؟ . حال از دو تمرین قبل استفاده کنید)



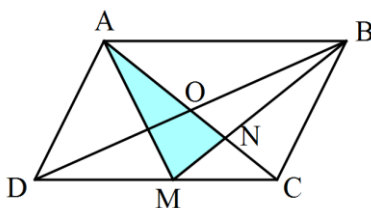
نتیجه : اگر مساحت مثلث ABC را S بنامیم ، از برخورد دو میانه مثلث داریم :



$$S_{OFE} = \frac{1}{12}S, \quad S_{ABO} = \frac{1}{3}S$$

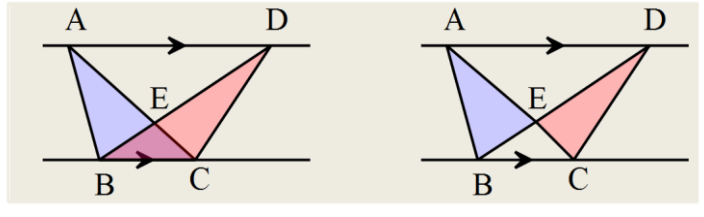
$$S_{AOF} = S_{BEO} = \frac{1}{6}S, \quad S_{FEC} = \frac{1}{4}S$$

تمرین : در متوازی الاضلاع زیر M وسط DC است . مساحت مثلث AMN چه کسری از مساحت کل است ؟

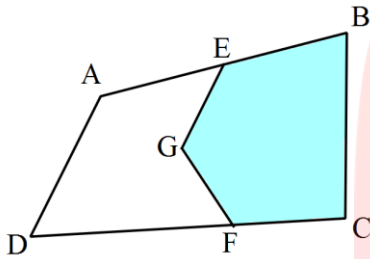


(راهنمایی : $S_{AMN} = \frac{1}{3}S_{AMB}$ چرا ؟)

توجه: می دانیم دو مثلث هم قاعده بین دو خط موازی هم مساحت هستند (در دوزنقه همینطور) پس با حذف مثلث مشترک از هر دوی آنها مثلث های باقی مانده نیز هم مساحت هستند.

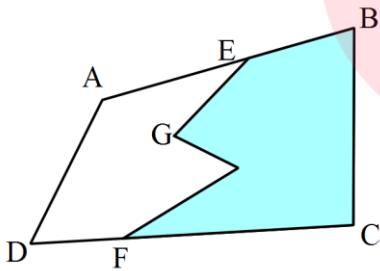


تمرین: مرزی با یک پاره خط مستقیم برای این دو زمین کشاورزی طوری رسم کنید که مساحت هر زمین حفظ شود.

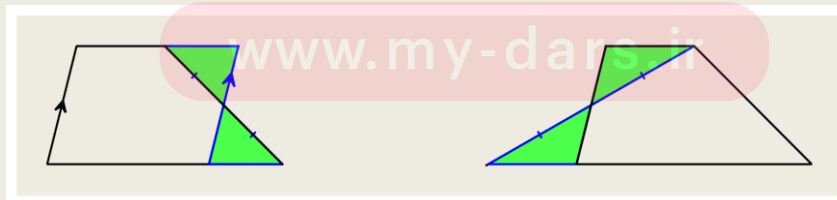


تمرین: مرزی با یک پاره خط مستقیم برای این دو زمین کشاورزی طوری رسم کنید که مساحت هر زمین حفظ شود.

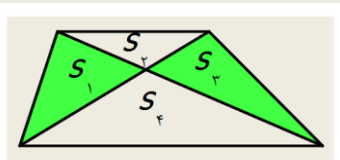
(راهنمایی: دوبار راه حل تمرین قبل را تکرار کنید)



بیشتر بدانیم: در دوزنقه اگر از وسط یک ساق موازی ساق دیگر خطی رسم شود به متوازی الاضلاعی هم مساحت با دوزنقه می رسمیم. و اگر یکی از رئوس را به وسط ساق مقابل وصل کرده و امتداد دهیم به مثلی هم مساحت با دوزنقه می رسمیم.



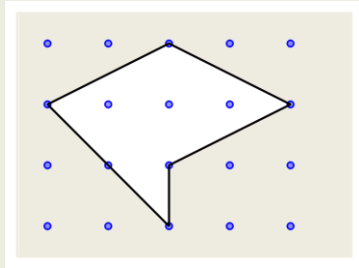
در هر چهار ضلعی از رسم قطر ها ۴ مثلث پدید می آید که حاصل ضرب مساحت دو مثلث مقابل با حاصل ضرب دو مثلث مقابل دیگر برابر است پس در دوزنقه داریم:



$$S_1 \times S_3 = S_2 \times S_4 \xrightarrow{S_1=S_2} S_1^2 = S_3 \times S_4$$

نقاط شبکه ای و چند ضلعی شبکه ای : نقاطی روی خطها افقی و عمودی که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی

(یک واحد است . هر چند ضلعی که همه رئوس آن روی نقاط شبکه ای باشد را چند ضلعی شبکه ای می گویند .



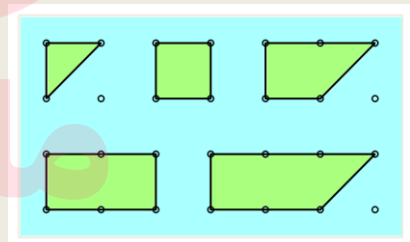
توجه: برای یک چند ضلعی شبکه ای ، نقاط شبکه ای روی چند ضلعی را نقاط مرزی شبکه ای می گویند و تعداد آنها را با b نمایش می دهند . نقاط شبکه ای درون چند ضلعی را نقاط دورنی شبکه ای می گویند و تعداد آنها را با i نمایش می دهند . مثلاً در شکل بالا $i = 3, b = 6$ است .

توجه : می توان نقاط شبکه ای را در یک دستگاه مختصات با مختصات های (x, y) در نظر گرفت که x و y هر دو عدد صحیح باشند.

فعالیت :

الف) i را صفر نگه داشته و چند ضلعی های شبکه ای با $b = 3, 4, 5, \dots$ بسازید . و جدول زیر را پر کنید .

b	۳	۴	۵	۶	۷
مساحت	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$		

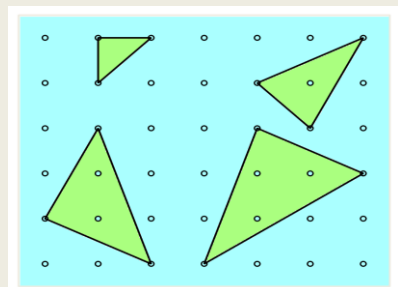


ب) رابطه بین مساحت با تعداد نقاط مرزی شبکه ای را کامل کنید : $S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$

www.my-dars.ir

ج) حال $b = 3$ را ثابت نگه داشته و چند ضلعی های شبکه ای با $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ رسم کنید . و جدول را کامل کنید .

i	۰	۱	۲	۳	۴
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			



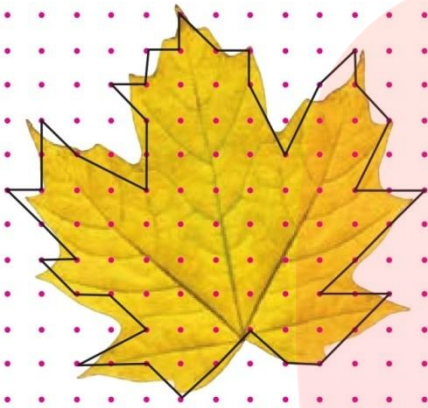
$$S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$$

(د) حال رابطه سطر اول و دوم با سطر سوم را بنویسید :

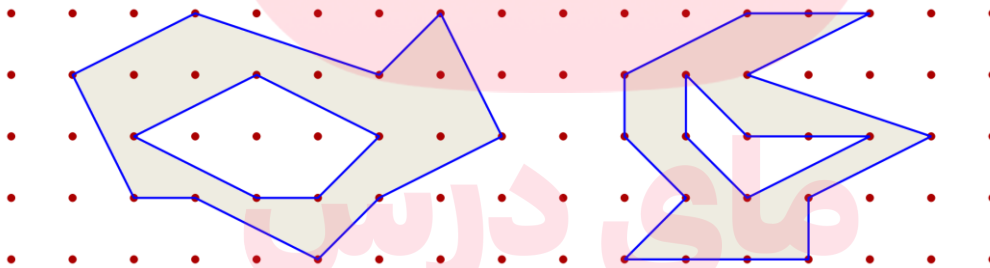
رابطه بالا که به صورت شهودی بدست آمد به **فرمول پیک** شهرت دارد که جرج الکساندر پیک آن را کشف و اثبات کرد .

نکته : با فرمول پیک می توان مساحت شکل های نامنظم را به طور تقریبی بدست آورد .

تمرین : مساحت برگ داده شده را تخمین بزنید .



تمرین : مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید .

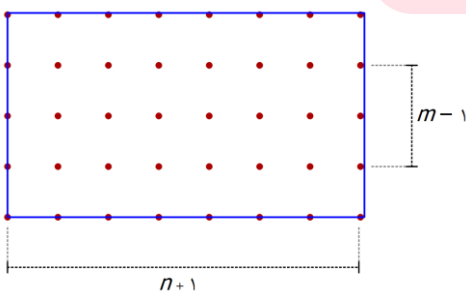


تمرین : فرمول مساحت مستطیل m واحد در n واحد را به کمک فرمول پیک بدست آورید .

حل : این مستطیل دارای $b = 2(\dots\dots\dots) + 2(\dots\dots\dots) = 2n + 2m$ نقطه مرزی

خواهد بود .

و تعداد نقاط دورنی $i = (\dots\dots\dots)(\dots\dots\dots) = nm - n - m + 1$ خواهد بود .



پس : $S = \frac{2n + 2m}{2} + (nm - n - m + 1) - 1 = \dots$

تمرین: مساحت یک چند ضلعی شبکه ای ۳ واحد است .

الف) جدولی تشکیل دهید و تمام حالت های ممکن برای عداد نقاط مرکزی و درونی را بنویسید .

i	۰	۱	۲
b			

حل : از آنجا که $b \geq 3$; پس داریم : $\frac{b}{2} + i - 1 = 3 \Rightarrow b = \dots\dots\dots$

ب) تعدادی از حالت های شکل مثلث باشد را رسم کنید .تعدادی از حالت هایی که چهار ضلعی با بیشترین نقاط مرزی باشد را رسم کنید . ($b = 8, i = 0$)



مای درس

گروه آموزشی عصر

www.my-dars.ir