

نام: ..... سوالات درس: ریاضیات  
گسسته

امتحانات نیم سال اول: ۹۹-۰۰

تاریخ امتحان ۱۳۹۹/۱۰/۱۷

نام خانوادگی: ..... پایه: دوازدهم

ساعت شروع: .....

مدت زمان امتحان: ۱۰۰ دقیقه شماره صندلی: .....

نام و نام خانوادگی دبیر: نرگس اصلانی گرمی

نمره به عدد:

نمره به حروف:

تاریخ و امضا:

ردیف	پيامبر اکرم(ص): « نیکوکاری کامل آن است که در نهان همان را انجام دهی که در آشکارا انجام می دهی »	بارم
۱	گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره های هم ارز) ثابت کنید: (برای هر دو عدد حقیقی $x, y$ داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ )	۱/۲۵ ۱
۲	اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟	۱/۲۵ ۱
۳	اگر $a > 1, a   9k + 4, a   5k + 3$ ثابت کنید $a$ عددی اول است.	۱
۴	اگر دو عدد $(3a - 5), (4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.	۱
۵	باقی مانده تقسیم عدد $A = (2^{11} + 7) \times 9$ را بر ۲۳ بیابید.	۱/۵
۶	ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش پذیر است.	۱
۷	ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول اند. (راهنمایی: فرض کنید، $(m, m + 1) = d$ و ثابت کنید $d   1$ و نتیجه بگیرید: $d = 1$ ).	۱/۵
۸	اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ و $\alpha + 2\beta$ گنگ هستند.	۱
۹	از رابطه همنهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$ ، کدام نتیجه گیری در پیمانه ۷ <u>نا درست</u> است؟ (۱) $2a \equiv -1$ (۲) $a \equiv 4$ (۳) $a \equiv 3$ (۴) $3a \equiv 2$	۰/۵
۱۰	برای ..... درستی گزاره « $n^2 + 3n + 13$ به ازای هر عدد طبیعی $n$ ، عددی اول است »، می توان از روش ..... استفاده کرد. (۱) اثبات- در نظر گرفتن همه حالت ها (۲) اثبت- برهان خلف (۳) رد- مثال نقض (۴) رد- برهان خلف	۰/۵
۱۱	جاهای خالی را پر کنید. $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند: ۱) $a   c, b   c$ ۲) $\forall m > 0, \dots$	۱
۱۲	یک گراف ۵ رأسی غیر تهی $k$ - منتظم رسم کنید به طوری که: الف) $k$ بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. ب) $k$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.	۱
۱۳	ثابت کنید تعداد رأس های فرد هر گراف، عددی زوج است.	۱

۱	<p>از گراف های زیر کدام ساده است؟</p>	۱۴
۱	<p>در گرافی که ۱۶ رأس دارد تعداد رأس های زوج عددی ..... و تعداد رأس های فرد عددی ..... است.</p> <p>(۱) فرد-فرد      (۲) فرد-زوج      (۳) زوج-فرد      (۴) زوج-زوج</p>	۱۵
۰/۵	<p>در گراف ۳-منتظم، <math>q = 2p - 3</math> است، مرتبه این گراف کدام است؟</p> <p>(۱) ۴      (۲) ۶      (۳) ۵      (۴) ۷</p>	۱۶
۱	<p>گراف <math>G</math> در شکل زیر رسم گردیده است. اگر <math>x \in V(G)</math>، آنگاه به ازای چند رأس متمایز <math>x</math>، <math>N_G[x] = \{a, b, c, d\}</math> است؟</p> <p>(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴</p>	۱۷
۱	<p>در گراف مقابل <math> N_G(g) - N_G(c) </math> کدام است؟</p> <p>(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱</p>	۱۸
۱	<p>در گراف ۳-منتظم روبه رو، چند، دور با طول ۴، موجود است؟</p> <p>(۱) ۶      (۲) ۷      (۳) ۸      (۴) ۹</p>	۱۹
۱	<p>کدام یک از وضعیت های زیر غیر ممکن است؟</p> <p>(۱) در یک میهمانی ۱۷ نفری، هر فرد دقیقاً با ۵ نفر دست بدهد.</p> <p>(۲) در یک میهمانی تعداد افرادی که با فردی دوست هستند، زوج است.</p> <p>(۳) در یک کتابخانه تعداد کتاب هایی که دارای نماد صفحات فرد باشد، عدد فرد است.</p> <p>(۴) در یک گروه از انسان ها همیشه دو نفر با تعداد دوست مساوی وجود دارد.</p>	۲۰
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

نام: ..... سوالات درس: ریاضیات  
گسسته

امتحانات نیم سال اول: ۹۹-۰۰

تاریخ امتحان: .....

نام خانوادگی: ..... پایه: دوازدهم

ساعت شروع: .....

مدت زمان امتحان: ۱۰۰ دقیقه شماره صندلی: .....

نام و نام خانوادگی دبیر: نرگس اصلانی گرمی

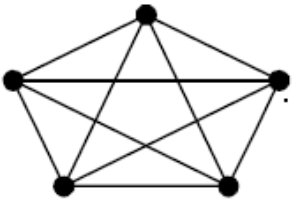
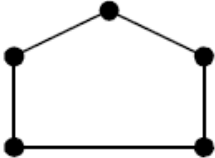
نمره به عدد:

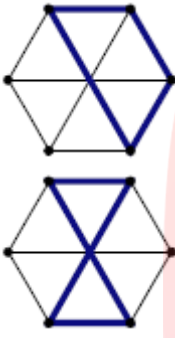
نمره به حروف:

تاریخ و امضا:

ردیف	پيامبر اکرم(ص): « نیکوکاری کامل آن است که در نهان همان را انجام دهی که در آشکارا انجام می دهی »	بارم														
۱	<p>پاسخنامه تشریحی</p> $2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0, (x - y)^2 \geq 0$	۱/۲۵														
۲	<p>روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ روز بهمن، فاصله اول تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>ش</td> <td>ی</td> <td>د</td> <td>س</td> <td>چ</td> <td>پ</td> <td>ج</td> </tr> <tr> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> <td>۳</td> <td>۴</td> <td>۵</td> <td>۶</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">۷</p> $29 + 30 + 30 + 30 + 12 = 131 \rightarrow 131 \equiv 5$ <p>که متناظر این عدد در جدول روز پنج شنبه را نشان می دهد.</p>	ش	ی	د	س	چ	پ	ج	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۱/۲۵
ش	ی	د	س	چ	پ	ج										
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶										
۳	<p>نکته: (۱) اگر عدد <math>a</math> عدد <math>b</math> را عاد کند، آنگاه هر مضرب صحیح عدد <math>b</math> را نیز می شمارد.</p> $a b \wedge a c \Rightarrow a mb \pm nc$ (۲) $a 9k + 4 \Rightarrow a 45k + 20 \Rightarrow a 7 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ یا } \pm 7 \xrightarrow{a>1} a = 7$ $a 5k + 3 \Rightarrow a 45k + 27 \Rightarrow a 7 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ یا } \pm 7 \xrightarrow{a>1} a = 7$	۱														
۴	<p>طبق فرض داریم:</p> $3a - 5 \equiv 4a - 7 \rightarrow 10 (4a - 7) - (3a - 5) \rightarrow 10 a - 2 \rightarrow a \equiv 2 \quad (I)$ $\xrightarrow{(I)} 9a \equiv 2 \times 9 \equiv 8 \quad (II)$ $\xrightarrow{(II)} 9a + 6 \equiv 8 + 6 \equiv 4$	۱														
۵	<p>می توان نوشت:</p> $32 = 2^5 \equiv 9, 2^{11} = (2^5)^2 \times 2 \equiv 9^2 \times 2 \equiv 12 \times 2 \equiv 1$ $\Rightarrow (2^{11} + 7) \times \equiv (1 + 7) \times 9 \equiv 3$	۱/۵														

۱	<p>می توان نوشت <math>۱۱ + ۱۲ = ۲۳</math> بنابراین <math>(۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱}) = ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱} - ۲۳^{۵۱}</math> که با توجه به سؤال قبل <math>(۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})</math> بنابرین <math>۱۱ \times ۱۲ \mid (۱۱ + ۱۲)^{۵۱} - (۱۱^{۵۱} + ۱۲^{۵۱})</math> <math>۱۳۲ \mid ۱۱^{۵۱} - ۱۲^{۵۱}</math></p>	۶
۱/۵	<p>الف) فرض کنید <math>d \mid (m, m + 1)</math> آن گاه می توان نوشت:</p> $\left. \begin{array}{l} d \mid m \\ d \mid m + 1 \end{array} \right\} \rightarrow d \mid m + 1 - m \rightarrow d \mid 1$ <p>حال چون <math>d &gt; 0</math> می توان نتیجه گرفت <math>d = 1</math> یعنی عدد دو صحیح و متوالی <math>m, m + 1</math> نسبت به هم اول اند.</p> <p>ب) فرض کنید <math>d \mid (2m + 1, 2m + 3)</math> آن گاه می توان نوشت:</p> $\left. \begin{array}{l} d \mid 2m + 1 \\ d \mid 2m + 3 \end{array} \right\} \rightarrow d \mid 2m + 3 - 2m - 1 \rightarrow d \mid 2$ <p>با توجه به اینکه <math>d &gt; 0</math> می توان نتیجه گرفت <math>d = 1</math> یا <math>d = 2</math> چون هیچ عدد فردی مقسوم علیه زوج ندارد بنابراین <math>d = 1</math>.</p>	۷
۱	<p>فرض کنیم بنابر برهان خلف <math>\alpha - \beta</math> گویا باشد (فرض خلف) از طرفی <math>\alpha + \beta</math> گویا است پس مجموع آن ها یعنی <math>\alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha</math> گویاست در نتیجه <math>\alpha</math> گویا است که با فرض در تناقض است پس <math>\alpha - \beta</math> گنگ است.</p> <p>فرض کنیم بنابر برهان خلف <math>\alpha + 2\beta</math> گویا باشد (فرض خلف) از طرفی چون <math>\alpha + \beta</math> گویا است پس تناقض آن ها یعنی <math>\beta = \alpha + 2\beta - (\alpha + \beta)</math> گویا است که با فرض در تناقض است پس <math>\alpha + 2\beta</math> گنگ است.</p>	۸
۰/۵	<p>گزینه ۲</p> <p>تذکر: تقسیم در هم نهشتی</p> $\begin{cases} ac \equiv bc \\ (c, m) = d \end{cases} \xrightarrow{\div c} a \frac{m}{d} \equiv b$ $\begin{array}{ccc} ۸۴ & & ۷ \quad ۷ \\ ۳۶ \equiv ۱۹۲ & \xrightarrow{\div ۱۲} & ۳a \equiv ۱۶ \equiv ۲ \end{array}$ $\begin{array}{ccc} ۷ & ۷ & ۷ \\ ۳a \equiv ۲ \equiv ۹ & \xrightarrow{\div ۳} & a \equiv ۳ \end{array}$ $\begin{array}{ccc} ۷ & & ۷ \quad ۷ \\ a \equiv ۳ & \xrightarrow{\times ۲} & ۲a \equiv ۶ \equiv -۱ \end{array}$	۹
۰/۵	<p>گزینه ۳</p> <p>اگر به جای <math>n</math> عدد <math>۱۳</math> قرار بدهیم داریم:</p> $n^2 + 3n + 13 = 13^2 + 3 \times 13 + 13 = 13 \times 17$ <p>بنابرین عدد مورد نظر مرکب است و درستی حکم رد می شود.</p> <p>پس برای رد حکم از مثال نقض استفاده کردیم.</p>	۱۰

۱	$\forall m > 0, a m, b m \Rightarrow c \leq m$ (الف)	۱۱
۱	الف) بیشترین مقدار $k$ برای ۵ رأس برابر ۴ است که گراف ۴-منتظم یا همان گراف کامل ۵ رأسی است ( $K_5$ ) که درجه هر رأس آن برابر ۴ است.  $K_5$ ب) کمترین مقدار $k$ برای ۵ رأس برابر ۲ است که گراف ۲-منتظم یا همان گراف $C_5$ است که درجه هر رأس برابر ۲ است.  $C_5$	۱۲
۱	فرض کنیم $G$ یک گراف و $A$ مجموعه همه رئوس فرد گراف $G$ , $B$ مجموعه همه رئوس زوج گراف $G$ باشد. در این صورت داریم: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$ از طرفی می دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف $G$ عددی زوج است یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است بنابراین تفاضل آن ها نیز زوج خواهد شد. بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می شود که $n(A)$ عددی زوج است.	۱۳
۱	الف- ساده نیست زیرا بین ۲ رأس $v_1$ و $v_2$ بیش از یک یال رسم شده است. ب- ساده نیست زیرا بین ۲ رأس $v_1$ و $v_2$ بیش از یک یال رسم شده است. ج- ساده نیست زیرا در رأس $v_1$ طوقه وجود دارد. د- ساده نیست زیرا بین ۲ رأس $v_2$ و $v_3$ بیش از یک یال رسم شده است. ه- گراف ساده است.	۱۴
۱	گزینه ۴ تعداد رئوس درجه فرد، همواره زوج است و تعداد کل رئوس زوج است پس تعداد رئوس زوج نیز عددی زوج است در واقع تعداد رئوس درجه زوج از جنس مرتبه گراف است.	۱۵
۰/۵	گزینه ۲ در گراف ۳-منتظم با مرتبه $p$ داریم $q = \frac{3p}{2}$ با توجه به فرض $2p - 3 = \frac{3p}{2} \Rightarrow 4p - 6 = 3p \Rightarrow p = 6$	۱۶
۱	گزینه ۱ نکته: رأس $v$ را در گراف $G$ در نظر می گیریم به مجموعه رأس هایی از گراف $G$ که به رأس $v$ متصل هستند همسایگی باز رأس $v$ می نامیم و با $N_G(v)$ نمایش می دهیم، اضافه کردن خود رأس $v$ به $N_G(v)$ ،	۱۷

	<p>همسایگی بسته رأس <math>v</math> را می دهد و آن را به فرم <math>N_G(v)</math> نمایش می دهند.</p> <p><math>N_G[x]</math> همسایگی بسته رأس <math>x</math> است. بنابراین شامل رأس <math>x</math> می باشد. یعنی <math>x</math> باید به مجموعه <math>\{a, b, c, d\}</math> تعلق داشته باشد. ولی با توجه به نمودار گراف، تمام رئوس <math>a, b, c, d</math> با رأس <math>e</math> مجاور هستند و مجموعه همسایگی بسته آنها لزوماً شامل رأس <math>e</math> نیز خواهد بود. پس به ازای هیچ رأس <math>x</math>، همسایگی بسته این رأس برابر <math>\{a, b, c, d\}</math> نیست.</p>		
۱	<p>گزینه ۲</p> <p><math>N_G(g) = \{b, c, d, f\}, N_G(c) = \{b, g, a, e\}</math>  <math>N_G(g) - N_G(c) = \{c, d, f\}</math></p>		۱۸
۱	<p>گزینه ۴</p> <div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>→ ۶ دور به طول ۴</p> <p>→ ۳ دور به طول ۴</p> </div> </div> <p>کلاً ۹ دور به طول ۴ داریم</p>		۱۹
۱	<p>گزینه ۱ گزینه (۱) معادل یک گراف ۵-منتظم مرتبه ۱۷ است که چنین گرافی وجود ندارد.</p>		۲۰
۲۰	جمع نمره	موفق باشید	

# مای درس

گروه آموزشی عصر

[www.my-dars.ir](http://www.my-dars.ir)