

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹			

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

الف) بخش الزامی

دانش آموز عزیز به سؤالات ۱ تا ۱۳ جهت کسب ۱۶ نمره پاسخ دهید.

۱	درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید. الف) برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آن گاه $a = 0$ یا $b = 0$. پ) اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. ت) حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.	۱
۱/۲۵	ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.	۲
۱/۲۵	فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a 2n + 3$ و $a 3n + 4$. نشان دهید $a = 1$.	۳
۱/۵	ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می‌شود.	۴
۱/۲۵	اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.	۵
۱/۲۵	رقم یکان عدد $(3^{11} + 7)$ را به دست آورید.	۶
۱	معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.	۷
۲/۵	گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) $\Delta(G)$ ، $\delta(G)$ را مشخص کنید. ب) سه دور به طول ۳ بنویسید. پ) ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟ ت) $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید. ث) آیا گراف G همبند است؟	۸
۱	گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.	۹
۱/۵	عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.	۱۰
۰/۷۵	هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق، سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟	۱۱
۱/۲۵	معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_1 \geq 1$ و $x_3 > 3$ باشند؟	۱۲
۰/۵	یک مربع لاتین چرخشی 4×4 بنویسید.	۱۳

«بقیه سؤالات در صفحه دوم»

سؤالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	نام و نام خانوادگی:	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی فیزیک
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	تعداد صفحه: ۲	تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دانش آموزان روزانه سراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۹			

ردیف	سؤالات پاسخ نامه دارد	نمره
------	-----------------------	------

ب) بخش انتخابی

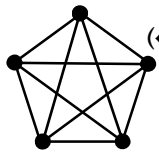
دانش آموز عزیز جهت کسب ۴ نمره از سوالات ۱۴ تا ۲۱ فقط ۴ سوال را به دلخواه انتخاب کرده و پاسخ دهید.

۱	فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b^m$ ، ثابت کنید: $a^n \equiv b^n$.	۱۴																		
۱	آیا گراف ۷ رأسی ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.	۱۵																		
۱	گراف P_6 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.	۱۶																		
۱	متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.	۱۷																		
	<table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۱</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> </table>	۱	۲	۳	۳	۱	۲	۲	۳	۱	۱	۲	۳	۲	۳	۱	۳	۱	۲	
۱	۲	۳																		
۳	۱	۲																		
۲	۳	۱																		
۱	۲	۳																		
۲	۳	۱																		
۳	۱	۲																		
۱	در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.	۱۸																		
۱	تعداد تابع های یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل)	۱۹																		
۱	۸ نفر را که برای یک برنامه تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کرده ایم و می خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان پذیر است؟ (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود).	۲۰																		
۱	نشان دهید در یک خانواده ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.	۲۱																		
۲۴	جمع نمره	"موفق باشید"																		

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۹			

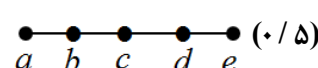
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

پاسخ سوالات الزامی

۱	الف) نادرست (۰/۲۵) کار در کلاس صفحه ۳ ب) درست (۰/۲۵) (مثال صفحه ۴) پ) نادرست (۰/۲۵) کار در کلاس صفحه ۷ ت) نادرست (۰/۲۵) (مشابه قسمت ث کار در کلاس صفحه ۳)	۱
۲	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ (۰/۲۵) نابرابری آخر برای a, b نامنفی همیشه درست است. (۰/۲۵). اثبات بازگشتی و حکم برقرار است. (مثال صفحه ۷)	۲
۳	$a 2n+4 \Rightarrow a \underbrace{-2(2n+4)}_{(0/25)} + \underbrace{2(2n+2)}_{(0/25)} \Rightarrow a 1 \Leftrightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = 1$ (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه ۱۱)	۳
۴	هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $p = 6k$ (۱) , $p = 6k + 1$ (۲) , $p = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ (۳) $p = 6k + 3 = 3(2k + 1)$ (۴) , $p = 6k + 4 = 2(3k + 2)$ (۵) , $p = 6k + 5$ (۶) p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است (۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶) ، p می تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می شود. (۰/۲۵) (مسئله ۲ صفحه ۱۵)	۴
۵	$m = 17q + 5 \quad (q \in \mathbb{Z})$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q') - 5$ (۰/۲۵) (مثال پایین صفحه ۱۴) $n = 17q' + 3 \quad (q' \in \mathbb{Z})$ $\Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q - 5q' - 1) + 12$ (۰/۲۵) $\Rightarrow r = 12$ (۰/۲۵)	۵
۶	$2^5 \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{10} \equiv 2^2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{11} \equiv 8 \pmod{10} \Rightarrow 2^{11} + 7 \equiv 15 \equiv 5 \pmod{10}$ (۰/۲۵) رقم یکان برابر ۵ است. (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۱۱ صفحه ۲۹)	۶
۷	$2x \equiv 19 \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{(2,5)=1} x \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 2 \Rightarrow y = -2k + 3$ (۰/۲۵) (مشابه کار در کلاس صفحه ۲۷)	۷
۸	الف) $\Delta(G) = 4$, $\delta(G) = 0$ (۰/۵) ب) c, a, b, c (۰/۲۵) , c, a, e, c (۰/۲۵) , c, e, d, c (۰/۲۵) پ) $N_G(e) = \{a, c, d\}$ (۰/۷۵) ث) خیر (۰/۲۵) (مفاهیم اساسی گراف از صفحه ۳۲ تا صفحه ۳۹)	۸
۹	$\frac{p(p-1)}{2} = 10 \pmod{25} \Rightarrow p^2 - p - 20 = 0 \pmod{25} \Rightarrow p = 5 \pmod{25}$ (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۶ صفحه ۴۲) رسم گراف (۰/۲۵) 	۹
۱۰	با توجه $\left\lfloor \frac{8}{3+1} \right\rfloor = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است. (۰/۲۵) از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq 2$ در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری). (۰/۲۵) (قسمت الف تمرین ۳ صفحه ۵۲)	۱۰
۱۱	$\frac{8!}{3! \times 4!}$ (۰/۷۵) (به راه حل $\binom{8}{4} \binom{4}{3} \binom{1}{1}$ نیز نمره داده شود.) (مشابه مثال صفحه ۵۹)	۱۱

ادامه پاسخها در صفحه دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته	رشته: ریاضی فیزیک	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ امتحان: ۱۳۹۹/۰۶/۰۴	
دانش آموزان روزانه سراسر کشور شهریور ماه سال ۱۳۹۹			

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																
۱۲	$y_1 = x_1 - 1 \geq 0 \Rightarrow x_1 = 1 + y_1$ (۰/۲۵) , $y_r = x_r - 4 \geq 0 \Rightarrow x_r = 4 + y_r$ (۰/۲۵) \Rightarrow (سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۶۱) $1 + y_1 + x_r + 4 + y_r + x_s = 14$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y_1 + x_r + y_r + x_s = 9$ (۰/۲۵) \Rightarrow جواب = $\begin{pmatrix} 9+5-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$ (۰/۲۵)	۱/۲۵																
۱۳	(توضیحات صفحه ۶۳) <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr> <tr><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td></tr> <tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr> <tr><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td></tr> </table> (۰/۵)	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۳	۴	۱	۲	۲	۳	۴	۱	۰/۵
۱	۲	۳	۴															
۴	۱	۲	۳															
۳	۴	۱	۲															
۲	۳	۴	۱															
پاسخ سوالات اختیاری																		
۱۴	$a \equiv b \Rightarrow m a-b$ (۰/۲۵) $\Rightarrow m (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ (۰/۲۵) $\Rightarrow m a^n - b^n$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^n \equiv b^n$ (۰/۲۵) (مشابه تمرین ۹ صفحه ۲۹)	۱																
۱۵	وجود ندارد. زیرا: (۰/۲۵) زوج $2q = 21$ فرد $\Rightarrow 3 \times 7 = 2q$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \sum_{i=1}^7 \deg v_i = 2q$ (سوال ۸ صفحه ۳۸) همکاران گرامی، در صورتی که دانش آموزی با رسم شکل هم توضیح داد، نمره داده شود.	۱																
۱۶	(صفحه ۳۸) a, b, c, d (۰/۲۵) , b, c, d, e (۰/۲۵)  (۰/۵)	۱																
۱۷	در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند. (۰/۲۵) (کار در کلاس صفحه ۶۶) <table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>۱۱</td><td>۲۲</td><td>۳۳</td></tr> <tr><td>۳۲</td><td>۱۳</td><td>۲۱</td></tr> <tr><td>۲۳</td><td>۳۱</td><td>۱۲</td></tr> </table> (۰/۷۵)	۱۱	۲۲	۳۳	۳۲	۱۳	۲۱	۲۳	۳۱	۱۲	۱							
۱۱	۲۲	۳۳																
۳۲	۱۳	۲۱																
۲۳	۳۱	۱۲																
۱۸	(مثال صفحه ۷۴) $ \overline{FUV} = S - FUV = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$ (۰/۲۵) (۰/۵)	۱																
۱۹	(فعالیت صفحه ۷۹) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $b = \{b_1, b_2, \dots, b_6\}$ $f(a_1) = b_1 \vee b_2 \vee \dots \vee b_6 \Rightarrow$ به ۶ طریق $f(a_1)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) $f \Rightarrow f(a_2) \neq f(a_1) \Rightarrow$ به ۵ طریق $f(a_2)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) $f \Rightarrow f(a_3) \neq f(a_1)$, $f(a_3) \neq f(a_2) \Rightarrow$ به ۴ طریق $f(a_3)$ را تعریف کنیم. (۰/۲۵) بنابراین طبق اصل ضرب $6 \times 5 \times 4 = 120$ تابع یک به یک داریم. (۰/۲۵) (به روش $P(6,3) = \frac{6!}{3!}$ نیز نمره داده شود).	۱																
۲۰	حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است. (۰/۵) که برابر با 8^4 است. (۰/۵) (مثال صفحه ۷۸)	۱																
۲۱	فصل تولد = لانه = ۴ (۰/۲۵) و افراد خانواده = کبوتر = ۵ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند). (سوال ۳ کار در کلاس صفحه ۸۰)	۱																
۲۴	جمع نمره																	

«همکاران گرامی لطفاً برای راه حل‌های صحیح دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمایید.»